

# 目 录

## 前 言

### 第一章 线弹性断裂力学简介 ..... 1

§ 1 线弹性裂纹问题的解 应力强度因子的概念 ..... 1

§ 2 能量释放率 ..... 11

§ 3 小范围屈服条件下的起裂 ..... 19

§ 4 小范围屈服条件下的裂纹扩展 ..... 25

§ 5 线弹性断裂力学的其它应用 ..... 36

### 第二章 弹塑性断裂力学 ..... 40

§ 1 J 积分 ..... 40

§ 2 Dugdale-Бarenblatt 模型 ..... 49

§ 3 小范围屈服条件下的弹塑性解 ..... 59

§ 4 大范围屈服条件下的弹塑性解 ..... 79

§ 5 局部解(渐近解)(一)—Ⅲ型问题 ..... 90

§ 6 局部解(二)—I型与复合型 ..... 115

§ 7 J 主导条件 ..... 148

§ 8 J 主导条件下裂纹张开位移 $\delta_c$ 与J的关系 ..... 156

§ 9 J 积分计算 ..... 163

§ 10 J 积分测定方法 ..... 175

§ 11 裂纹张开位移 ..... 185

### 第三章 裂纹扩展 ..... 194

§ 1 在J控制条件下的裂纹扩展与稳定性 ..... 194

§ 2 对裂纹稳定扩展现象的宏观解释 ..... 214

§ 3 在理想弹塑性介质中Ⅲ型裂纹的稳定扩展 ..... 217

§ 4 理想弹塑性材料Ⅲ型定常扩展裂纹的局部解 ..... 246

§ 5 Ⅲ型裂纹基于开口位移的稳定扩展准则 ..... 281

§ 6	理想弹塑性材料平面应变问题的提法 .....	288
§ 7	理想弹塑性材料( $\nu = 1/2$ )平面应变 I 型定常扩展 裂纹的局部解 .....	332
§ 8	I 型裂纹基于开口位移的稳定扩展准则 .....	371
参考文献	.....	383

## 第一章 线弹性断裂力学简介

线弹性断裂力学是弹塑性断裂力学的特殊情况。线弹性断裂力学研究理想脆性材料和构件，当存在裂纹型缺陷时裂纹扩展的规律。对于弹塑性材料，裂纹周围进入小范围屈服时，线弹性断裂力学经过适当的修正后，仍然可以用于含裂纹材料和构件的断裂分析。即使构件进入大范围屈服时，在弹性区部分，仍然必须用线弹性断裂力学的分析方法。弹塑性断裂力学中的塑性应力强度因子和奇异场，非线性能量率，撕裂模量和阻力曲线等概念，皆可以从线弹性断裂力学中关于应力强度因子、能量释放率、 $K_R$ 阻力曲线等概念中寻找发端的源头。所以本书为讨论弹塑性断裂力学，在第一部分简要介绍后文所需的线弹性断裂力学的基本概念。对于线弹性断裂力学的详细的叙述，可参阅本书末了所列的参考文献〔1〕~〔8〕和教材〔34〕，本章的部分材料，引自Hutchinson的著作〔35〕。

### § 1 线弹性裂纹问题的解 应力强度因子的概念

物体发生脆性断裂时，如果物体没有塑性变形产生，则理想化地认为物体是弹性的。物体变形时，如服从虎克定律，则可认为它是线弹性体。于是问题归结为含裂纹物体的

线弹性力学分析。

I、II、III型的脆断问题，归结为平面问题和反平面问题下含裂纹的线弹性体的线弹性力学分析。

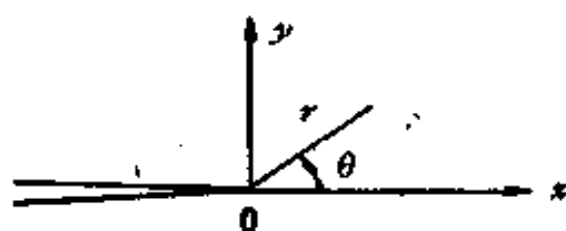


图 1.1 裂纹尖端的坐标系

分析图 1.1 所示的平面裂纹体。裂纹两岸是自由的，无外力作用。远场有给定力或位移的边界条件。

材料是均匀、各向同性的。弹性模量为  $E$ ， $\nu$  是泊松系数。对于弹性力学平面问题，应用复变函数解法，集中注意力于求解复应力函数  $\varphi(z)$ ， $\psi(z)$ 。如果求得  $\varphi(z)$ ， $\psi(z)$ 。则由下式

求得各应力分量  $\sigma_{\alpha\beta}$ ，位移分量  $u_\alpha$ 。其中对于平面应变情形， $\kappa = 3 - 4\nu$ ，对于平面应力  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 。剪切弹性模量  $G = E/2(1 + \nu)$ 。取复应力函数  $\varphi(z)$ ， $\chi(z) = \int \psi(z) dz$  的特征展开式为

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})}] = 4\operatorname{Re}\varphi'(z) \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{2i\theta}[\bar{z}\varphi'(z) + \psi'(z)] \\ 2G(u_r + iu_\theta) &= e^{-i\theta}[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(\bar{z})} - \overline{\psi(z)}]\end{aligned}\quad (1.1)$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{n+1} \quad (1.2)$$

$$\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{n+1}$$

满足裂纹两岸应力自由的边界条件

$$\sigma_\theta + i\tau_{r\theta} \big|_{\theta=\pm\pi} = 0$$

则由  $A_n$ ， $B_n$  有非平凡解的条件，可确定

$$\lambda_n = \frac{n}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_n = -\frac{2}{n+2} \left[ \frac{n}{2} A_n + (-1)^n \bar{A}_n \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

讨论裂纹尖端附近区域, 取特征展开式 (1.2) 的第一项, 即占优的主项。当  $n = 1$ ,  $\lambda_n = \lambda_1 = 1/2$ 。此时, 有

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (K_I - iK_{II}) \\ B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{3} K_I + iK_{II} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中常数  $A_1$ ,  $B_1$  或  $K_I$ ,  $K_{II}$  由远场给定的边界条件确定。

我们称特征展开式主项  $\varphi(z) = A_1 z^{1/2}$ ,  $\chi(z) = B_1 z^{1/2}$  所对应裂纹尖端的应力场为占优的奇异场。分别讨论以下的情形, 为方便, 记  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ 。

(i) 平面应力和平面应变情况下对于裂纹平面的对称场 (I 型, 图1.2)

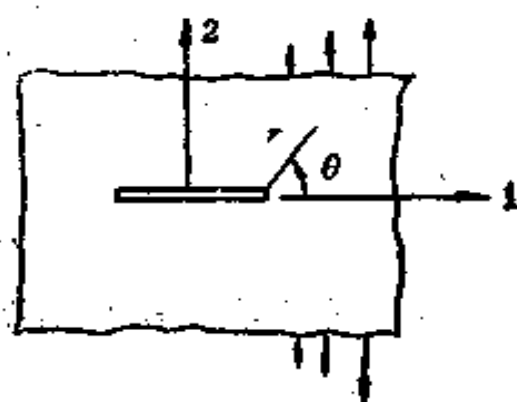


图 1.2 I 型情况

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^I(\theta) \quad (1.4)$$

$$u_\alpha = u_\alpha^0 + \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tilde{u}_\alpha^I(\theta, \kappa) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{22}|_{\theta=0} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad v|_{\theta=\pi} = u_2|_{\theta=\pi} = K_I \frac{1+\kappa}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (1.6)$$

式中取  $\tilde{\sigma}_{11}^I(\theta=0)=1$ ,  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^I(\theta)$ ,  $\tilde{u}_\alpha^I(\theta)$  几乎在所有断裂力学的教科书中均可找到。注意到在裂纹前缘  $\theta=0$  处  $\sigma_{11}$  为 (1.6) 式, 则

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \sigma_{11} |_{\theta=0}] \quad (1.7)$$

称为应力强度因子 (I 型)。对于平面应力情况,  $\sigma_{33}=0$ ; 对于平面应变情况,  $\sigma_{33}=\nu(\sigma_{11}+\sigma_{22})$ 。



图 1.3 I 型情况

(ii) 平面应力和平面应变情况下对于裂纹平面的反对称场 (II 型, 图 1.3)

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{II}(\theta) \quad (1.8)$$

$$u_\alpha = u_\alpha^0 + \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tilde{u}_\alpha^{II}(\theta, \kappa) \quad (1.9)$$

$K_{II}$  为 II 型应力强度因子。其中取  $\tilde{\sigma}_{11}^{II}(\theta=0) \equiv 1$ , ( $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ ,  $\theta=0$  时)。

(iii) 反平面剪切 (III 型, 图 1.4)

用和弹性理论扭转问题相仿的解法, 求得:

$$\sigma_{3\alpha} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\tau}_{\alpha}^{III}(\theta) \quad (1.10)$$

$$u_3 = 2 \frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.11)$$

$K_{III}$  为 III 型应力强度因子。其中,

$$\tilde{\tau}_1 = -\sin \frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\tau}_2 = \cos \frac{\theta}{2}.$$

由 (1.4), (1.8), (1.10)

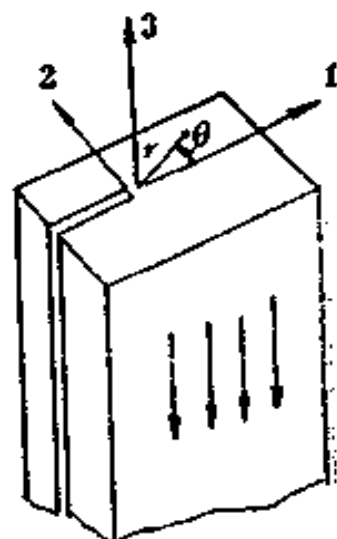


图 1.4 III 型情况

式可知：应力分布表达式中，应力分量与 $\sqrt{r}$ 成反比，称具有 $r^{-1/2}$ 阶的奇异性。距离裂纹尖端愈近，应力愈大；对应于I、II、III型的函数 $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^I(\theta)$ ， $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{II}(\theta)$ ， $\tilde{\tau}_z(\theta)$ 称为角分布函数，它仅和极角 $\theta$ 有关。

上述各式中， $K_I$ ， $K_{II}$ ， $K_{III}$ 是与坐标 $(r, \theta)$ 无关的。在裂纹尖端附近的区域内，应力分量、位移分量均与应力强度因子 $K_I$ ， $K_{II}$ ， $K_{III}$ 成正比，所以应力强度因子是裂纹尖端附近应力、位移场强度的表征，它是控制裂纹尖端应力场强度的参数；当 $K$ 增大，则裂纹尖端附近各点的应力、位移分量成比例地增大。

在裂纹尖端附近，不同形状的物体，不同受载的情况，应力场分布的解的结构相同；即与应力强度因子成正比，与 $\sqrt{r}$ 成反比，与角分布函数成正比。所以，即使物体形状不同，如果 $K$ 值相同，则裂纹尖端附近的应力场完全相同。

由于复应力函数和应力场、位移场的表达式中，仅保留占优的主项，所以这些式子都是近似式，然而在 $r \ll a$ （ $a$ 为裂纹长度）的范围内，占优主项的表达式有良好的精确度。

一般情况下，在任意平面问题中，裂纹尖端的奇异场是I型和II型结果的线性叠加；而对于三维的裂纹问题，在沿裂纹边界任意点的奇异场，是I、II型和III型问题的线性叠加。

线弹性断裂力学提供了求解应力强度因子的多种方法。对具体的结构形式、受载情形、边界约束条件等，用弹性力学的方法，可确定由(1.4) (1.8) (1.10)式所描写的应力场、位移场的比例系数——应力强度因子。

确定应力强度因子的方法,有解析的方法(见文〔4〕、〔8〕所述);诸如应用复变函数理论的方法,应用积分变换的方法,应用弹性力学守恒律的方法,及复变-变分方法〔40〕等等。有数值的方法:如有限单元法,边界配位法,边界积分方程法。有实验的方法:如光弹性的方法,焦散线的方法,以及下文将要提到的柔度标定的方法等等。

计算分析的结果表明:应力强度因子与外载荷、含裂纹物体的几何形状有关,在边界力的主矢量与主矩不为零时还和材料的泊松系数有关。一大批应力强度因子的结果已汇编成应力强度因子手册(见文〔9〕—〔13〕)可供使用者查阅。下面给出一些常见的例子。

承受拉伸的无限平面内的有限长裂纹(图1.5)

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (1.12)$$

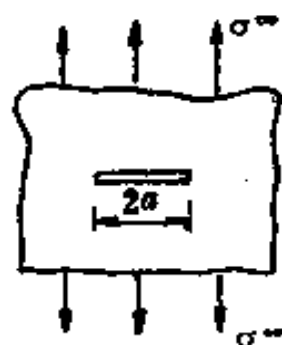


图 1.5

承受剪切的无限平面内的有限长裂纹(图1.6)

$$K_{II} = \tau^\infty \sqrt{\pi a} \quad (1.13)$$

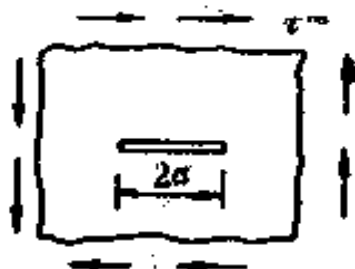


图 1.6

Ⅲ型情况下无限体内的有限长裂纹和半空间内的边裂纹(图



1.7)

$$K_{II} = \tau^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

(1.14)

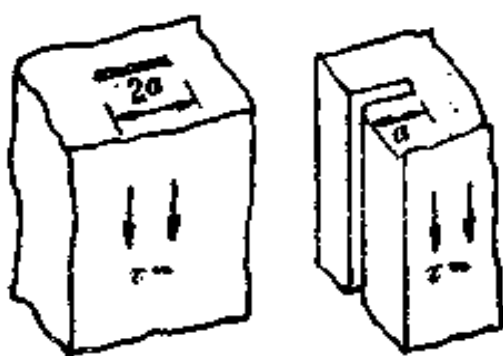


图 1.7

承受拉伸的半平面内的边裂纹 (图1.8)

$$K_I = 1.122 \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (1.15)$$

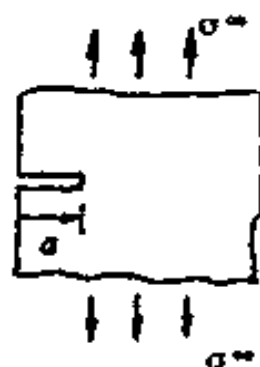


图 1.8

承受拉伸的无限平面内的周期裂纹 (图1.9)

$$K_I = \sigma^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

$$\times \left[ \frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \right]^{1/2} \quad (1.16)$$

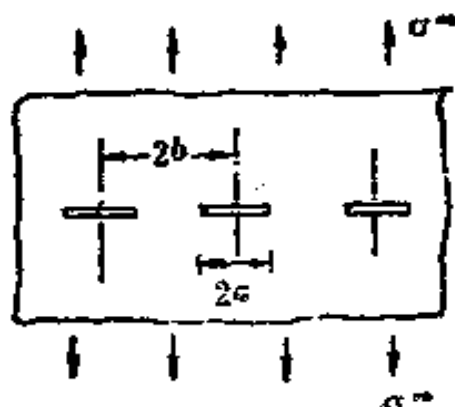


图 1.9

Ⅲ型有限宽含裂纹板条 (图1.10)

$$K_{II} = \tau^{\infty} \sqrt{\pi a} \left[ \frac{2b}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \right]^{1/2} \quad (1.17)$$

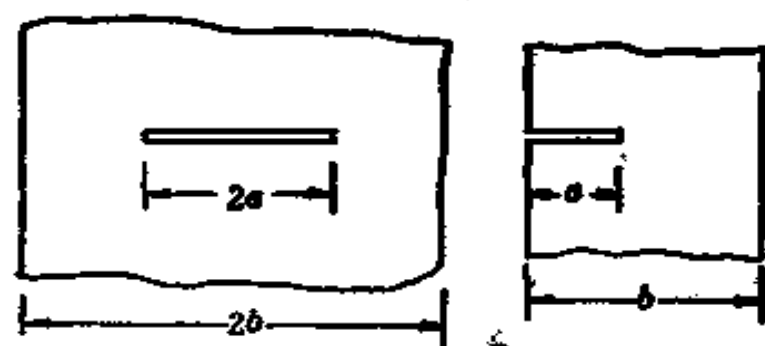


图 1.10

对于常用的标准试件，应力强度因子的标定公式如下：

图1.11示紧凑拉伸试件，按〔21〕， $P$ 为单位厚度的外力。若记 $P_1$ 为总外力， $B$ 为厚度， $P = P_1/B$ 。

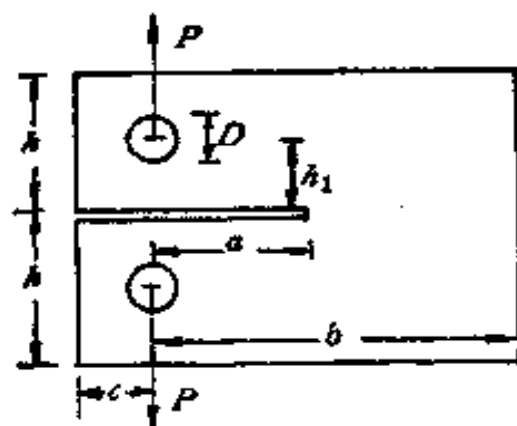


图 1.11 紧凑拉伸试件

$$K_I = \frac{P_1}{Bb^{1/2}} f_1 \left( \frac{a}{b} \right) = \frac{Pa^{1/2}}{b} F_1 \left( \frac{a}{b} \right) \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } f_1 \left( \frac{a}{b} \right) &= 29.6 \left( \frac{a}{b} \right)^{1/2} - 185.5 \left( \frac{a}{b} \right)^{3/2} \\ &+ 655.7 \left( \frac{a}{b} \right)^{5/2} - 1017 \left( \frac{a}{b} \right)^{7/2} + 638.9 \left( \frac{a}{b} \right)^{9/2} \end{aligned}$$

按〔21〕及美国材料试验学会标准〔20〕, (1.18)已取

$$h = 0.6b, \quad h_1 = 0.275b, \quad D = 0.25b$$

$$c = 0.25b, \quad B = b/2$$

则记  $F_1(a/b) = f_1(a/b) \sqrt{b/a}$ , 由文〔9〕作  $F_1(a/b)$  图如图1.12所示。

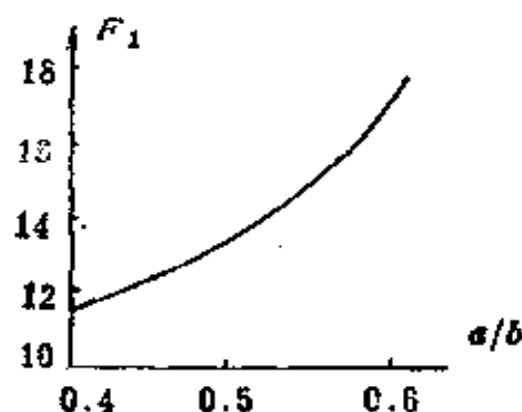


图 1.12  $F_1$ 与 $(a/b)$ 关系

对图1.13所示承受纯弯曲的含有边裂纹的有限宽板条,  $M$ 为每单位厚度的弯矩, 且  $\sigma = 6M/c^2$ , 则



图 1.13 纯弯曲试件

$$K_I = Mc^{-3/2} f(a/c) \quad (1.19)$$

$$(a/c \rightarrow \infty, f \rightarrow 3.98; a/c \rightarrow 0, K_I \rightarrow 1.122\sigma \sqrt{\pi a})$$

对于常用的三点弯曲试件〔21〕(图1.14),  $P$ 为单位厚度外载荷, 则

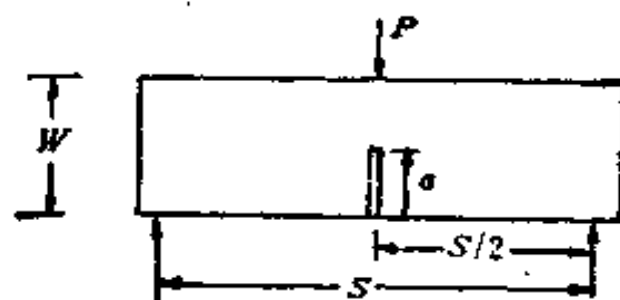


图 1.14 三点弯曲试件

$$K_I = \frac{PS}{W^{3/2}} f_2(a/W) \quad (1.20)$$

其中  $f_2(a/W) = [1.88 + 0.75(a/W - 0.5)^2] \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \cdot$

$$\sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}$$

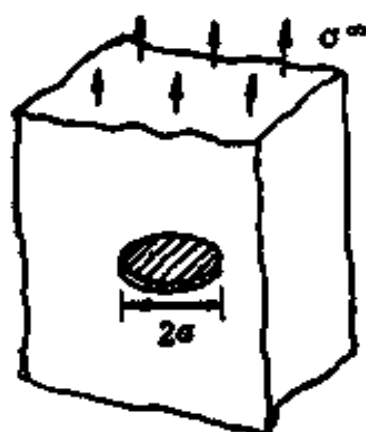


图 1.15 圆片状深埋裂纹

图1.15所示的圆盘形片状裂纹，裂纹尖端附近的应力场与 I 型的平面应变情形相同，则

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (1.21)$$

总之，在脆断问题中，裂纹尖端附近存在由应力强度因子  $K$  控制的  $K$  主导区，如图1.16所示。

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\theta) \quad (1.22)$$

上式表示  $K$  主导区内的应力分量。在裂纹尖端存在  $R_0$  表示的非弹性区（包括过程区），在该区域内发生的情况受应力强度因子  $K$  的制约。而外加应力、裂纹体几何形状，仅通过应力强度因子  $K$  值来影响  $K$  主导区的应力场。

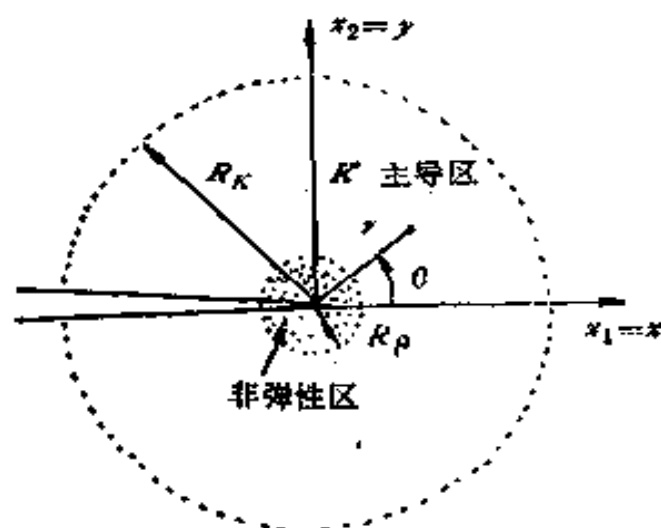


图 1.16  $K$  主导区示意图

## § 2 能 量 释 放 率

线弹性断裂力学中，一般从两个角度分析含裂纹物体的力学性能。一种方法是分析含裂纹物体的裂纹尖端的应力应变场；另一种是从能量的观点考察裂纹扩展过程中物体能量的变化。第一种分析方法得到表征裂纹尖端应力应变场强度的特征参数——应力强度因子 $K$ ；第二种方法如同本节所要介绍的，得到表征裂纹扩展的能量变化的参数——能量释放率 $\mathcal{G}$ 。它们两者之间存在简单的关系。

首先考察图 2.1 所示的给定载荷的试验系统，讨论 I 型受力的情形。记  $a$  为裂纹长度， $P$  为单位厚度的外载荷。 $\Pi$  为单位厚度的系统的位能。 $\Delta$  为加载点的位移。 $\mathcal{G}$  为单位厚度的能量释放率；

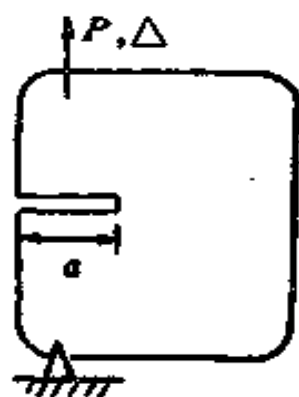


图 2.1 给定载荷的试验系统

$$\mathcal{G} = - \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial a} \right]_P \quad (2.1)$$

则对于给定  $P$  的情况

$$\Pi = U - P\Delta = \frac{1}{2} P\Delta - P\Delta = - \frac{1}{2} P\Delta$$

式中  $U$  为系统（每单位厚度）的应变能。

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} (P\Delta) \Big|_P = \frac{P}{2} \left[ \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right]_P \quad (2.2)$$

定义物体的柔度  $C$

$$C = \Delta / P \quad (2.3)$$

$C$  值仅与物体的几何形状、 $E$  和  $\nu$  有关。

$$\left[ \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right]_r = P \frac{dC}{da},$$

故 
$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} P^2 \frac{dC}{da} \quad (2.4)$$

推导过程可参看图 2.2 的  $P-\Delta$  图。

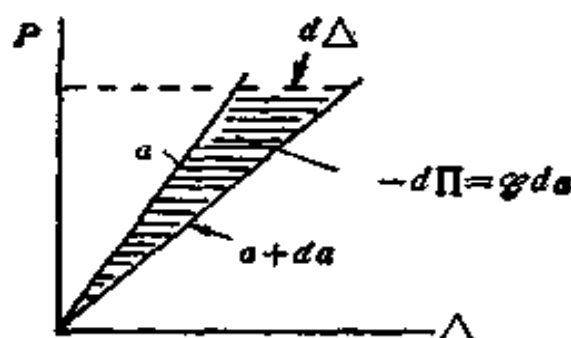


图 2.2  $P-\Delta$  图

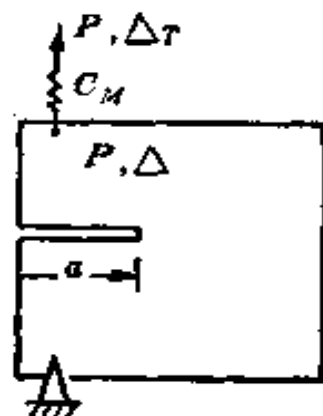


图 2.3 柔性加载条件下的试验系统

现研究图 2.3 所示的裂纹体 (I 型)，在图示的柔性条件下加载， $C_M$  表示物体体系中弹簧 (试验机) 柔度， $\Delta_T$  是全位移，把它看成是预先给定的。则

$$\Delta_T = \Delta + C_M P = \Delta + \left( \frac{C_M}{C} \right) \Delta \quad (2.5)$$

位能表示为：( $U$  表示含裂纹物体的变形能)

$$\Pi = U + \frac{1}{2} C_M P^2 = \frac{1}{2} C^{-1} \Delta^2 + \frac{1}{2} C_M^{-1} (\Delta_T - \Delta)^2$$

能量释放率为：

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = - \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial a} \right]_{\Delta_T} &= - [C^{-1} \Delta - C_M^{-1} (\Delta_T - \Delta)] \cdot \\ &\cdot \left( \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_{\Delta_T} + \frac{1}{2} C^{-2} \Delta^2 \frac{dC}{da} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} C^{-2} \Delta^2 \frac{dC}{da} = \frac{1}{2} P^2 \frac{dC}{da} \quad (2.6)$$

可见能量释放率与加载系统的性质（刚性）无关。 $C_M \rightarrow \infty$  时对应于给定载荷的情形； $C_M = 0$  对应于给定位移的情形，即相当于刚性试验机的情况。式(2.6)常常用于实验标定能量释放率，通过实验测定两个除裂纹长有微小差别而其它条件完全相同的试件的柔度，则可确定  $dC/da$ ，代入(2.6)式，即可求得能量释放率 $\mathcal{G}$ 。

能量释放率 $\mathcal{G}$ 和应力强度因子 $K$ 初看起来，似乎是两个不同的物理量。但是实际上，它们两者之间存在着简单的关系。对于I型受载情形，现在来推导这一关系。设讨论的是给定位移的情况（如前所指出， $\mathcal{G}$ 与加载条件无关），计算裂纹少量的虚拟扩展 $\Delta a$ 时的能量释放。如图2.4所示，裂纹在扩展前， $y = 0$ 平面的应力 $\sigma_{22}(x, 0)$ 为

$$\sigma_{22}(x, 0) = \frac{K_I(a)}{\sqrt{2\pi x}} \quad 0 < x \leq \Delta a \quad (2.7)$$

$K_I(a)$ 表示给定位移条件下裂纹长为 $a$ 时的应力强度因子。由于裂纹扩展 $\Delta a$ ，能量释放了 $\mathcal{G} \Delta a$ ，此时保持力作负功，则有

$$\mathcal{G} \Delta a = \frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \sigma_{22}(x, 0) [v(x, 0^+) - v(x, 0^-)] dx$$

其中 $[v(x, 0^+) - v(x, 0^-)]$ 是当裂纹长是 $a + \Delta a$ 时裂纹面最终位置之间的距离。如图2.4所示，由(1.6)式（或由任何一本线弹性断裂力学的教科书），对于足够小的 $\Delta a$ ，有

$$v(x, 0^+) - v(x, 0^-) = K_I(a + \Delta a) \frac{(1 + \kappa)}{G} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2\pi}}$$

式中 $K_I(a + \Delta a)$ 是 $K$ 的最终经过扩展 $\Delta a$ 后的值。

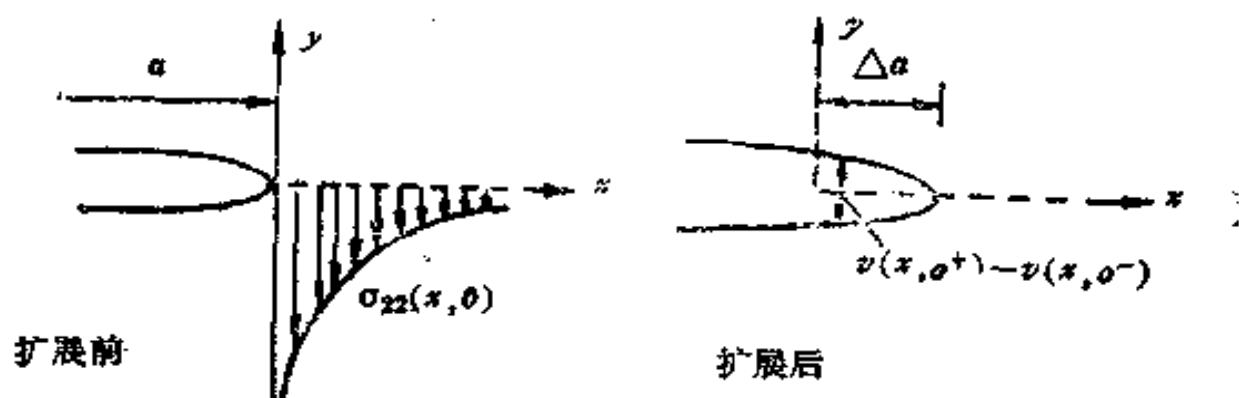


图 2.4

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \Delta a &= \frac{1+\kappa}{4\pi G} K_I(a) K_I(a+\Delta a) \int_0^{\Delta a} \sqrt{\frac{\Delta a-x}{x}} dx \\ &= \frac{1+\kappa}{8G} K_I(a) K_I(a+\Delta a) \Delta a \end{aligned}$$

因此  $\mathcal{G} = (1+\kappa) K_I^2/8G$ 。代入  $\kappa$  的表示式则

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 \quad (\text{平面应变}) \\ &= K_I^2/E \quad (\text{平面应力}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

对于三维的物体，当裂纹尖端区域的应力强度因子为  $K_I$ 、 $K_{II}$ 、 $K_{III}$  时，若假设裂纹在裂纹延伸面上作虚拟扩展（实际情形非必如此），则仿照上面关于能量释放率的计算，可写出

$$\mathcal{G} = \frac{1-\nu^2}{2E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (2.9)$$

现在讨论几个关于计算能量释放率的算例：

第一个例子考虑图 2.5 所示的双悬臂梁试件（DCB 试件）。由材料力学知：

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{4Pa^3}{Eb^3}, \quad C = -\frac{8}{E} \left( \frac{a}{b} \right)^3$$



代入 (2.6), (2.8) 式,  
对于平面应力情形

$$\mathcal{G} = \frac{12P^2a^2}{Eb^3}$$

$$K_I = 2\sqrt{3} Pab^{-3/2} \quad (2.10)$$

第二个例子如图 2.6 所

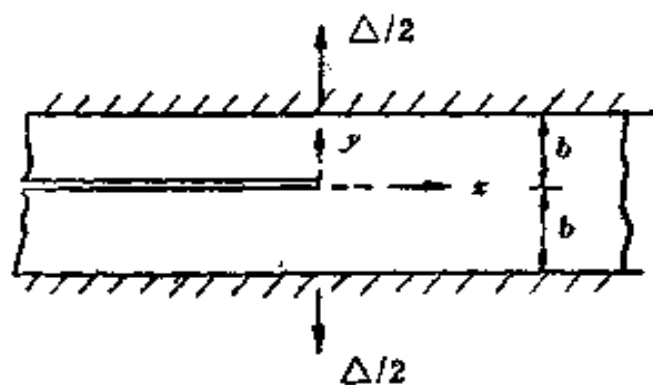


图 2.6

示, 讨论含有半无限裂纹的无限板条, 两端通过刚性夹头以给定位移  $\Delta$  加载, 板条在无外载的状态下固定。所以当  $|x| \rightarrow \infty$  时,  $\varepsilon_{xx} = 0$ , 让裂纹扩展  $da$ , 则如果将坐标原点沿  $x$  轴正方向移动  $da$ , 则应力和应变场相对于  $x, y$  轴没有改变。将  $x \rightarrow +\infty$  处的应变能密度记为  $\Sigma^\infty$ , 而  $x \rightarrow -\infty$  处应变能密度为零。单位厚度释放的应变能为  $\Sigma^\infty 2b da$ , 因为  $d\Pi = dU$ , 故

$$\mathcal{G} = 2b\Sigma^\infty \quad (2.11)$$

例如对于平面应力, 当  $x \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_{xx} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \Delta/2b$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\Delta}{2b}, \quad \sigma_{xx} = \nu\sigma_{yy}$$

且 
$$\Sigma^\infty = \frac{1}{2} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy})$$

$$= \frac{1}{2} [E/(1-\nu^2)] (\Delta/2b)^2$$

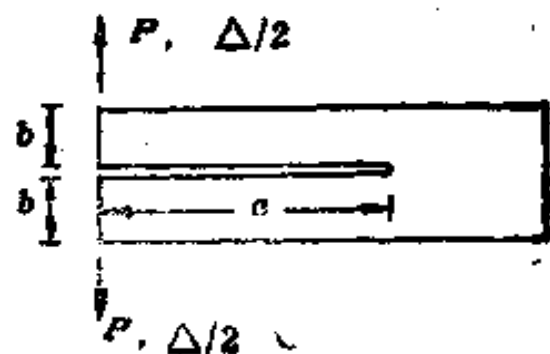


图 2.5 双悬臂梁试件

示, 讨论含有半无限裂纹的无限板条, 两端通过刚性夹头以给定位移  $\Delta$  加载, 板条在无外载的状态下固定。所以当  $|x| \rightarrow \infty$  时,  $\varepsilon_{xx} = 0$ , 让裂纹扩展  $da$ , 则如果将坐标原点沿  $x$  轴正方向移动  $da$ , 则应力和应变场相对于  $x, y$  轴没有改变。将  $x \rightarrow +\infty$  处的应变能密度记为  $\Sigma^\infty$ , 而  $x \rightarrow -\infty$  处应变能密度为零。单位厚度释放的应变能为  $\Sigma^\infty 2b da$ , 因为  $d\Pi = dU$ , 故

由 (2.11), (2.8) 式

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\Delta^2}{b} \quad (2.12)$$

$$K_I = \frac{1}{2\sqrt{1-\nu^2}} \frac{E\Delta}{\sqrt{b}}$$

这是精确的结果, 注意到一般的表达式 (2.11) 式对于非线性弹性固体也适用。

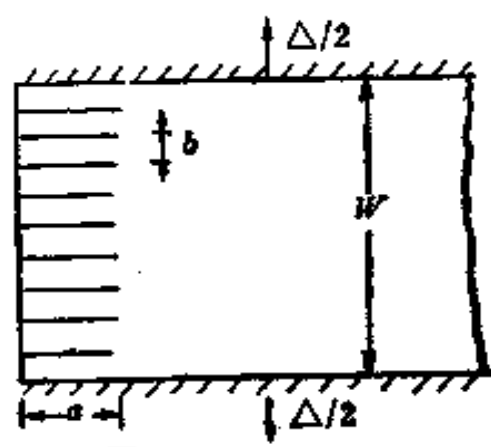


图 2.7

最后一个例子是讨论图 2.7 所示的裂纹群的应力释放。设  $b/a \ll 1$ , 裂纹一起扩展, 对于平面应力, 利用 (2.12) 式可得

$$\mathcal{G} = \frac{Eb(\epsilon_{yy}^\infty)^2}{2(1-\nu^2)} \quad (2.13)$$

$$K = \frac{E\sqrt{b}\epsilon_{yy}^\infty}{\sqrt{2(1-\nu^2)}}$$

式中  $\epsilon_{yy}^\infty = \Delta/W$ , 为裂纹前方远处的应变,  $\mathcal{G}$  为每个裂纹尖端的能量释放率, 它与裂纹长度无关。

Bueckner<sup>[18]</sup> 讨论了含裂纹物体在一般情况下能量释放率的计算公式。对于含裂纹面积为  $A$  的物体, 在外载荷的作用下 (包括给定位移的边界条件), 其总位能为  $\Pi$ , 应力为  $\sigma_{ij}$ , 位移为  $u_i$ , 若裂纹面积增加了  $\Delta A$ , 其它条件保持不变。这时, 相应的总位能为  $\Pi^*$ , 应力为  $\sigma_{ij}^*$ , 位移为  $u_i^*$ , 给定力的边界上的张力矢量的分量为  $T_1, T_2, T_3$ , 则可证得:

(记  $T_1 = T_x, T_2 = T_y, T_3 = T_z, u_1^* = u^*, u_2^* = v^*, u_3^* = w^*$ )

$$\Delta \Pi = \Pi^* - \Pi = -\frac{1}{2} \int_{\Delta A} (T_i u_i^* + T_i v_i^* + T_i w_i^*) dA \quad (2.14)$$

它的证明过程如下 (记  $X_i$  为体积力分量) :

由平衡方程  $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$

在裂纹未扩展前, 物体总位能为:

$$\Pi = \iiint_V \Sigma dV - \iiint_V X_i u_i dV - \iint_{S_T} T_i u_i dS$$

$V$  为物体体积,  $\Sigma$  是应变能密度,  $S_T$  为给定载荷的边界。  
若边界条件保持不变, 裂纹扩展时裂纹面积增加了  $\Delta A$ , 此时总位能  $\Pi^*$  为

$$\Pi^* = \iiint_V \Sigma^* dV - \iiint_V X_i u_i^* dV - \iint_{S_T} T_i u_i^* dS$$

于是有

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \Pi^* - \Pi \\ &= \iiint_V (\Sigma^* - \Sigma) dV - \iiint_V X_i (u_i^* - u_i) dV \\ &\quad - \iint_{S_T} T_i (u_i^* - u_i) dS \end{aligned} \quad (2.15)$$

注意到, 在线弹性情形下, 应变能密度

$$\Sigma = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \Sigma^* = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*$$

由互易定理

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}$$

$$\text{故有} \quad \Sigma^* - \Sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij})$$

$$= \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}) (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) \quad (2.16)$$

由几何关系,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ,

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$$

由于  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , 用高斯定理, 并注意到平衡方程, 得

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij}^* dV \\ &= \iint_{S^*} (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}) u_i^* n_j dS + \iiint_V 2 X_i u_i^* dV \end{aligned} \quad (2.17)$$

同理

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}) \varepsilon_{ij} dV \\ &= \iint_S (\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}) u_i n_j dS + \iiint_V 2 X_i u_i dV \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中  $S^* = S + \Delta A$ , 而  $S = S_T \cup S_u$ ,  $\phi = S_T \cap S_u$ .

将式 (2.17) (2.18) 代入 (2.16) 式, 并注意到

$$\begin{aligned} & \text{在 } S_u \text{ 上} & u_i^* &= u_i \\ & \text{在 } S_T \text{ 上} & \sigma_{ij}^* n_j &= \sigma_{ij} n_j = T_i \\ & \text{在 } \Delta A \text{ 上} & \sigma_{ij}^* n_j &= 0 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \iiint_V (\Sigma^* - \Sigma) dV &= \iint_{S_T} T_i (u_i^* - u_i) dS + \frac{1}{2} \iint_{\Delta A} T_i u_i^* dS \\ &+ \iiint_V X_i (u_i^* - u_i) dV \end{aligned} \quad (2.19)$$

比较 (2.15) 与 (2.19) 两式, 得

$$\Delta \Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Delta A} T_i u_i^* dS \quad (2.20)$$

由于  $\mathcal{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ ，则上式可写成

$$\mathcal{G} = -\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta A} \iint_{\Delta A} T_i u_i^* dS \quad (2.21)$$

此即一般情形下计算能量释放率的公式，前述的 I 型情形下能量释放率的计算公式即是 (2.21) 式的特例。

### § 3 小范围屈服条件下的起裂

在断裂力学研究中，裂纹起裂条件——断裂准则的讨论始终是研究者关心的中心问题之一。线弹性断裂力学是建立在小范围屈服的限制基础上的。所谓小范围屈服是指裂纹尖端的塑性区尺寸比之裂纹长度或其它的特征几何长度小得多的情况，此时在 § 1 中所给出的弹性奇异场是围绕裂纹尖端附近环形区域的实际场的良好近似，该区是尺寸为  $R_K$  的  $K$  主导区。这是一个渐近的条件，它随着载荷的增加而被逐渐破坏。

图 3.1 画出了  $K$  场成立的区域。在小范围屈服的条件下，由于存在  $K$  主导区，应力强度因子  $K$  提供了近裂纹尖端应力、变形场的唯一的度量，而场与其它的因素无关。关于小范围屈服的研究，已经进行了许

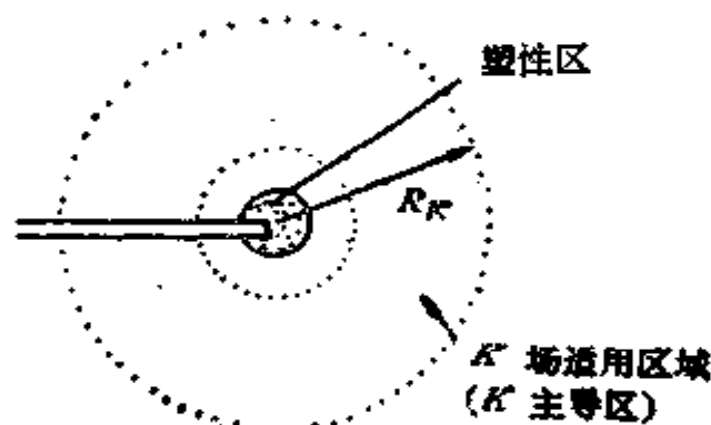


图 3.1  $K$  主导区

多理论分析与实验测量工作，粗略地说：当所加的外载低于全塑性屈服的载荷（即理想弹塑性固体的极限载荷）的大约一半时，小范围屈服仍是一个合适的假设。

今后我们将要涉及在各种条件下塑性区的尺寸。这里我们只通过图来表示在小范围屈服条件下塑性区尺寸和形状的最简单的近似。图 3.2 表示了 I 型裂纹三种条件下的情形。记

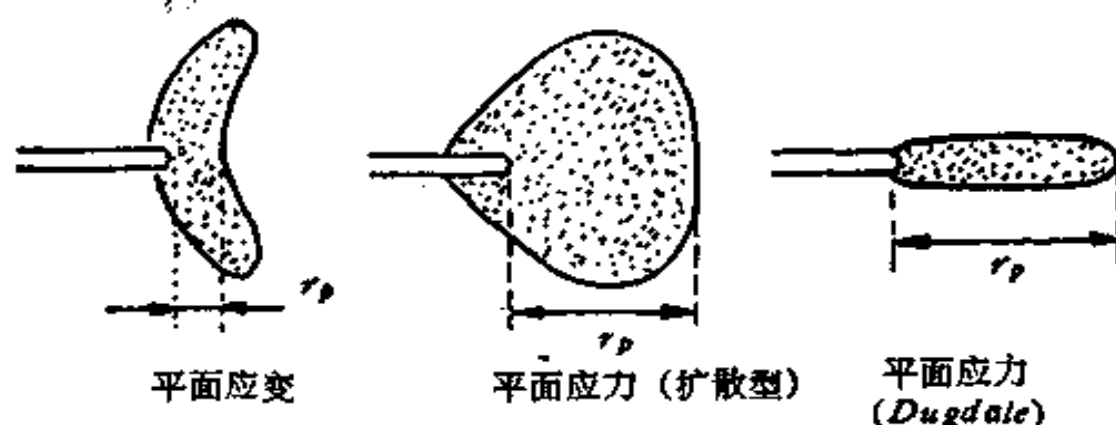


图 3.2 三种不同情况下的裂纹尖端塑性区

$t$  为厚度，对于平面应变的情形， $r_p \ll t$ ；而对于平面应力的情况， $r_p \gg t$ 。以  $\sigma_0$  表示拉伸屈服应力，则下列结果是常用的，例如见文〔9〕

$$r_p = \frac{1}{3\pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \quad \text{平面应变} \quad (3.1)$$

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \quad \text{平面应力(扩散型)} \quad (3.2)$$

$$r_p = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \quad \text{Dugdale 模型} \quad (3.3)$$

如以  $L$  表示最小特征长度（如裂纹长度或韧带尺寸），小范围屈服要求  $r_p \ll L$ 。

在讨论了小范围屈服的概念并给出相应的限制条件之后，现在来讨论在小范围屈服条件下裂纹的起裂问题。

先考察一“理想脆性”材料，当它增加新表面时，要求表面能  $T$ （每单位面积的表面能量），则裂纹扩展的必要条件（例如对于 I 型）是

$$\mathcal{G} \geq 2T$$

Griffith 提出断裂将在  $\mathcal{G}$  达到  $\mathcal{G}_c = 2T$  时发生，于是起裂的准则（以及对于理想脆性材料的连续的准静态扩展）可写成：

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_c \quad (3.4)$$

其中  $\mathcal{G}$  是外加的量，它与载荷和几何形状有关。另一方面， $\mathcal{G}_c$  是材料参数。(3.4) 式表示的起裂准则也可以从热力学第一定律的讨论中得到。下面讨论裂纹扩展时的能量平衡，记

$W$ —外力功

$E$ —系统的内能

$\Gamma$ —新增加材料表面所需的能量

$K$ —动能

$Q$ —向系统提供的热量

$A$  表示裂纹的面积， $\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$ ，则由能量平衡

$$\dot{W} + \dot{Q} = \dot{E} + \dot{K} + \dot{\Gamma} \quad (3.5)$$

当与外界无热交换时，则  $\dot{Q} = 0$ 。若考虑不计惯性效应的准静态裂纹扩展问题，并注意到  $\frac{\partial}{\partial t} = \dot{A} \frac{\partial}{\partial A}$ ，则

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial a} + \frac{\partial \Gamma}{\partial a}$$

若  $U$  是弹性部分的变形能，则对于弹性的情形， $E = U$ 。记系统的全位能  $\Pi = U - W$ ，则上式化为

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{\partial \Gamma}{\partial a} \quad (3.6)$$

由 Griffith 脆断准则, 因为能量释放率  $\mathscr{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ , 若记

$$\mathscr{G}_c = \frac{\partial \Gamma}{\partial a}, \text{ 则上式即是 (3.4) 式}$$

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_c$$

对给定边界位移的情形, 恒有  $\partial W / \partial a = 0$ , 则

$$\mathscr{G} = -\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial \Gamma}{\partial a} = \mathscr{G}_c$$

由 § 2 给出的能量释放率  $\mathscr{G}$  与应力强度因子  $K$  之间的关系 (2.8) 式, 则起裂条件 (3.4) 可写成

$$K = K_c \quad (3.7)$$

对于平面应变情形,  $K_c = [E\mathscr{G}_c / (1 - \nu^2)]^{1/2}$ ; 对于平面应力情形,  $K_c = [E\mathscr{G}_c]^{1/2}$ 。

Orowan<sup>[17]</sup> 和 Irwin<sup>[16]</sup> 主张 (3.4) 式还可以用于裂纹尖端存在小范围屈服的情形, 只要把  $\mathscr{G}_c$  理解为由形成新的表面、断裂过程和塑性变形的裂纹扩展单位面积的组合能。对于大多数金属材料, 按上述理解的  $\mathscr{G}_c$  比  $2T$  大好几个量级, 除非对温度很低而且是极脆的条件下是例外。但  $\mathscr{G}_c$  至今还不可能作为材料基本特性, 利用  $T$ ,  $E$ ,  $\sigma_0$ , 初始空洞距离等数据计算出来。Orowan 和 Irwin 提议  $\mathscr{G}_c$  可以通过 (3.4) 式用实验加以确定, 它需要在某几个试件中观察到起裂的载荷然后利用 (3.4) 式可以计算得到。

主要是由于 Irwin 的倡议, 能量释放率的起裂准则 (3.4) 式改变为基于应力强度因子的起裂准则 (3.7)。在小范围屈服条件下, 这两种方法在数学上是完全相当的。但是应力强



度因子的计算在许多情况下比能量释放率的计算要方便一些，而且应力强度因子的处理方法在大范围屈服的弹塑性断裂力学中曾经成功地作了推广，这将在下文中予以讨论。

为了讨论的方便，设对  $a/b = 1/2$  的紧凑拉伸试件应用 (1.18) 式，由于  $F_1 \approx 13.5$

$$K_1 \approx 6.75P/\sqrt{a} \quad (3.8)$$

上式中取  $P$  为单位厚度的拉伸载荷，设塑性区尺寸  $r_p$  满足小范围屈服条件，即  $r_p \ll a$ 。对于给定的厚度  $B$ ，对应于裂纹扩展的载荷  $P_c$  已测得，按 (3.8) 式中取  $P = P_c$  则可计算得  $K_c$ 。在同一试验温度下， $K_c$  与厚度  $B$  的关系曲线如图 3.3 所示。

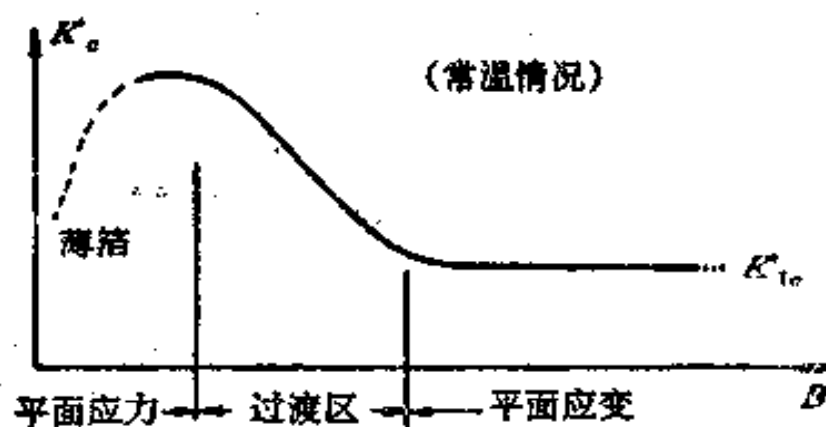


图 3.3  $K_c$  与厚度  $B$  关系曲线

除了对于很薄的箔片之外，对于任意给定的温度，对于厚试件  $K_c$  存在一稳定的低值。在试件内部，沿裂纹面前缘的大部分区域均满足平面应变的条件时（对于足够大的厚度）， $K_c$  趋近于渐近值  $K_{Ic}$ ，称它为平面应变断裂韧度。断裂韧度是材料的性质，它表征在 I 型的平面应变条件下锐裂纹（它可在低  $K_I$  值水平下由疲劳的方法形成）的起裂。许多重要的细节可参阅“ $K_{Ic}$  的试验标准”，见文 [19, 20, 21]。

回过头来讨论塑性区尺寸 (3.1) 式，平面应变条件要求

$B \gg r_p$ , 由  $K_{Ic}$  试验标准[21]要求

$$B \geq 2.5 (K_{Ic}/\sigma_0)^2 \quad (3.9)$$

对于小范围屈服条件, 同时要求  $a \gg r_p$ :

$$\Rightarrow a \geq 2.5 (K_{Ic}/\sigma_0)^2 \quad (3.10)$$

这一要求对于小范围屈服来说, 一般已足够了。例如, 对于紧凑拉伸试件, 应力强度因子计算式见 (3.8), 对于理想弹塑性材料, 设  $a/b = 1/2$ , 试件的极限载荷  $P_L = \sigma_0 a/6$ , 如果试件设计使得起裂载荷  $P_c = (1/2)P_L$ , 则由 (3.8) 式可得

$$a = 3.16 (K_{Ic}/\sigma_0)^2 \quad (3.11)$$

可见小范围屈服的条件得以满足。

对于许多金属材料说来, 断裂韧度与温度有关。图 3.4 表

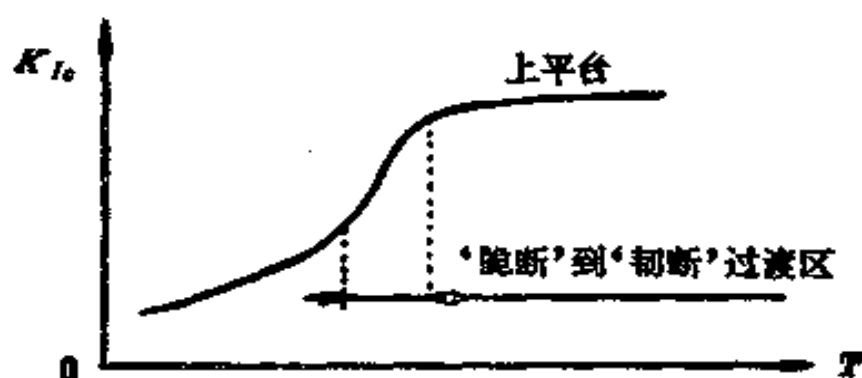


图 3.4  $K_{Ic}$  与温度  $T$  的关系

示  $K_{Ic}$  与温度  $T$  的典型的简图。现在已经有大量的  $K_{Ic}$  数据可资利用, 例如文[22,23]和[24,25], 为了讨论的目的, 将几种金属的按 (3.1) 式 (令  $K = K_{Ic}$ ) 计算的塑性区尺寸  $r_p$  值列于表 3-1。表中还列出了当远场所施加的应力为屈服应力

之半, 即  $\sigma^\infty = \frac{1}{2} \sigma_0$  时, 按 (1.12) 式计算的在无限平面内

有限长裂纹情况下起裂的裂纹长度  $L = 2a$ 。由 (3.1) 式

$$L = \frac{8}{\pi} \left[ \frac{K_{Ic}}{\sigma_0} \right]^2 = 24 r_p \quad (3.12)$$

注意  $L$  实质上与紧凑拉伸试样中保证  $K_{Ic}$  有效性的裂纹长度条件 (3.10) 式是基本相同的。

表 3-1

序号	材 料	$\sigma_0$ kg/mm <sup>2</sup>	$K_{Ic}$ kg/mm <sup>3/2</sup>	$r_p$ mm	$L$ mm
1	30SiMnWMoV 钢	160	273~310	0.29~0.38	7.0~8.9
2	Cr Ni Mo 钢	120	280~360	0.55~0.90	13.1~21.5
3	14 Mn Mo NiB 钢	85	530	3.9	93.6
4	钢轨钢	55	130~140	0.56~0.64	13.4~15.3
5	18 Mn Mo Ni Cr	50	890	31.7	767
6	球墨铸铁	~130	110~125	0.07~0.09	1.68~2.16
7	6061-T651(Al) 铝合金	25.5	106	5	120
8	7075-T651(Al) 铝合金	63	116	0.35	8.4
9	AISI-4340	153	106	0.05	1.2
10	A533-B *试验温度93℃	63	645	11	260

注：未注明者试验温度均为室温，序号 1—6 中  $\sigma_0$ 、 $K_{Ic}$  数据引自 [26]。

可见对高韧性低屈服应力的材料，断裂时其塑性区尺寸的值很大。而且在给定的相当于全面屈服的几分之一应力水平下要使裂纹起始扩展，则必须要求相当长的裂纹长度。而且还必须注意到平面应力条件下的  $K_{Ic}$  值常常比平面应变断裂韧度值  $K_{Ic}$  高出许多。因此对于高韧低强的材料，测量  $K_{Ic}$  是困难的，这也迫使人们去进一步研究弹塑性即非线性断裂力学，以探讨当材料不满足小范围屈服条件时如何正确地表征材料的断裂阻力。

## § 4 小范围屈服条件下的裂纹扩展

对于理想的脆性材料，预期裂纹起裂和连续扩展的条件

可写成  $K = K_c$ 。  $K_c$  为常数，在图 4.1(a) 上画出了裂纹扩展需要施加的  $K$  与裂纹扩展量  $\Delta a$  的关系图。对于处在平面

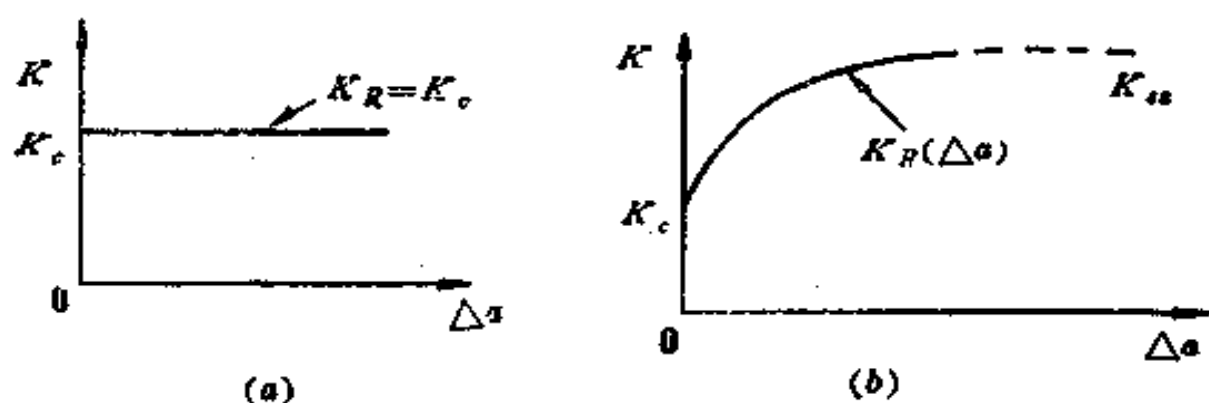


图 4.1  $K_R$  阻力曲线

应变条件下的高强低韧金属，作为第一次近似，这样的关系图是有典型性的。通过适当地选择试件的构形，在实验中是可能量测记录到如图 4.1(a) 所示的那种材料裂纹扩展的性

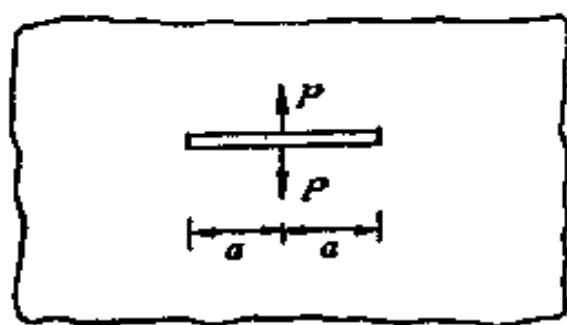


图 4.2

能的。例如图 4.2 所示含  $2a$  长裂纹的无限平面，在裂纹表面中点处施加一对集中力  $P$ ，可知当  $P$  固定时，随着裂纹长  $a$  增加，则应力强度因子减少：

$$K = P / \sqrt{\pi a} \quad (4.1)$$

起裂要求：  $P_c = K_c \sqrt{\pi a_0}$ 。那么要使  $K = K_c$ ，则当裂纹扩展  $\Delta a$ ，此时  $a = a_0 + \Delta a$ ，  $P$  应按下式增加

$$P = K_c \sqrt{\pi (a_0 + \Delta a)} = P_c \sqrt{1 + \Delta a / a_0} \quad (4.2)$$

$a_0$  为原始裂纹长度，  $P_c$  是起裂载荷。上面所讨论的是理想脆性材料，只要  $K = K_c$ ，则裂纹起裂并且一直扩展下去。材料抵

抗裂纹扩展的阻力 $K_c$ 与裂纹的扩展量无关。

但是对于在平面应力或平面应变条件下的中低强的金属材料，却具有如图4.1(b)所表示的性质。这一性质有时也可从平面应力条件下的高强金属材料的试验中发现。它说明在起裂之后，要使裂纹扩展需要增加应力强度因子 $K$ 。在小范围屈服的条件下（即 $r_p \ll a$ ），存在 $K$ 控制场。设 $\Delta a$ 比物体特征几何长度要小得多（ $\Delta a \ll a$ ），即扩展后仍存在 $K$ 控制场。在给定的温度，给定平面应力或平面应变的条件下， $K_R(\Delta a)$ 是材料的特征曲线，常称为阻力曲线或 $R$ 曲线。本书中 $K_c$ 为起裂时的应力强度因子。文[27,28]讨论了 $R$ 曲线的试验方法。有的书上用 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_R(\Delta a)$ 作为 $R$ 曲线。这里用 $K = K_R(\Delta a)$ 作为 $R$ 曲线表征的断裂准则。如图4.1(b)，随着 $\Delta a$ 的增加， $K$ 值上升。连续地增加 $K$ 值，则定常状态的裂纹扩展对应的应力强度因子 $K_{ss}$ 常常是起裂时 $K_c$ 的几倍。例如对于中、低强的钢材，小量的裂纹扩展（例如1 mm或2 mm）将导致 $K_R$ 值为平面应变断裂韧度值 $K_{Ic}$ 的两倍，这在下文还将讨论到。

对于裂纹连续扩展的条件，当即时裂纹长度为 $a_0 + \Delta a$ 时，此条件为

$$K = K_R(\Delta a) \quad (4.3)$$

上式左端的 $K$ 理解为外加的 $K$ ，这就是 $R$ 曲线的断裂准则。 $R$ 曲线要求：裂纹要扩展，则必需满足（4.3）式。而对于给定的温度， $K_R(\Delta a)$ 曲线是材料的裂纹扩展阻力的表征。由 $R$ 曲线断裂准则，当

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial a} \right]_L < \frac{dK_R}{d(\Delta a)} \quad (4.4)$$

裂纹是稳定的；而

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial a} \right]_L = \frac{dK_R}{d(\Delta a)} \quad (4.5)$$

对应于临界状态，失稳可能发生。上两式中左端下标  $L$  表示加载条件，例如可以是恒载荷（控制载荷）的，或是恒位移（控制位移）的，或是上述两者的某一中间情形。

现在讨论如何利用  $R$  阻力曲线来确定在加载条件  $L$  下失稳时的应力强度因子  $K^*$  值。因为  $R$  曲线实质上是当裂纹扩展时，其塑性区增长的结果，它表征着裂纹缓慢稳定扩展时材料的断裂阻力。它是在增长着的应力强度因子作用下裂纹稳定扩展时材料韧性发展的记录。由于把  $R$  曲线看成材料的特征，与裂纹的起始长度  $a_0$  无关，也与测定  $R$  曲线的试件形状无关，它只是裂纹扩展量  $\Delta a$  的函数，由图 4.3 来考察裂纹扩展如何由稳定向不稳定过渡。 $K(L_i, a)$  是在固定载荷参数  $L_i$  值条件下， $K$  作为  $a$  的函数，并画在图上。由于认为  $K_R(\Delta a)$  曲线与原始裂纹长度无关，所以在  $K \sim a$  图上，以

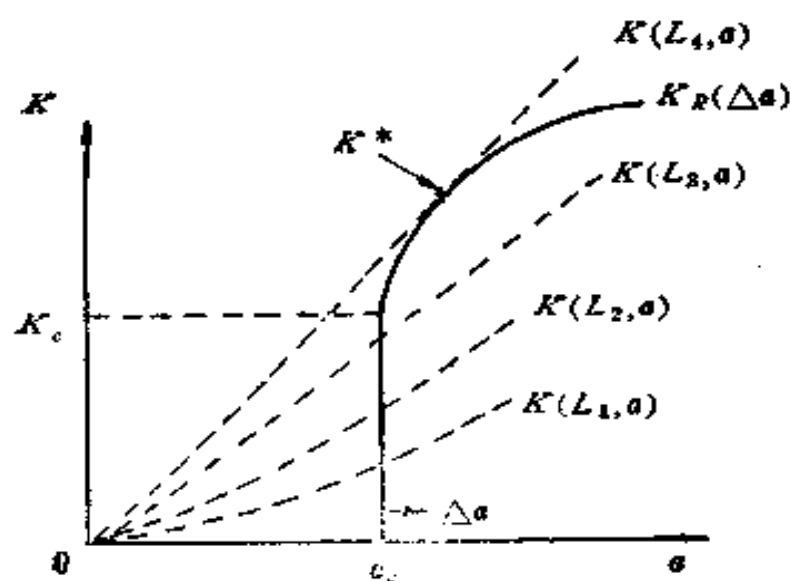


图 4.3 小范围屈服条件下裂纹扩展的稳定性分析

原始裂纹长  $a_0$  为起点，画出  $K_R(\Delta a)$  曲线。对于各个不同的载荷参数  $L_i$  ( $L_1 < L_2 < L_3 < L_4$ )，由临界条件 (4.5) 式，可确定图 4.3 中的临界值  $K^*$ 。它对应于  $L_4$ ，即相应  $R$  曲线上的最大载荷点。达到该点，试件就失稳

断裂。由图中可见，在恒载荷的条件下， $K(L_i, a)$  曲线如图中虚线所示，它与  $K_R(\Delta a)$  曲线的切点即是失稳点。一般在恒载的加载条件下，不可能出现达到定常扩展阻力曲线（定常扩展的  $K_{ss}$ ）段的情况。但也存在另一种情形，如图 4.4 所示，它相当于 (4.1)

式所示的情形，或恒位移条件的情形。由图可见， $\left(\frac{\partial K}{\partial a}\right)_L$  总是负值。因此，按条件 (4.4) 式，裂纹的扩展总是稳定的。

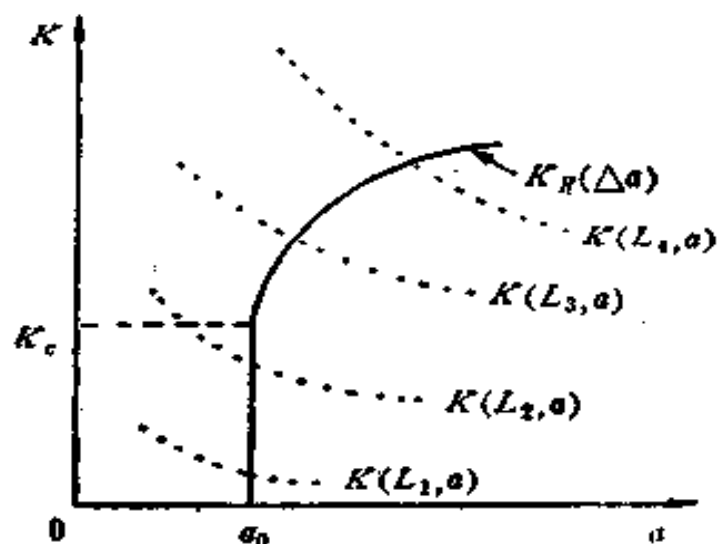


图 4.4 小范围屈服条件下裂纹扩展（恒位移条件）的稳定性分析

讨论图 2.3 所示的加载系统。以  $C_M$  表示试验机的柔度， $\Delta_T$  表示施力点的总位移， $\Delta$  为试件的位移， $P$  为每单位厚度施加的力。

$$\Delta_T = \Delta + \Delta_M$$

$\Delta_M$  表示试验机的位移。

$$\Delta = CP$$

$C$  为试件的柔度，与试件的裂纹长度  $a$  有关。

$$\Delta_M = C_M P$$

故  $\Delta_T = \Delta + C_M P = [C(a) + C_M] P$  (4.6)

由于  $P$  为单位厚度上所施加的载荷，试件厚度为  $t$ ，以  $\overline{C}_M$  表示试验机的总柔度，则

$$\Delta_M = \overline{C}_M P t, \quad C_M = \overline{C}_M t \quad (4.7)$$

应力强度因子一般可写为（其中  $f(a)$  量纲为 [长度] $^{-1/2}$ ）：

$$K = P f(a) \quad (4.8)$$

为进行裂纹扩展稳定性的分析, 如果使总位移为常数 (即:  $\Delta_T = \text{const}$ ,  $d\Delta_T = 0$ ) 的条件作为临界条件 (4.5) 中的载荷参数, 使

$$\left( \frac{\partial K}{\partial a} \right)_{\Delta_T = \text{const}} = \frac{dK_R(\Delta a)}{d\Delta a}$$

在  $\Delta_T = \text{const}$  条件下, 则载荷在扩展过程中是变化的, 它的变化规律由  $\Delta_T = \text{const}$  所规定。由于

$$\begin{aligned}\Delta_T &= [C(a) + C_M]P \\ d\Delta_T &= [C(a) + C_M]dP + C'(a)Pda = 0\end{aligned}$$

由上式可得:

$$dP = - \frac{C'(a)Pda}{[C(a) + C_M]} \quad (4.9)$$

而由 (4.8) 式, 并将上述 (4.9) 式代入

$$\begin{aligned}dK &= f(a)dP + f'(a)Pda \\ &= -f(a) \frac{C'(a)Pda}{[C(a) + C_M]} + f'(a)Pda\end{aligned}$$

所以

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial a} \right]_{\Delta_T} = -f(a) \frac{C'(a)P}{C(a) + C_M} + f'(a)P \quad (4.10)$$

对于呆重加载的情形 ( $C_M \rightarrow \infty$ ,  $P$  为常数)

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial a} \right]_{\Delta_T} = \left[ \frac{\partial K}{\partial a} \right]_P = Pf'(a) \quad (4.11)$$

对试件给定位移的刚性试验机的情形 ( $C_M = 0$ ,  $\Delta_T = \Delta$ )

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial K}{\partial a} \right]_{\Delta_T} &= \left[ \frac{\partial K}{\partial a} \right]_{\Delta} = -f \frac{C'P}{C} + f'P \\ &= PC \left[ \frac{f}{C} \right]'\end{aligned} \quad (4.12)$$



通常  $C' > 0$ , 故  $\left(\frac{\partial K}{\partial a}\right) < \left(\frac{\partial K}{\partial a}\right)_P$ 。现在讨论几个例子。

第一个例子讨论图 4.5 所示的双悬臂梁试件。由于

$$C(a) = \frac{8}{E} \left(\frac{a}{b}\right)^3,$$

$$f(a) = 2\sqrt{3} ab^{-3/2}$$

对恒载情形, 代入式

(4.11); 对恒位移情

形, 代入式 (4.12) 得

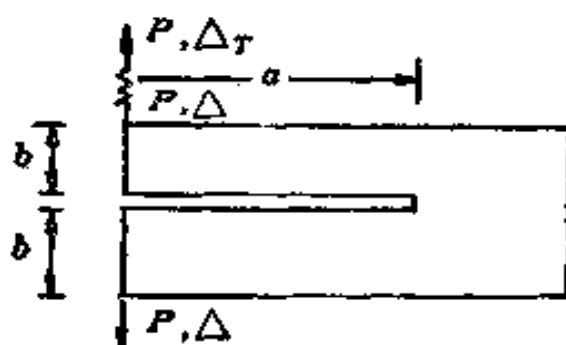


图 4.5 双悬臂梁试件

$$\left(\frac{\partial K}{\partial a}\right)_P = 2\sqrt{3} Pb^{-3/2} = K/a \quad (4.13)$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial a}\right)_\Delta = -4\sqrt{3} Pb^{-3/2} = -2K/a \quad (4.14)$$

若记  $K_R' = \partial K_R(a)/\partial a$ , 则由失稳条件 (4.5) 式

$$\text{对恒载情况} \quad K = aK_R' \quad (4.15)$$

而对于恒位移情况, 由于  $(\partial K/\partial a)_\Delta = -2K/a$ , 而  $K_R'$  不会是负的, 因为  $R$  曲线不会出现斜率为负的情形, 因此双悬臂梁试件在恒位移的情形下永远不会导致失稳扩展。而对于恒载的情况, 由 (4.15) 式, 裂纹可能变得不稳定, 但对于脆性材料,  $K_R' = 0$ , 则在恒载情况下, 裂纹一旦起裂便失去稳定。

对于标准的紧凑拉伸试件,  $\left(\frac{\partial K}{\partial a}\right)_{\Delta_T}$  可由数值计算的方法求得, 由 (4.10) 式

$$\left(\frac{\partial K}{\partial a}\right)_{\Delta_T} = Pf' - \frac{PfC'}{C(1 + C_M/C)}$$

$$\text{记 } f'(a) = \frac{d}{da} \left[ \frac{\sqrt{a}}{b} F_1(a/b) \right] = \frac{1}{\sqrt{a}} b g_1(a/b)$$

$$\text{且 } C(a) = \frac{1}{E'} V_2(a/b)$$

$$\frac{f(a)C'(a)}{C(a)} = \frac{1}{\sqrt{a}} b g_2(a/b)$$

式中  $a$ 、 $b$  的记号见图1.11, 其中  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $V_2$  见 Tada 等人的[9] (见该文第2.20页), 式中对平面应力, 取  $E' = E$ ; 对平面应变, 取  $E' = E/(1 - \nu^2)$ 。  $g_1$ ,  $g_2$  见表4.1 (自引[35])。

表 4-1

$a/b$	$g_1$	$g_2$	$(C_M/C)^* = \frac{g_2}{g_1} - 1$
0.3	6.0	16.6	1.77
0.4	11.6	21.6	0.86
0.5	20.2	33.7	0.67
0.6	41.7	60.2	0.44
0.7	93	132	0.42

所以有

$$\left( \frac{\partial K}{\partial a} \right)_{\Delta_T} = \frac{P}{\sqrt{a}} b \left[ g_1(a/b) - \frac{g_2(a/b)}{1 + C_M/C} \right] \quad (4.16)$$

对于刚性加载 ( $C_M = 0$ )

$$\left( \frac{\partial K}{\partial a} \right)_{\Delta} = \frac{P}{\sqrt{a}} b [g_1(a/b) - g_2(a/b)] < 0$$

即便材料为理想脆性时, 也不会出现失稳。对于恒载情形 ( $C_M \rightarrow \infty$ )

$$\left( \frac{\partial K}{\partial a} \right)_P = \frac{P}{\sqrt{a}} b g_1(a/b)$$

当  $\frac{P}{\sqrt{a}b} g_1\left(\frac{a}{b}\right) = K_R'$ , 开始失稳。对于理想脆性材料, 在一般柔性加载情况下, 由于  $K_R' = 0$ , 即  $\left(\frac{dK_R}{d(\Delta a)}\right) = 0$ , 由 (4.5), (4.6) 式, 开始失稳时

$$\frac{P}{\sqrt{a}b} \left[ g_1(a/b) - \frac{g_2(a/b)}{1 + C_M/C} \right] = K_R' = 0$$

$$\left( \frac{C_M}{C} \right)^* = \frac{g_2}{g_1} - 1$$

相对于裂纹尺寸而言, 大试件的  $C'/C$  是小量, 可以忽略。此时, 给定恒载与恒位移条件的差别甚微。例如再考察一无限体内, 含有长  $2a$  的有限裂纹。远场作用拉应力  $\sigma^\infty$ , 这是典型的裂纹问题,  $K = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$ 。当裂纹比之物体的尺寸很小时, 此时给定外载与给定位移就没有区别了。或者更确切地讲, 对当物体比裂纹尺寸大得多时,  $C'/C$  是很小的, 因此 (4.10) 式第一项可以略去, 则由失稳分析可知

$$\left[ \frac{\partial K}{\partial a} \right]_{\sigma^\infty} = \frac{\sigma^\infty}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2} \frac{K}{a}$$

则当裂纹扩展量为  $\Delta a$ ,  $K = K_R$  时, 稳定性条件 (4.4) 为

$$\frac{K}{2(a + \Delta a)} < K_R'$$

在起裂时, 若上式成立, 即

$$2a > \frac{K_c}{(K_R')_c} \quad (4.17)$$

则保证是稳定的。下标  $c$  表示起裂时的值。

对于许多相当脆的材料, 在通常典型的裂纹长度范围内, (4.17) 式不成立。如果  $(K_R')_c = 0$ , 则对所有的裂纹

长度，(4.17) 式皆失效。注意到该式的右端仅与材料性质有关。如果  $(K_R')_c > 0$ ，(4.17) 式说明长裂纹在起裂时是稳定的，而短裂纹是不稳定的。此时假设在全部长度范围内，小范围屈服条件皆成立。当然，由于  $K = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$ ，那么在同样的外加应力的条件下，较长的裂纹将比短的裂纹

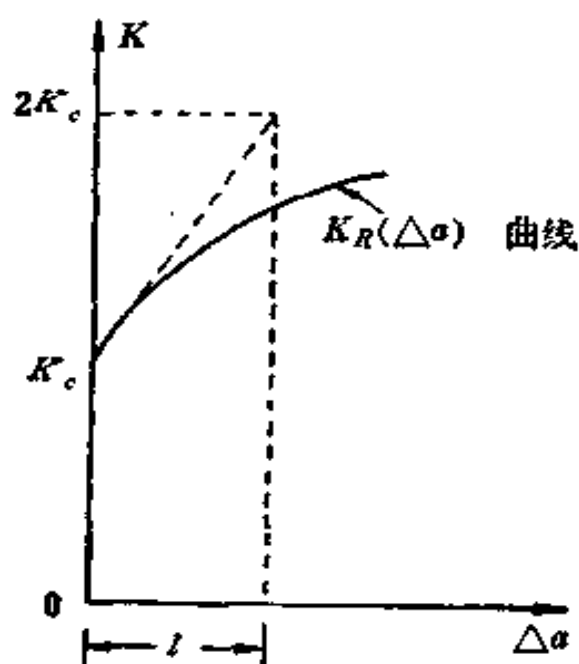


图 4.6  $K_R$  阻力曲线与  $l$

$l$  一般地是比厘米量级还要小的量。对于这样的金属，至少在小范围屈服的条件下，裂纹的起始扩展一般讲来是稳定的。

方程 (4.10) 指出了柔度  $C$ ， $C_M$  对于稳定性分析的重要性。在结束本节的讨论之前，再对常用的含有裂纹长  $a$  的有限体的柔度分析作一介绍。记  $C_{nc}$  为无裂纹时（即当  $a = 0$  时）该物体的柔度， $C(a)$  为存在裂纹时的全柔度。定义裂纹对于柔度的贡献  $C_{cr}(a)$ ：

$$C_{cr}(a) = C(a) - C_{nc} \quad (4.18)$$

考察图 4.5 所示长  $S$  高为  $b$  的纯弯梁试件，它受有单位厚度

开始扩展得早些。对于图 4.6 所示的  $R$  曲线，记  $l = K_c / (K_R')_c$  为相当于  $K_R = 2K_c$  时，用  $R$  曲线起始的斜率确定的扩展量，则由 (4.17) 式，如果裂纹全长  $2a$  大于材料的特征基长  $l$  时，则起始扩展的裂纹将是稳定的。对于脆性材料， $l$  值是很长的。但是对于在脆性-韧性转变温度之上的中强金属，

的弯矩  $M$ 。记  $\theta$  为加载点的转角， $\theta_{nc}$  为  $a = 0$  时的转角，当然有  $\theta_{cr} = \theta - \theta_{nc}$ ，

$$\theta_{nc} = MS/E'I, \quad C_{nc} = S/E'I \quad (4.19)$$



图 4.7 纯弯梁试件

式中  $I = b^3/12$ ，在平面应力时  $E' = E$ ，在平面应变时  $E' = E/(1 - \nu^2)$ 。对于  $S/b$  大于 2 至 3 时，(4.18) 式中  $C_{cr}(a)$  实际上与  $S$  无关。则对  $S \gg b$

$$C_{cr} = \frac{\theta_{cr}}{M} = f(a/b)/E'b^2 \quad (4.20)$$

$f(a/b)$  可查文〔9〕第 2.14 页。对于深裂纹试件，当  $c = b - a \ll b$  时

$$C_{cr} = 16/(E'c^2) \quad (4.21)$$

上式中  $C_{cr}$  仅与韧带宽度  $c$  有关。则由式 (4.18)，(4.19) 和 (4.20) 可以得到任意长度的试件的全柔度。只要  $S$  大约不小于  $3b$ ，则各种尺寸情形下的  $C_{cr}$  均可查文〔9〕，所得结果具有足够的精度。

(4.21) 式今后将还会用到，这里作简略的推导。由 (1.19) 式， $K_1 \approx 4M/c^{3/2}$ 。由 (2.6) 式，

$$\varphi = \frac{1}{2} M^2 \frac{dC}{da} = -\frac{1}{2} M^2 \frac{dC}{dc} = -\frac{1}{2} M^2 \frac{dC_{cr}}{dc}$$

由 (2.8) 式

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E'} K_I^2 = \frac{16M^2}{E'c^3} \quad (4.22)$$

故

$$\frac{dC_{cr}}{dc} = -\frac{32}{E'c^3}, \quad C_{cr} = \frac{16}{E'c^2} + \text{const}$$

当韧带尺寸  $c$  很大时,  $C_{cr} \rightarrow 0$ , 故上式常数为零。即得 (4.21) 式

$$C_{cr} = 16/(E'c^2)$$

## § 5 线弹性断裂力学的其它应用

以应力强度因子和能量释放率为基本物理量分析脆断现象的线弹性断裂力学, 在小范围屈服条件下, 即认为弹性解求得的  $K$  场是裂纹尖端周围的一定范围内实际应力变形场的良好近似。此时, 线弹性裂纹问题的应力强度因子常常用于描写和整理关于疲劳裂纹扩展、蠕变和应力腐蚀裂纹扩展的资料数据。这一节简单讨论关于疲劳裂纹扩展的问题。

讨论在小范围屈服条件下, 平面应变情况下 I 型裂纹的疲劳扩展问题。裂纹尖端在交变载荷下, 其应力强度因子的幅值记为  $\Delta K$ , 如图 5.1 所示。在交变载荷作用下, 裂纹尖端

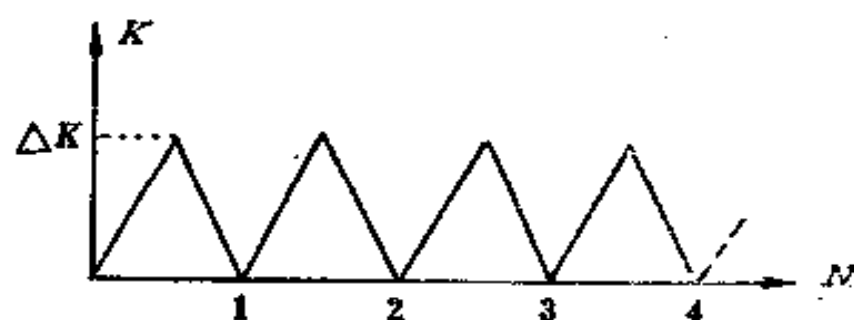


图 5.1 应力强度因子的变化历史

承受的应力强度因子的 $K$ 值范围 $0 \leq K \leq \Delta K$ ，每一循环的裂纹扩展速率记为 $da/dN$ 。试验量测了 $da/dN$ 随 $K$ 值变化的结果，画在图 5.2 上。在相同的温度下进行测量，许多材料的

测量结果读者可参阅文[22,23]。试验从 $\Delta K$ 只有 $K_{Ic}$ 的几分之一

(或几十分之一)开始，一直做到 $\Delta K \rightarrow K_{Ic}$ 为止。对于很低的 $\Delta K$ 值(通常约小于 $K_{Ic}/10$ )，对有些材料可发现扩展速率非常之小，以致可认为存在一门槛值 $\Delta K_{th}$ 。而在 $\Delta K_{th}$ 与 $K_{Ic}$ 之间的范围内，一般认为裂纹扩展速率是应力强度因子幅值 $\Delta K$ 的函数

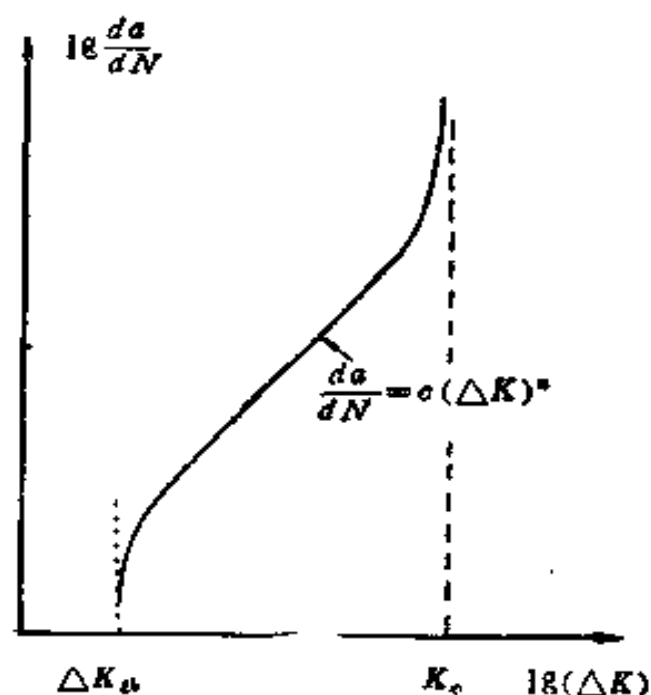


图 5.2 疲劳裂纹扩展速率 $\frac{da}{dN}$ 图

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) \quad (5.1)$$

对于许多材料，Paris 等[29]建议用

$$\frac{da}{dN} = c(\Delta K)^n \quad (5.2)$$

来描述材料的疲劳裂纹扩展速率。由材料的一组试验结果即可确定 $c$ 和 $n$ 。大多数金属材料 $n$ 的典型值在 2 和 4 之间。

有人指出，(5.2) 式没有考虑应力比 $R$ 的影响( $R = K_{min}/K_{max}$ )，也没有考虑裂纹扩展不同阶段的特点。因为当

$K \rightarrow K_c$ 时裂纹将失稳扩展。为计及以上两点, Forman<sup>[30]</sup>引入

$$\frac{da}{dN} = \frac{c(\Delta K)^n}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (5.3)$$

上式满足当  $\Delta K \rightarrow (1-R)K_c$  (即  $K_{\max} \rightarrow K_c$  时)  $da/dN \rightarrow \infty$ 。如果按 (5.1) 或 (5.2) 式测定了材料的  $da/dN$  与  $\Delta K$  的函数关系, 那么对于含有裂纹的结构物, 设认为其疲劳裂纹扩展的规律与同一材料的  $da/dN$  的规律相同, 当计算了该结构物裂纹尖端附近的  $\Delta K$  表达式后, 可通过积分 (5.1) 或 (5.2) 式确定结构的疲劳寿命。当

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, \dots) \quad (5.4)$$

积分上式, 疲劳寿命

$$N_c = \int_a^{N_c} dN = \int_a^{N_c} \frac{da}{f(\Delta K, \dots)} \quad (5.5)$$

记  $\Delta\sigma$  为应力幅, 一般地

$$\Delta K = \Delta\sigma g(a)$$

对一定的含裂纹结构,  $g(a)$  是已知的, 则其反函数

$$a = g^{-1}\left(\frac{\Delta K}{\Delta\sigma}\right)$$

故

$$\begin{aligned} d(\Delta K) &= \Delta\sigma g'(a) da \\ &= \Delta\sigma g' \left[ g^{-1}\left(\frac{\Delta K}{\Delta\sigma}\right) \right] da \end{aligned}$$

于是:

$$N_c = \int_{\Delta K_i}^{\Delta K_c} \frac{d(\Delta K)}{f(\Delta K, \dots) \Delta\sigma g' \left[ g^{-1}\left(\frac{\Delta K}{\Delta\sigma}\right) \right]} \quad (5.6)$$



$a$  为结构的起始裂纹长度,  $\Delta K_i$  为相应于起始裂纹长的应力强度因子幅值, 并一般地记应力强度因子为  $K = \sigma \sqrt{Ma}$ , 其中  $M$  为几何因子。

如果取  $da/dN$  为 (5.2) 所表示的形式, 则在  $c, n$  测定之后, 可以积分求得疲劳寿命为:

$$\begin{aligned} N_c &= \int_{a_i}^{a_c} dN = \int_{a_i}^{a_c} \frac{da}{c(\Delta\sigma)^n (Ma)^{n/2}} \\ &= \frac{2}{(n-2)cM^{n/2}(\Delta\sigma)^n} \left[ \left( \frac{1}{a_i} \right)^{\frac{n-2}{2}} - \left( \frac{1}{a_c} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right] \\ &\quad (n \neq 2) \\ &= \frac{1}{cM(\Delta\sigma)^2} \ln \frac{a_c}{a_i} \quad (n = 2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

上述的讨论都是在小范围屈服条件下进行的。因为塑性区尺寸  $r_p \propto (K/\sigma_0)^2$ , 在裂纹扩展速率较低时, 即  $\Delta K$  比  $K_{Ic}$  低得多时, 小范围屈服条件是能得到满足的。

对于非稳态的载荷循环和  $K_{min}$  不为零的情形, 人们也曾用断裂力学的观点对裂纹扩展速率问题作了研究。由上述可见, 断裂力学提供了含缺陷  $a_i$  的构件或材料, 在交变载荷下确定其疲劳寿命的设计方法。这一方法称为“破损安全”设计。断裂力学在蠕变裂纹扩展和应力腐蚀方面的应用, 建议看资料[1,32,33]。

## 第二章 弹塑性断裂力学

本章讨论在单调载荷作用下,断裂力学的弹塑性的论题。对于中低强钢材,线弹性断裂力学的应用受到限制。同时,由于下列的原因:有的结构物的构件之高应变集中部位产生塑性变形;大量韧性较好的材料和中低强钢的应用;高的外载荷、高温环境引起材料的蠕变以及构件的工艺历史等原因引起的残余应力及其释放……。凡此等等,由于不可逆的塑性变形存在于含裂纹的构件和材料中,线弹性断裂力学的应用受到限制。因此必须研究以弹塑性力学的方法来分析裂纹扩展规律的非线性断裂力学。本章将讨论下列问题:按[35]内容介绍了J积分和Dugdale-Barenblatt模型后,着重讨论在小范围屈服和大范围屈服条件下塑性区中的裂纹尖端场;大范围屈服条件下J积分的引进;详细讨论了Ⅲ型问题、I型(平面应变与平面应力)问题的理想弹塑性材料与幂硬化材料的局部解(渐近解)。介绍了J主导条件以及裂纹尖端张开位移 $\delta_I$ 与J积分的关系。最后,简略介绍了J积分与裂纹张开位移测试的几个有关问题。

### § 1 J 积 分

弹塑性断裂力学分析中,人们致力于寻找描述弹塑性断裂的控制参量,以建立弹塑性断裂准则。

Rice[42]在1968年提出的J积分,在弹塑性断裂力学中

起了很重要的作用。它避开直接计算在裂纹尖端附近的弹塑性应力应变场,而用J积分作为表示裂纹尖端应变集中特征的平均参量。对于服从塑性形变理论的介质,证明了:

(1) J 积分物理上可解释为变形功的差率;

(2) J 积分具有与积分路径无关的特性;

Begley 和Landes<sup>[43]</sup>在进行实验研究后指出:

(3) J 积分可作为表示起裂的弹塑性断裂准则;  $J = J_{IC}$ 。  $J_{IC}$ 为平面应变断裂韧度。

由于以上三点, J 积分便成为既有明确的物理含义,而又便于计算和测量的断裂准则被提出来了,而近年来又被推广应用于在一定条件限制下的裂纹扩展问题。因此在弹塑性断裂力学中首先介绍 J 积分。

讨论均质物体,对于以应变能密度来表示的塑性力学的形变理论(假定无卸载,即小应变的非线性弹性情形),有应力应变关系:

$$\sigma_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij} \quad (1.1)$$

$W(\epsilon_{ij})$  为应变能密度。考察如图 1.1 所示的裂纹体,串联一非线性弹簧,每单位试件厚度上施加的载荷为  $P$ ,在弹簧上有力与变形的关系式:

$$P = U_0'(\Delta_M),$$

$$(\quad)' \equiv d(\quad)/d\Delta_M \quad (1.2)$$

式中  $U_0(\Delta_M)$  为按试件单位厚度折算的弹簧应变能,  $\Delta_M$  是弹簧的伸长量。记全位移为

$$\Delta_T = \Delta + \Delta_M \quad (1.3)$$

试件的全位移给定,则图1.1的非线性弹性系统的位能

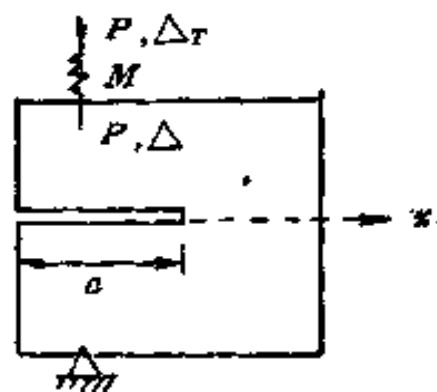


图 1.1

$$\Pi = U(\Delta, a) + U_0(\Delta_M) \quad (1.4)$$

$U$  是含裂纹物体中单位厚度的应变能, 按广义载荷与位移的关系有应变能:

$$U(\Delta, a) = \int_0^\Delta P(\tilde{\Delta}, a) d\tilde{\Delta} \quad (1.5)$$

对于在裂纹平面内 (即  $x_1$  方向) 的裂纹扩展, 定义每单位厚度的能量释放率  $J$  为

$$J = - \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial a} \right]_{\Delta_T} \quad (1.6)$$

由 (1.2), (1.4), (1.5) 式

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right]_{\Delta} da + \left[ \frac{\partial U}{\partial \Delta} \right]_a d\Delta + U_0' d\Delta_M \\ &= \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right]_{\Delta} da + P(d\Delta + d\Delta_M) \\ &= \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right]_{\Delta} da \end{aligned}$$

因为对于  $d\Delta_T = 0$  (给定边界位移), 上式中最后一个等式成立。由 (1.5) 并用 (1.6) 式

$$J = - \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right]_{\Delta} = - \int_0^\Delta \frac{\partial P}{\partial a}(\tilde{\Delta}, a) d\tilde{\Delta} \quad (1.7)$$

由上式可见,  $J$  与弹簧的特征  $M$  无关。对于线性弹性体, 柔度  $C \equiv \Delta/P$ 。易于证明,  $J$  在线弹性情形化为按第一章 (2.1) 和 (2.2) 式给出的能量释放率  $\mathcal{G}$ 。

(1.7) 式的另一形式可考虑物体在恒载  $P$  作用下的情况得到。 $\Delta$  视为  $P$  的函数, 然后对 (1.5) 式作分部积分, 得:

$$U(P, a) = P\Delta - \int_0^P \Delta(\tilde{P}, a) d\tilde{P}$$

由于在恒载  $P$  作用下  $\Pi = U - P\Delta$ ,

$$\Pi = - \int_0^P \Delta(\tilde{P}, a) d\tilde{P} \quad (1.8)$$

$$\text{上} \quad J = - \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial a} \right]_P = \int_0^P \frac{\partial \Delta}{\partial a}(\tilde{P}, a) d\tilde{P} \quad (1.9)$$

式 (1.7) 和 (1.9) 的示意图画在图 1.2 和图 1.3 上。上面导出了用广义的载荷-位移的信息来表示  $J$  的表达式。这样的关系式,使得我们便于直接由含裂纹平面物体的实验中,测量广义力  $P$  与广义位移  $\Delta$  之间的关系曲线来计算  $J$  积分。它奠定了用实验方法测定  $J$  积分的理论基础。这一点将在 § 10 中讨论  $J$  积分的实验标定时再加以详细的讨论。

下面讨论以含裂纹物体的应力和位移梯度的某一线积分来表示  $J$ , 并证明此积分是与路径无关的积分。Rice 在 [36] 给出了一个比较繁长的推导, 下面的推导取自 Budiansky 和 Rice 的文 [44]。而 Eshelby 在文 [45] 中在非线性弹性有限应变的范畴内给出了另一种推导。

先写出一个很重要的与积分路径无关的线积分。考察一个应力应变关系如 (1.1) 式所示的平面应变、平面应力或反平面剪切的裂纹体。令  $x_1 = x, x_2 = y$ , 设  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i$  是在单连通域  $A_r$  的边界  $\Gamma$  内或  $\Gamma$  上的不含有奇异性的场方程的任

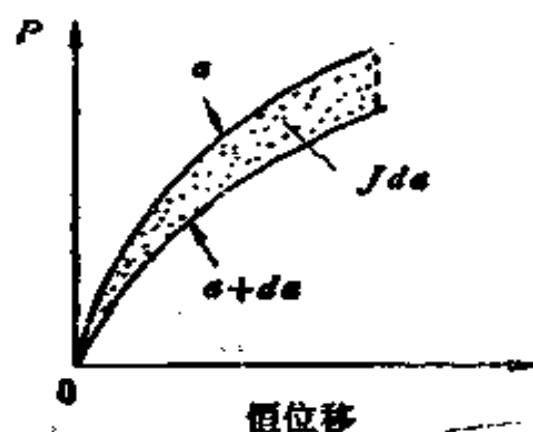


图 1.2

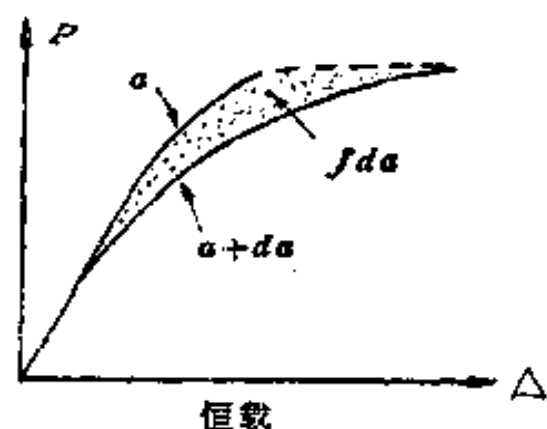


图 1.3

意解，定义沿 $\Gamma$ 的线积分为：

$$I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} (W n_x - \sigma_{ij} n_j u_{i,x}) ds \quad (1.10)$$

$n$ 是 $\Gamma$ 上的外法线方向的单位矢量，如图 1.4。应用格林公式、平衡方程（当不存在体力时 $\sigma_{ij,j} = 0$ ）和应力应变关系（1.1）式，则有

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} W n_x ds &= \int_{A_r} W_{,x} dA \\ &= \int_{A_r} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij,x} dA = \int_{A_r} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,x} dA \\ &= \int_{A_r} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (u_{i,x} + u_{j,x})_{,x} dA \\ &= \int_{A_r} \sigma_{ij} (u_{i,x})_{,j} dA = \int_{A_r} (\sigma_{ij} u_{i,x})_{,j} dA \\ &= \int_{\Gamma} \sigma_{ij} u_{i,x} n_j ds \end{aligned} \quad (1.11)$$

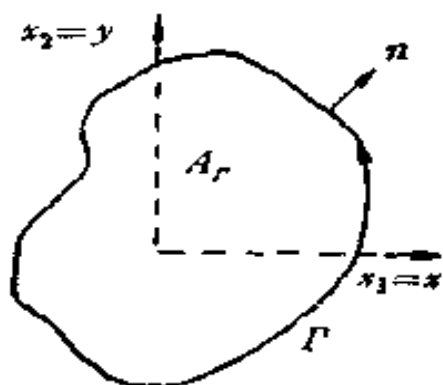


图 1.4 积分回路

推导（1.11）式还用了小应变的几何关系，于是由（1.10）式有

$$I_{\Gamma} = 0$$

其中 $A_r$ 是不含有奇异点的单连通域。

现转向讨论钝切口的情形，如图 1.5 所示。其中域

$A(a)$  是 $a$ 的函数。沿切口表面，无外力作用。在边界 $s_T$ 上作用有 $T^\circ$ ，在边界 $s_u$ 上给定 $u^\circ$ 。其中 $T^\circ$ ， $u^\circ$ 均不随 $a$ 而变化，对于给定的 $a$ ，系统的位能为

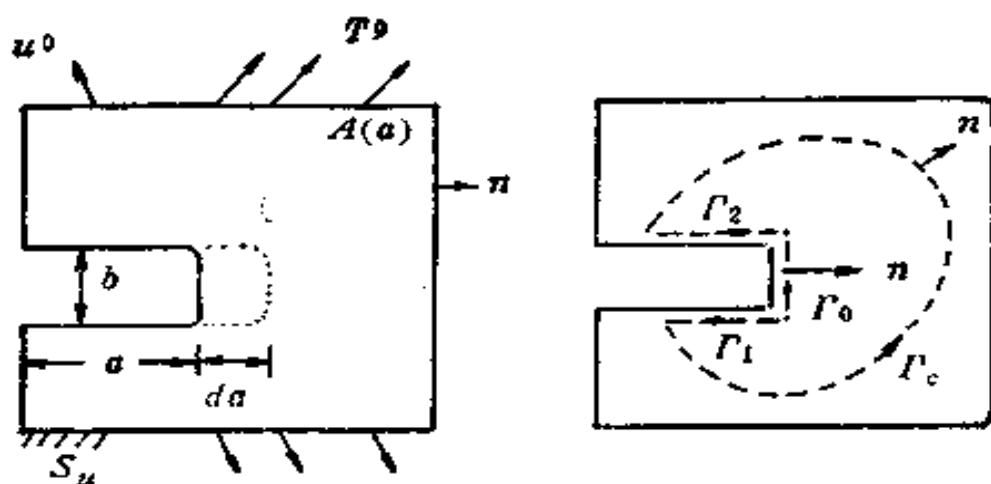


图 1.5

$$\Pi(a) = \int_{A(a)} W(\epsilon_{ij}) dA - \int_{s_T} T_i \cdot u_i ds$$

其中  $u_i(x_j, a)$  和  $\epsilon_{ij}(x_k, a)$  是平衡的位移场和应变场。给定外界条件  $L$  下，记

$$(\cdot) = \left[ \frac{\partial(\cdot)}{\partial a} \right]_L$$

则有

$$\dot{\Pi} = - \int_{\Gamma_0} W n_i ds + \int_A \dot{W} dA - \int_{s_T} T_i \cdot \dot{u}_i ds$$

用与 (1.11) 式中推导相似的步骤，有

$$\begin{aligned} \int_A \dot{W} dA &= \int_A \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} dA = \int_A \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dA = \int_A \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\dot{u}_{i,j} + \\ &\dot{u}_{j,i}) dA = \int_A \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} dA = \int_A (\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} dA = \int_S \sigma_{ij} \\ &\dot{u}_i n_j ds = \int_{s_T} T_i \cdot \dot{u}_i ds + \int_{\Gamma_0} T_i^* \cdot \dot{u}_i ds \end{aligned}$$

$T_i^*$  为在  $\Gamma^0$  上作用的结合力，即在  $\Gamma^0$  上， $-\sigma_{ij} n_j = T_i^*$

上式也可由虚位移原理直接导出，其中  $\dot{u}_i$  为虚速度。注意

到在 $s_u$ 上, 因为 $u_i = \tilde{u}_i^0$ , 且不随 $a$ 而变化, 所以 $\dot{u}_i = 0$  (在 $s_u$ 上)。于是有

$$\begin{aligned}\dot{\Pi} &= - \int_{\Gamma_0} W n_x ds + \int_{\Gamma_0} \sigma_{ij} (-n_j) \dot{u}_i ds \\ &= - \int_{\Gamma_0} (W n_x - \sigma_{ij} n_j u_{i,x}) ds\end{aligned}\quad (1.12)$$

上式应用了当存在结合力时缺口形状为定常的假设, 即 $\dot{u}_i = -u_{i,x}$ 。设切口自由, 即无结合力, 则上式积分的第二部分为零, 因为在 $\Gamma_0$ 上 $\sigma_{ij} n_j = 0$ , 于是(1.10)式中线积分 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_c - \Gamma_0$ , 而且沿 $\Gamma_1, \Gamma_2$ 上, 线积分(1.10)为零, 由于 $I_T = 0$ , 故

$$\dot{\Pi} = - \int_{\Gamma_c} (W n_x - \sigma_{ij} n_j u_{i,x}) ds\quad (1.13)$$

对于钝缺口, 能量释放率由图1.6所示的任意回路 $\Gamma_c$ 的线积分给出。若选择积分回路 $\Gamma_c$ 远离切口端部, 并让 $b \rightarrow 0$ 则得到裂纹的极限情形, 则(1.13)式给出对于裂纹体的能量释放率:

$$J = \int_{\Gamma_c} (W n_x - \sigma_{ij} n_j u_{i,x}) ds\quad (1.14)$$

或者写成下式

$$J = \int_{\Gamma_c} W dy - \tilde{\mathbf{T}} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial x} ds\quad (1.14)'$$

其中 $\tilde{\mathbf{T}}$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}$ 为沿积分回路 $\Gamma_c$ 上的张力矢量和位移矢量。此处强调指出: 上述讨论不受小范围屈服的限制。

对于给定载荷条件下, 我们导出了上述的表达式。如前面已经说明过的, 当对于柔性系统的加载条件下, 同样的公式仍然成立。

上面证明了 $J$ 积分对于积分路径的无关性。这一证明是由Rice作出的。在Rice之前, Eshelby从位错理论出发, 曾



作出更一般性的证明。Черепанов<sup>[46]</sup>也讨论了守恒积分的问题。注意在 (1.11) 式的证明过程中, 引用了下列关系:

$$\sigma_{ij} = \partial W / \partial e_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

上式中第一组关系是塑性力学中形变理论的结果, 它实质上与非线性弹性理论相当, 即  $e_{ij}$  由  $\sigma_{ij}$  直接唯一地确定, 而与加载历史无关, 因而不允许发生卸载。因为若发生了卸载,  $e_{ij}$  与  $\sigma_{ij}$  的关系就不唯一了, 而函数  $W(e_{ij})$  也就失去了

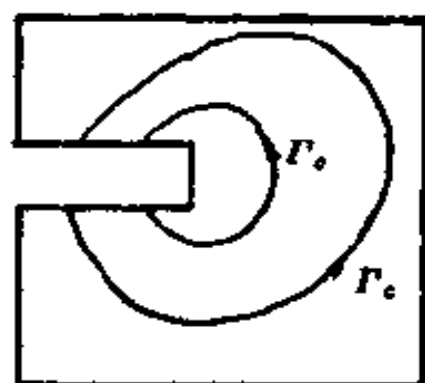


图 1.6  $\Gamma_c$  积分回路

了确定的意义; 第二组关系要求变形为小变形, 第三组的平衡方程不存在体积力项。这三点是式 (1.14) J 积分守恒性成立的前提, 因此, 也给出了它的适用范围。但许多按  $J_2$  流动理论的有限元计算结果证实, 对于单调加载的静止裂纹, 不同路径计算的 J 积分差别甚小。

在小范围屈服的情况下, 积分回路  $\Gamma_c$  可以选择在如第一章图 3.1 所示  $K$  场适用的环形域内, 按第一章 (1.4), (1.5) 式计算 (1.14) 式的 J 积分, 并和第一章的 (2.8) 式比较, 对于 I 型情况有

$$J = \mathscr{G} = K^2 / E' \quad (1.15)$$

可见, 在线弹性或小范围屈服情况下, J 积分即是能量释放率  $\mathscr{G}$ 。所以此时 J 积分的物理意义是明确的。 (1.15) 式也提供了由计算 J 积分来求得应力强度因子的方法。

近年来, 人们通过研究了解到, J 积分适用条件中许多

非本质的限制可以解除,从而大大地推广了J积分理论的用途。Knowles和Sternberg<sup>[47]</sup>将J积分概念推广到有限变形的三维的非线性弹性体,用Noether定理论证了对于非线性弹性的三维有限变形体,存在七个与路径无关的积分。Bergkvist和Huong<sup>[48]</sup>将J积分推广到轴对称裂纹体,Ainsworth<sup>[49]</sup>得到考虑热应力的J积分,Kishimoto等人<sup>[50]</sup>讨论了考虑体积力(惯性力)的J积分计算,Blackburn<sup>[51]</sup>讨论了用于数值计算的三维J积分,Bui<sup>[52]</sup>从广义变分的对偶原理出发,讨论了用余能密度表示的对偶的J积分……,凡此等等,扩大了J积分等一系列与路径无关的积分的应用范围。

Knowles和Sternberg<sup>[47]</sup>由Noether定理推导出七个与积分曲面无关的积分,它们是:

(1) 对于任意非线性弹性的连续介质

$$J_k = \oint_S (W n_k - T_i u_{i,k}) dS, \quad k=1, 2, 3 \quad (1.16)$$

上式共有三个积分,式中 $dS$ 表示积分曲面上的面素。

$$J_1 = \oint [W n_1 - (T_1 u_{1,1} + T_2 u_{2,1} + T_3 u_{3,1})] dS$$

$$J_2 = \oint [W n_2 - (T_1 u_{1,2} + T_2 u_{2,2} + T_3 u_{3,2})] dS$$

$$J_3 = \oint [W n_3 - (T_1 u_{1,3} + T_2 u_{2,3} + T_3 u_{3,3})] dS$$

(2) 对于各向同性的非线性弹性连续介质,有L积分

$$L_k = \oint E_{kij} (W x_j n_i + T_i u_j - T_i u_{i,j} x_j) dS \quad (1.17)$$

$$k=1, 2, 3$$

式中 $E_{kij}$ 是置换张量符号。

(3) 对于线弹性情形,还有M积分

$$M = \oint_S (W x_i n_i - T_j u_{j,i} x_i - \frac{1}{2} T_i u_i) dS \quad (1.18)$$

式中 $W$ 仍是应变能密度, $n_k$ 是单位外法线矢量 $n$ 的方向余弦, $T_i$ 为 $S$ 表面上的表面力向量; $T_i = \sigma_{ij} n_j$ ,  $(\quad)_{,k} = \partial(\quad)/\partial x_k$ 。

当 $S$ 曲面内无空穴或裂纹,即在域 $S$ 内解存在且无奇

异点, 则上述  $J_k$ ,  $L_k$ ,  $M$  积分与曲面无关, 且有  $J_k = 0$ ,  $L_k = 0$ ,  $M = 0$ , 若曲面内有空穴或裂纹, 则积分与曲面位置无关, 且积分取恒定值。

对于二维问题, 写出上述  $J_k$  各积分的具体形式如下:

对于任意非线性弹性的连续介质, 由于  $n_3 = 0$ ,  $u_{i,3} = 0$ , 则由 (1.16) 式

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \oint \left\{ W dy - \left( T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dl \right\} \\ J_2 &= \oint \left\{ -W dx - \left( T_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dl \right\} \\ J_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

关于  $J_1$ ,  $J_2$  积分的守恒性, Herrmann 等在文[53]中作了专门的讨论。

## § 2 Dugdale-Баренblatt 模型

含裂纹物体的弹塑性分析计算是很复杂的。通过实验观察和理论分析, 建立适当的计算物理模型, 可简化弹塑性的数学分析, 又可提供裂纹尖端弹塑性变形场的某些结果。

Dugdale (54) 通过对软钢薄板裂纹前缘的塑性区的实验观察发现: 塑性区集中在与板平面成  $45^\circ$  的横向滑移带上, 如图 2.1 所示。

设塑性区的长度  $s$  比板厚  $t$  大得多。则塑性区可理想化为沿板面内高度为  $t$  的狭带。设材料为理想弹塑性的, 则沿  $x$  轴方向的屈服带内的应力  $\sigma_{yy}$  可取作平面应变情况<sup>1)</sup>下的拉伸屈服应力  $\sigma_0$ 。即在带状屈服区中, 解除位移约束, 代之以上下

1)  $\epsilon_{xx} = 0$ ,  $\sigma_{xx} = 0$

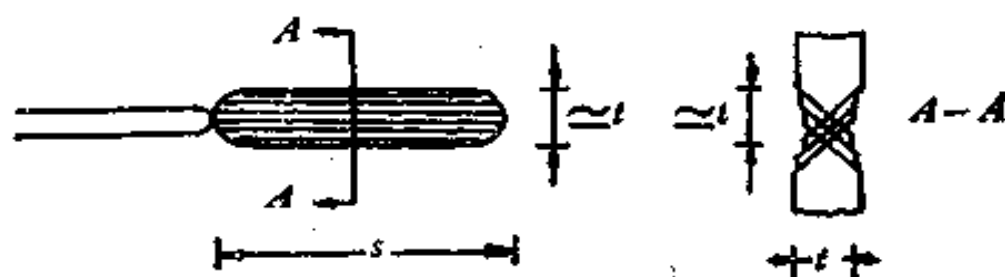


图 2.1 Dugdale模型

表面间之作用力 $\sigma_0$ ，如图 2.2 所示，计算中近似取带状屈服区的高度为零。由于解除了约束，则带状区的上下表面可存在相对位移，造成位移的间断。注意到这一位移间断实际上

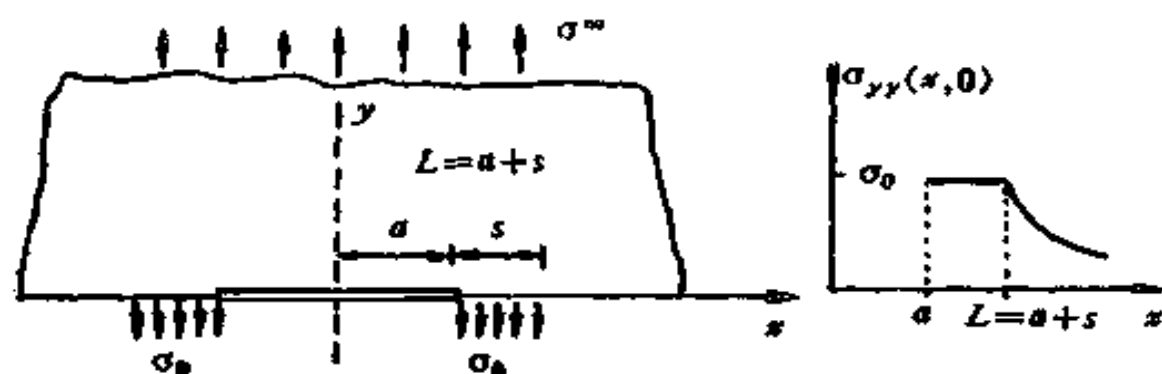


图 2.2 Dugdale模型的裂纹前缘应力分布

并不存在，它是由图 2.2 的计算模型化引起的。这一位移间断可视为实际上高度不为零的塑性区滑移带的上下边界位移的模型化。这样的计算模型称为Dugdale模型。Dugdale 还假设，用下列办法决定塑性区尺寸  $s$ ：假设在带状塑性区的顶端，如图 2.2 所示，应力不存在奇异性。即在顶端处总的应力强度因子  $\Sigma K_I = 0$ 。

由上述的 Dugdale 模型，将平面应力条件下的弹塑性裂纹问题，通过上述的假设，转化为在远方应力  $\sigma^\infty$  和带状区内作用  $\sigma_0$  的条件下，具有  $2a + 2s = 2L$  长的裂纹的线弹性断裂力学问题来求解，这是一个“弹性化”的过程。于是问题归

结为求解图2.3所示的线弹性问题的下述各量：（1）塑性区尺寸  $s$ （即带状区的长度）；（2）原裂纹尖端处的张开位移  $\delta$ ；（3）如果需要的话，还可以求解应力场与位移场。现分别讨论之：

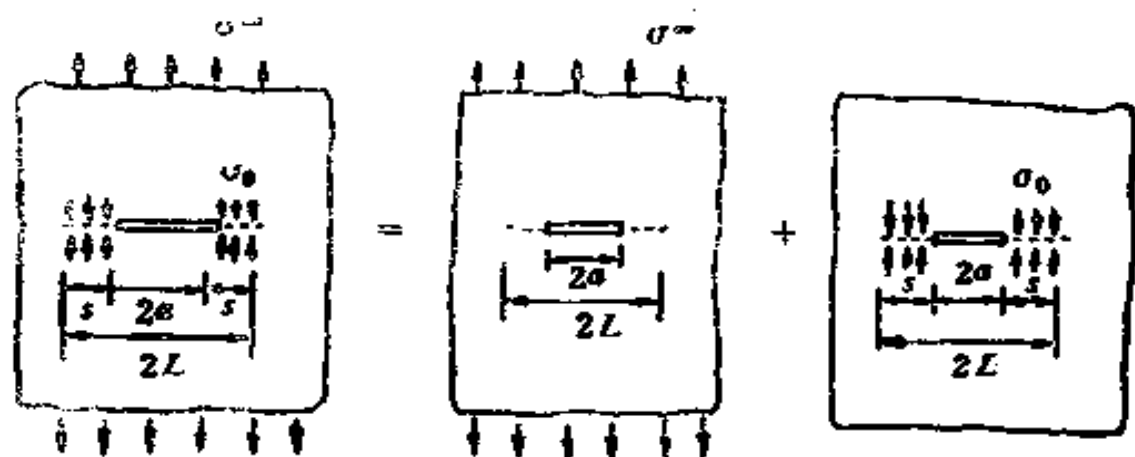


图 2.3

### （1）带状区尺寸 $s$

如图2.3所示，由于要求在带状区顶端，有  $\Sigma K_I = 0$ ，用叠加原理求图2.3所示的应力强度因子。在远处  $\sigma^\infty$  作用下，在假想的裂纹尖端  $x = L$  处，应力强度因子  $K_I^{(1)} = \sigma^\infty \sqrt{\pi L}$

在  $-L < x < -a$  和  $a < x < L$  的塑性区域内，裂纹表面上作用均布应力  $-\sigma_0$ ，其应力强度因子为

$$K_I^{(2)} = -2\sigma_0 \sqrt{\frac{L}{\pi}} \cdot \cos^{-1} \left( \frac{a}{L} \right) \quad (2.1)$$

由叠加原理，  $K_I^{(1)} + K_I^{(2)} = 0$  得

$$\frac{a}{L} = \cos \left( \frac{\pi \sigma^\infty}{2\sigma_0} \right) \quad (2.2)$$

或

$$\frac{s}{L} = 2 \sin^2 \left[ \frac{\pi \sigma^\infty}{4\sigma_0} \right] \quad (2.3)$$

$$\frac{s}{a} = \sec \left[ \frac{\pi \sigma^\infty}{2\sigma_0} \right] - 1 \quad (2.4)$$

## (2) 裂纹张开位移 (COD) 或原裂纹尖端的张开位移 (CTOD) 的计算

计算张开位移有两种方法：一种是用Мусхелишвили 的复应力函数的方法，可计算对应图2.4所示的线弹性力学问题，求得复应力函数 $\varphi(z)$ ， $\psi(z)$ ，便可得到全部应力与位移场的解，由于我们只要求原裂纹尖端处的张开位移，可沿用含有裂纹 $a$ 时的卡氏定理

$$\delta = \frac{1}{2} \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial P} \quad (2.5)$$

在原真实裂纹两端施加两对作用于每单位厚度的虚力 $P$ ，在I型条件下，当外载荷一定时， $2\mathcal{G} = \partial U / \partial a$ ，其中 $U$ 为弹性应变能。此时(2.5)式可写为：

$$\delta = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial P} \int_a^L \mathcal{G}_I da = \int_a^L \lim_{P \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{G}_I}{\partial P} da$$

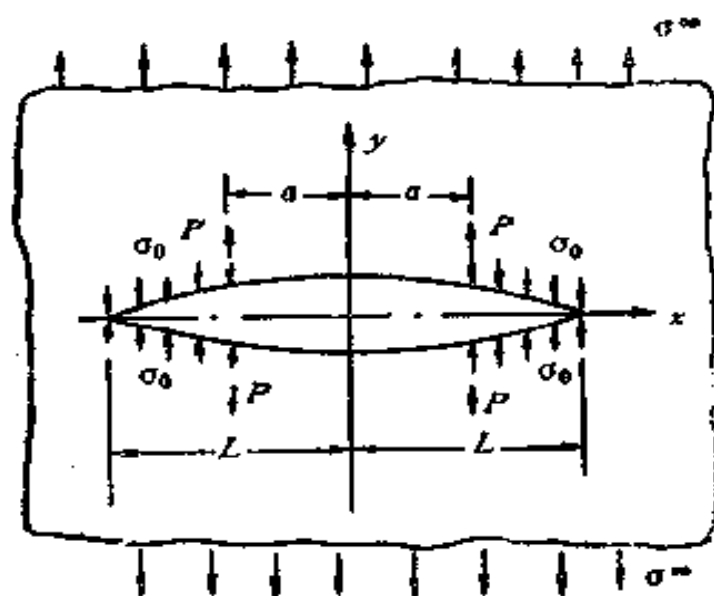


图 2.4 在D模型上施加两对P力

而  $\mathcal{G}_I = K_I^2/E$  (平面应力)。若当裂纹半长记为  $\xi$ , 在  $\sigma^\infty$ ,  $\sigma_0$  和一对力  $P$  作用下的应力强度因子:

$$K_I = \sigma^\infty (\pi\xi)^{1/2} - 2\sigma_0 \left(\frac{\xi}{\pi}\right)^{1/2} \int_a^\xi \frac{db}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \\ + 2P \left[ \frac{\xi}{\pi(\xi^2 - a^2)} \right]^{1/2}$$

因此, 利用  $K_I^2 = \mathcal{G}_I E$ , 则

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{G}_I}{\partial P} = \frac{4}{E} \left\{ \sigma^\infty (\pi\xi)^{1/2} - 2\sigma_0 \left(\frac{\xi}{\pi}\right)^{1/2} \right. \\ \left. \cdot \int_a^\xi \frac{db}{(\xi^2 - b^2)^{1/2}} \right\} \left\{ \frac{\xi}{\pi(\xi^2 - a^2)} \right\}^{1/2}$$

利用对称性, 于是有:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{4}{E} \int_a^L \left\{ \sigma^\infty (\pi\xi)^{1/2} - 2\sigma_0 \left(\frac{\xi}{\pi}\right)^{1/2} \int_a^\xi \frac{db}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \right\} \\ &\quad \left\{ \frac{\xi}{\pi(\xi^2 - a^2)} \right\}^{1/2} d\xi \\ &= \frac{4\sigma^\infty}{E} \int_a^L \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{8\sigma_0}{\pi E} \int_a^L \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - a^2)^{1/2}} \int_a^\xi \frac{db}{(\xi^2 - b^2)^{1/2}} \\ &= \frac{4\sigma^\infty}{E} (L^2 - a^2)^{1/2} - \frac{8\sigma_0}{\pi E} \int_a^L \frac{\xi d\xi}{(\xi^2 - a^2)^{1/2}} \cdot \cos^{-1} \left( \frac{a}{\xi} \right) \\ &= \frac{8\sigma_0 a}{\pi E} \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

记  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ , 裂纹尖端张开位移为  $\delta_i$ , 则

$$\delta_i = v(a, 0^+) - v(a, 0^-) = \frac{8}{\pi} \varepsilon_0 a \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_0} \right) \right] \quad (2.7)$$

$\delta_i$  的变形图详见图 2.5。现在用表达式 (1.14) 计算 J 积分，积分回路  $\Gamma_c$  见图 2.5 所示。由积分与路径无关的性质，将回路  $\Gamma_c$  缩到  $\Gamma_c'$ ，即在  $a \leq x \leq L$  的条带状屈服区的上、下表面，因为沿  $\Gamma_c'$  上  $n_x = 0$ ，且  $\sigma_{ij} n_j u_{i,x} = \sigma_0 v_{,x} n_y$ ，则

$$\begin{aligned} J &= - \int_{\Gamma_c'} \sigma_0 v_{,x} n_y ds = - \sigma_0 \int_a^L [v_{,x}(x, 0^+) - v_{,x}(x, 0^-)] dx \\ &= \sigma_0 [v(a, 0^+) - v(a, 0^-)] = \sigma_0 \delta_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

或者

$$J = \frac{8}{\pi} \sigma_0 \varepsilon_0 a \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right) \right] \quad (2.9)$$

(2.8) 式也适用于有限大的平板的情形，(2.9) 式仅适用于无限平面含有限长裂纹的情形。由 (2.8) 式，当  $\sigma^\infty \rightarrow \sigma_0$  时， $J \rightarrow \infty$ 。这是由于 (2.6) 式中，当  $\sigma^\infty \rightarrow \sigma_0$  时， $\delta_i \rightarrow \infty$ 。此时， $\delta_i$  的计算式已不适用。然而 (2.8) 式

$$J = \sigma_0 \delta_i \quad \text{或} \quad \delta_i = J / \sigma_0 \quad (2.10)$$

对于所有情况下的 Dugdale 模型均成立。它说明屈服条带以外的弹性材料的能量释放率与作用于窄带的结合应力 ( $\sigma_y = \sigma_0$ ) 的功率相平衡。

在小范围屈服的情况下，当  $\sigma_\infty / \sigma_0 \ll 1$  时，

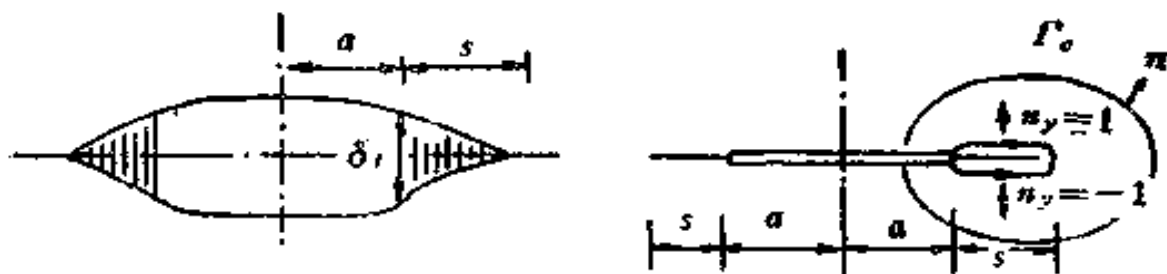


图 2.5 裂纹尖端张开位移  $\delta_i$  与积分回路  $\Gamma_c$ 。取  $\epsilon = \frac{\pi \sigma}{2 \sigma_0}$ ，

$$\text{则} \quad \ln \sec \epsilon = \frac{1}{2} \epsilon^2 \left( 1 + \frac{1}{6} \epsilon^2 + \dots \right)$$



由 (2.4), (2.7), (2.8) 式给出:

$$\frac{s}{a} = \frac{\pi^2}{8} \left[ \frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right]^2$$

$$J = \sigma_0 \delta_t = \pi \sigma_0 \varepsilon_0 a \left( \frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right)^2 \quad (2.11)$$

在小范围屈服条件下,再引入  $K = \sqrt{\pi a} \sigma^\infty$ 。上式又可写为:

$$s = \left( \frac{\pi}{8} \right) \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2$$

$$J = \sigma_0 \delta_t = K^2/E = \frac{(\sigma^\infty)^2 \pi a}{E} \quad (2.12)$$

这个  $s$  的式子在上一章 (3.3) 式中曾经引用过。将上式中的小范围屈服条件下的  $J$  以  $J_0$  表示,则可以写出大范围屈服条件下

$$\frac{J}{J_0} = \frac{8}{\pi^2} \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma^\infty} \right]^2 \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right) \right] \quad (2.13)$$

$$\frac{J}{J_0} = 1 + \frac{\pi^2}{24} \left( \frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right)^2 + \dots \quad (2.14)$$

(2.14) 式中第一项即小范围屈服情形下的结果;计入第一、二项,相当于中等屈服程度的情形。注意到 (2.13) 式中的比值当  $\sigma^\infty \rightarrow \sigma_0$  时趋向无限。由 (2.13) 式中可见,当  $\sigma^\infty / \sigma_0 \approx 1/2$  时, (2.14) 式第二项约占 10%, 小范围屈服条件下算出的  $J$  (和  $\delta_t$ ) 值偏小约 10%。

将小范围屈服的结果推广应用于中等屈服程度的情形,曾经用计入塑性区以增加等效裂纹长度的方法。这种想法曾经在线弹性断裂力学中应用过,即将原裂纹长度  $a$  换为等效裂纹长度  $a_e$ , 用小范围屈服的关系确定  $a_e$ , 用  $J$  确定  $K_e$ , 即

$$J = K_e^2/E \quad K_e = \sigma^\infty \sqrt{\pi a_e} \quad (2.15)$$

由 (2.14) 式有

$$K_I^2 = \pi a (\sigma^\infty)^2 \cdot [1 + \pi^2 (\sigma^\infty / \sigma_0)^2 / 24 + \dots]$$

由 (2.15) 式中  $a_s$  的定义, 可知最低阶的修正为:

$$a_s = a [1 + \pi^2 (\sigma^\infty / \sigma_0)^2 / 24 + \dots] = a + \frac{s}{3} + \dots \quad (2.16)$$

上式中  $s$  为 (2.11), (2.12) 式的小范围屈服情况下所给出的值, 这一种处理方法将在下文有关章节中再加以讨论。这里只是简单地指出, 出现在 (2.16) 式中的修正值  $s/3$  只是在这里所考察的问题的渐近的修正, 它比通常的平面应力问题的修正值  $s/2$  要小。通常习惯算法是 (2.16) 式中第二项取  $s/2$ 。

由上述的 (2.7), (2.9) 式, 现在来讨论在大范围屈服条件下起裂分析的一种可能的推广。至少是在 Dugdale 模型的范围内来讨论这一问题。由 (2.10) 式, 任何基于  $J$  积分的临界值的起裂准则都和基于裂纹张开位移  $\delta_I$  的临界值的起裂准则相等效。COD 或  $\delta_I$  是由裂纹尖端的塑性区内的张开和伸张区深度来度量的, 不管是否属于小范围屈服, 最明显的起裂准则是

$$\delta_I = \delta_{Ic} \quad (2.17)$$

$\delta_{Ic}$  由实验确定, 它是温度的函数。 $\delta_{Ic}$  的确定可以选用专门的试件与试验步骤, 这些在下文中还要讨论。由 (2.10) 式, 与上式数学上相当的另一种起裂准则

$$\left. \begin{aligned} J &= J_c \\ J_c &= \sigma_0 \delta_{Ic} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

其中

在小范围屈服条件下, 上述的起裂准则可用应力强度因子  $K$  来表示, 利用 (2.12) 式, 则起裂准则可表示为:

$$K = K_0$$

$$K_c = \sqrt{\sigma_0 E \delta_{ic}} = \sqrt{E J_c} \quad (2.19)$$

反之，若从小范围屈服条件下的试验知道了  $K_c$ ，则由 (2.19) 式的第二个方程可确定用于 (2.17) 和 (2.18) 式中的  $\delta_{ic}$ 。

(1) 在大范围屈服下的断裂准则

由 (2.9) 式，并使  $J = J_c$ ，则起裂应力  $\sigma_c^\infty$  必需满足方程：

$$\frac{8}{\pi} \cdot \ln \left[ \sec \left[ \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_c^\infty}{\sigma_0} \right] \right] = J_c / (\sigma_0 \varepsilon_0 a) \quad (2.20)$$

(2) 如果讨论小范围屈服的情形，由 (2.18)、(2.11) 式给出：

$$\pi (\sigma_c^\infty / \sigma_0)^2 \approx J_c / (\sigma_0 \varepsilon_0 a) \quad (2.21)$$

(3) 对于中等程度屈服的情形，取 (2.14) 式第一、二项，则有

$$\pi \left( \frac{\sigma_c^\infty}{\sigma_0} \right)^2 \left[ 1 + \frac{\pi^2}{24} \left( \frac{\sigma_c^\infty}{\sigma_0} \right)^2 \right] = \frac{J_c}{(\sigma_0 \varepsilon_0 a)} \quad (2.22)$$

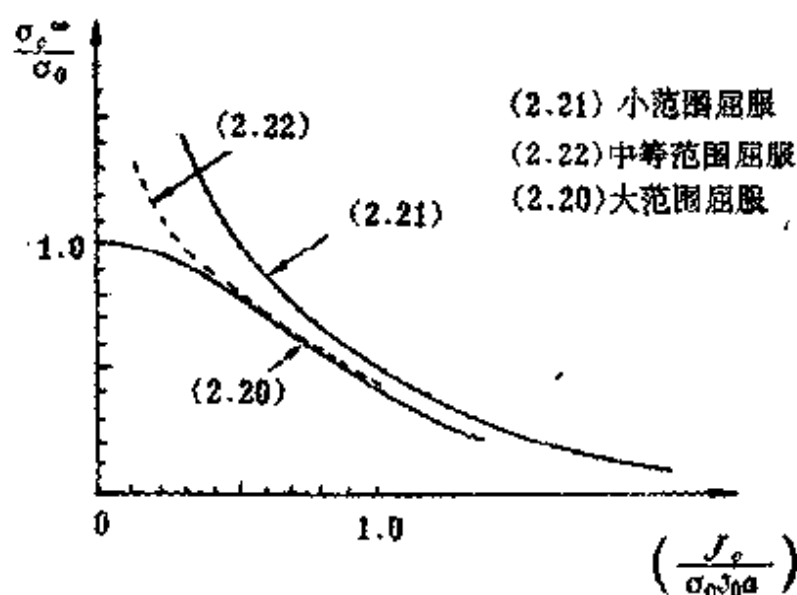


图 2.6  $\frac{\sigma_c^\infty}{\sigma_0}$  与  $\left( \frac{J_c}{\sigma_0 \varepsilon_0 a} \right)^{-1}$  的关系

(2.20) 和 (2.21) 式间的差别可由图2.6中  $\sigma_c$  与  $a$  的关系图中看出, 其中  $J_c/\sigma_0 \epsilon_0$  作为材料常数看待。

Dugdale主要研究了软钢板材的塑性区尺寸。在外加应力直至趋近于屈服应力的情况下, 其实验值与大范围屈服条件下的 (2.2)、(2.3) 式良好地相符合。

Баренблатт<sup>[55]</sup>曾提出一种假说: 认为在线弹性断裂力学的应力分析中, 由于裂纹尖端的曲率半径趋近于零, 引起了无限大的应力集中, 而这种应力状态实际上是不可能的。他认为: 在裂纹尖端存在一微小的区域, 称为内聚区, 如图2.7所示。原子间的吸引力与原子间的拉开距离有  $\sigma = \sigma(\delta)$  的函数关系。由于应力的作用, 这个区域 (其长度为  $s$ ) 内

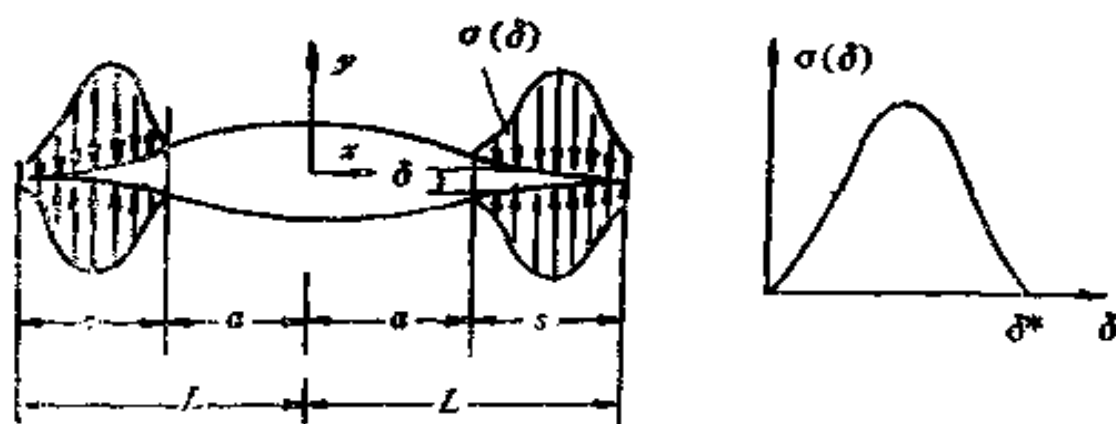


图 2.7 Баренблатт模型

各点就会产生一定数量的伸长 (相对位移)。由图2.7可见, 存在一个相对张开位移的临界值  $\delta^*$ 。当  $\delta > \delta^*$ , 则  $\sigma(\delta) = 0$ 。如果取  $\sigma(\delta) \equiv \sigma_0$ , 则 Баренблатт模型便相当于 Dugdale 模型。所以常统称 Dugdale-Баренблатт模型。

与 Dugdale-Баренблатт模型 (简称 D-B 模型) 相似的, 还有从位错连续统理论出发, 对平面应力和反平面应变的弹塑性断裂进行理论分析, 所得到的张开位移与撕开位移的计

算公式与D-B模型所得的结果相同。后一模型称为BCS模型<sup>[56]</sup>。由Леонов<sup>[57]</sup>和Панасюк<sup>[58]</sup>所提出的“ $\delta_K$ ”模型，虽然开始只用于分析脆断问题，它也属于内聚区内 $\sigma(\delta)$ 分布曲线的另一种模型。

必须指出：基于D-B模型的非线性断裂理论和相应的张开位移起裂准则，是针对平面应力情形下的无限大平板进行讨论的。由于引入了“弹性化”的假设，计算分析上比较简单。然而由于在塑性区条带中，用窄带区内假设分布的力系 $\sigma_0$ 代替裂纹延长线上塑性区内的上、下分界面之间的结合力，而所对应的塑性区内出现了位移的间断。而该模型却又认为这一位移间断就是实际的由于塑性变形的发展和伴随着的裂纹尖端的钝化所产生的张开位移；而且在D-B模型中，对于理想塑性材料，取 $\sigma_0$ 为屈服应力，但一般材料存在加工硬化。硬化材料的塑性区的形状可能不是狭带型的，因此需要对含有材料硬化情形下裂纹尖端场作出比较严格的弹塑性力学分析。

### § 3 小范围屈服条件下的弹塑性解

为讨论大范围屈服条件下的弹塑性解，在这一节先讨论小范围屈服条件下裂纹问题的弹塑性解。

在一般情况下，含裂纹的弹塑性平面问题的解，由于是属于非线性的可动边界问题，它的求解在数学上是很复杂的。所以人们往往先考虑比较简单的问题，即从讨论反平面应变的Ⅲ型问题的弹塑性解开始。由于Ⅲ型弹塑性问题相对地比较简单，因而对于小范围屈服条件下可以求得精确解。所以它的求解往往是分析Ⅰ、Ⅱ型问题的先导。而且Ⅲ型问题本身在工程实际中也有实际意义，例如带有轴向裂纹的杆

件的弯曲和扭转便属此例。

Ⅲ型问题的弹塑性分析，Rice 在文[36]已作了总结。Hult 和 McClintock<sup>[59]</sup>得到理想弹塑性材料含裂纹的无限平板的Ⅲ型问题的解。现先讨论理想弹塑性情形小范围屈服条件下的解。然后再讨论工程中常见的幂硬化材料的小范围屈服条件下的解。

### 1. Ⅲ型问题，理想弹塑性情形下的解

#### (1) 半反逆解法及其结果

Hutchinson<sup>[35]</sup>描述了这一问题的一种快速推导的方法，它是一种半反逆的求解方法，所得的结果很简单。

设材料为理想弹塑性，在小范围屈服条件下，塑性区是如图3.1所示的半径为  $R_0$  的圆。该圆外的场相当于以裂纹尖端位于圆心的  $K$  ( $K = K_0$ ) 场。这样，便可以推导得塑性区、

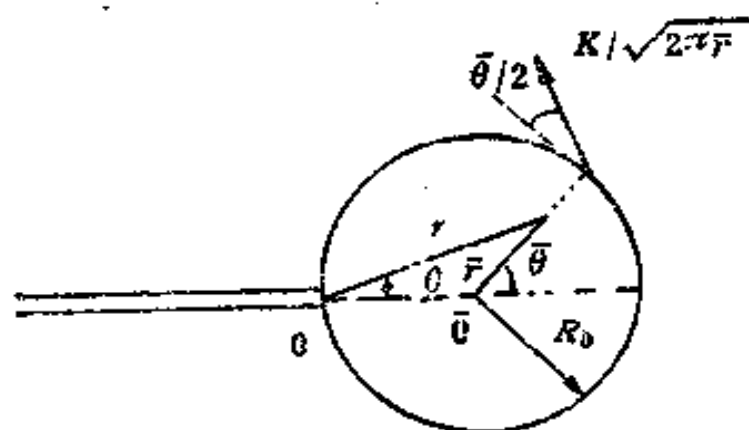


图 3.1 Ⅲ型理想弹塑性情况的塑性区

弹性区内的应变、位移的全场解。

按图 3.1 所示的坐标系，将第一章 (1.10)，(1.11) 式表示的  $K$  场解，转换到极坐标系：

$$(\tau_r, \tau_{\theta}) = G(\gamma_r, \gamma_{\theta}) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left( \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$w = 2 \frac{K}{G} \sqrt{\frac{\bar{r}}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.1)$$

式中:  $\tau_r = \tau_{r\theta}$ ;  $\tau_\theta = \tau_{\theta r}$

在塑性区内应满足以极坐标系  $(r, \theta)$  描写的以下各方程平衡方程。按图3.2所示的单元体, 列出平衡方程为:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (3.2)$$

几何关系为:

$$(\gamma_r, \gamma_\theta) = \left( \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (3.3)$$

屈服条件 (理想塑性情况)

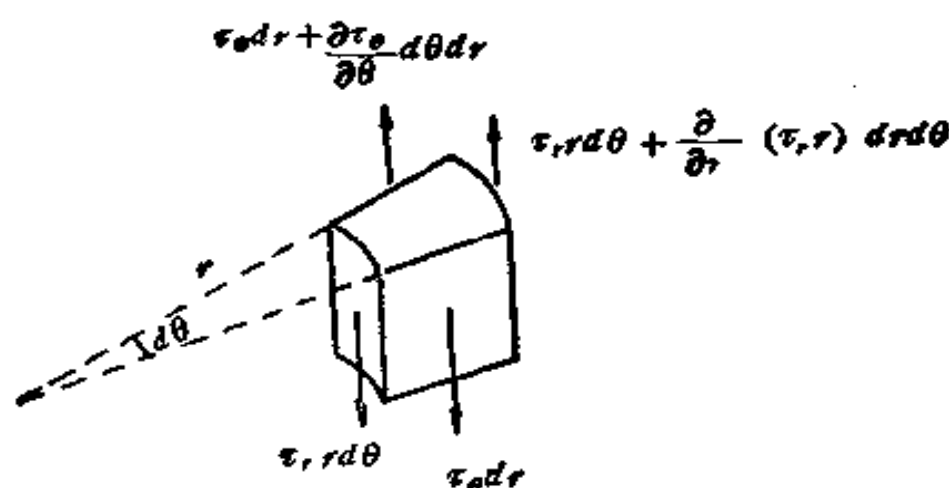


图 3.2 单元体的应力

$$\tau_r^2 + \tau_\theta^2 = \tau_0^2 \quad (3.4)$$

$\tau_0$  为剪切屈服极限。

假定材料服从塑性形变理论 (以下将证明, 因满足比例加载条件, 因而同时也满足增量理论)。则应力应变关系:

$$(\gamma_r^e, \gamma_\theta^e) = \frac{1}{G} (\tau_r, \tau_\theta) \quad (3.5)$$

$$(\gamma_r^p, \gamma_\theta^p) = \lambda^p (\tau_r, \tau_\theta) \quad (3.6)$$

其中  $\gamma_r^e, \gamma_\theta^e; \gamma_r^p, \gamma_\theta^p$  分别为弹性与塑性应变分量,  $\lambda^p$  为比例因子。总应变

$$(\gamma_r, \gamma_\theta) = \lambda (\tau_r, \tau_\theta) \quad (3.7)$$

$$\lambda = \frac{1}{G} + \lambda^p$$

设塑性区内的应力解为

$$\tau_r = 0, \quad \tau_\theta = \tau_0$$

上式满足平衡方程 (3.2) 和屈服条件 (3.4)。在求得塑性区应力之后, 再讨论塑性区内的应变与位移。由 (3.7) 式

$$\gamma_r = 0, \quad \gamma_\theta = \lambda(r, \theta) \tau_0 \quad (3.8)$$

由 (3.3) 式, 有

$$\left. \begin{aligned} \gamma_r &= \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad w = F(\theta) \\ \gamma_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{1}{r} F'(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

对比 (3.8)、(3.9) 式, 得

$$\lambda(r, \theta) = \frac{\gamma_\theta}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_0 r} F'(\theta) \quad (3.10)$$

问题归结为求解待定函数  $F(\theta)$ 。它可以通过在图3.1所示的弹塑性区的边界上满足连续条件来确定。

在  $r, \theta$  的极坐标系下, 写出弹性解:

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= 0, \quad \tau_\theta = \frac{K}{\sqrt{2\pi R_0}} \\ \gamma_r &= 0, \quad \gamma_\theta = \frac{1}{G} \frac{K}{\sqrt{2\pi R_0}} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$



$$w = 2 \frac{K}{G} \sqrt{\frac{R_0}{2\pi}} \sin\theta$$

由弹塑性区交界边界上应力连续, 则有

$$\tau_\theta = \frac{K}{\sqrt{2\pi R_0}} = \tau_0$$

求得塑性区半径:

$$R_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\tau_0} \right)^2 \quad (3.12)$$

由位移 $w$ 连续, 注意到 (3.9)、(3.12) 式

$$w = F(\theta) = 2 \frac{K}{G} \sqrt{\frac{R_0}{2\pi}} \sin\theta = 2R_0\gamma_0 \sin\theta \quad (3.13)$$

$$\gamma_0 = \tau_0/G$$

求得 $F(\theta)$ 之后, 得到塑性区内应变,

$$\gamma_r = 0$$

$$\gamma_\theta = \frac{1}{r} F'(\theta) = 2R_0\gamma_0 \frac{\cos\theta}{r} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K}{\tau_0} \right)^2 \gamma_0 \frac{\cos\theta}{r} = \gamma_0 \frac{R(\theta)}{r} \quad (3.14)$$

其中  $R(\theta) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K}{\tau_0} \right)^2 \cos\theta$ 。可见塑性区的形状是圆。裂纹张开位移 $\delta_i$ 为

$$\delta_i = F(\pi/2) - F(-\pi/2) = 4R_0\gamma_0 = \frac{2}{\pi} \left( \frac{K}{\tau_0} \right)^2 \gamma_0 \quad (3.15)$$

由第一章 (2.9) 式

$$\mathcal{Q} = J = \frac{K^2}{2G}$$

则由(3.12)式及 (3.15) 式, 塑性区半径与裂纹张开位移:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{2\pi} \frac{2GJ}{\tau_0^2} = \frac{J}{\pi\tau_0\gamma_0} \\ \phi_0 &= \frac{2}{\pi} \frac{2GJ}{\tau_0^2} \gamma_0 = \frac{4}{\pi} \frac{J}{\tau_0} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

## (2) III型理想弹塑性材料塑性区与弹性区应力分布及全场解的推导

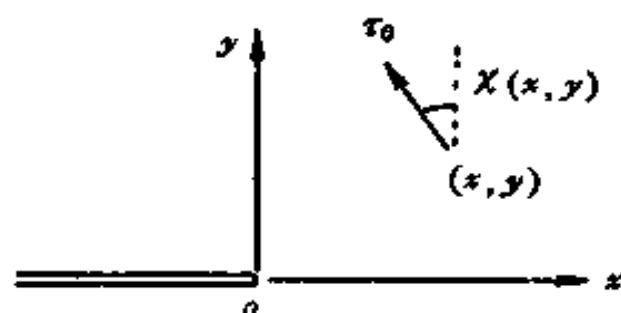


图 3.3

前面用半反逆解法得到了III型理想弹塑性材料塑性区的应力与应变的解。现在对解的过程作比较详细的推导。

### ①关于III型问题塑性区应力分布的特点

基本方程已见(3.2)至(3.7)式，由屈服条件(3.4)式，可设：

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= -\tau_0 \sin \chi \\ \tau_y &= \tau_0 \cos \chi \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

式中： $\chi = \chi(x, y)$ ，见图 3.3。(3.17)式使屈服条件(3.4)恒满足。将它代入平衡方程。由直角坐标系的平衡方程

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \quad (3.2)'$$

则有

$$-\tau_0 \cos \chi \frac{\partial \chi}{\partial x} - \tau_0 \sin \chi \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0 \quad (3.18)$$

由数学物理方程中特征线的概念：即沿特征线， $\chi = \chi(x, y)$ 的变化，必需满足一定的条件。设 $dy:dx$ 表示某一方向 $\theta$ ，则

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy = d\chi \quad (3.19)$$

(3.18)、(3.19)式可看作为 $\partial\chi/\partial x$ ,  $\partial\chi/\partial y$ 的线性代数方程。一般情况下,  $d\chi$  (即相邻两点 $\chi(x, y)$ 的变化) 可为任意, 由(3.18)、(3.19)式可求出 $\partial\chi/\partial x$ ,  $\partial\chi/\partial y$ 。但当 $dx$ 与 $dy$ 使两式左端的 $\partial\chi/\partial x$ ,  $\partial\chi/\partial y$ 的系数成比例, 即行列式

$$\begin{vmatrix} -\tau_0 \cos \chi & -\tau_0 \sin \chi \\ dx & dy \end{vmatrix} = 0$$

这个方向称为特征方向, 故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \chi}{\cos \chi} = \tan \chi$$

因为,  $dy/dx = \tan \theta$ , 所以特征线方向与剪应力 $\tau_0$ 方向垂直。

$$\text{即有 } \theta = \chi \text{ 或 } \theta = \chi \pm \pi \quad (3.20)$$

沿特征线方向, 由(3.19)式, 注意利用(3.18)式

$$\left. \begin{aligned} d\chi &= \frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y} dy \\ &= ds \left( \cos \theta \frac{\partial \chi}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

由(3.21)式, 有 $d\theta = 0$ 。于是得到下列结论: 特征线为直线。所以塑性区内应力分布如图3.4所示。如果特征线(直线族)不随时间而变化, 则每一点均为比例加载。以 $\alpha$ 表示特征线的方向,  $\beta$ 表示与其垂直的方向。 $\tau_\alpha = 0$ , 故

$$\gamma_\alpha = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.22)$$

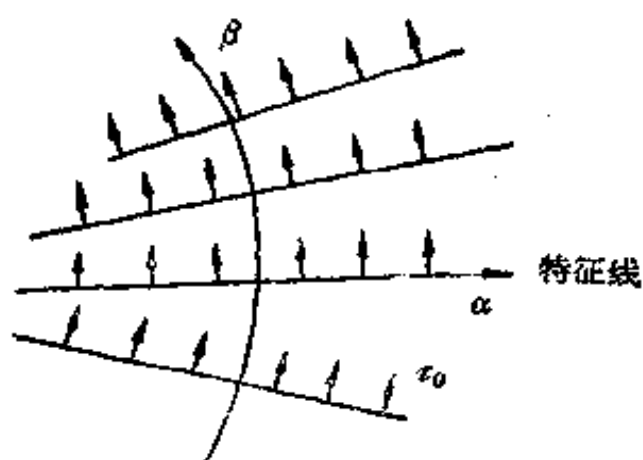


图 3.4 特征线与应力分布

在每一特征线上的位移  $w$  为常数。设无奇异点时，特征线不能在域内相交。

以上关于Ⅲ型问题塑性区的讨论，对小范围屈服、大范围屈服的情况均适用。而且不仅适用于静止裂纹问题，也适用于扩展裂纹问

题。对于后者，特征线族随时间而变化。

## ②关于Ⅲ型问题弹性区应力分布的特点

回忆线弹性力学中关于Ⅲ型问题的解：

位移： $u=0, v=0, w=w(x, y)$

$$\text{应变：} \quad \gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.4)'$$

物性关系：

$$\tau_x = G\gamma_x = G\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_y = G\gamma_y = G\frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.5)'$$

由平衡方程

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \quad (3.2)'$$

$$\text{有} \quad G\nabla^2 w = 0 \quad (3.23)$$

故  $w(x, y)$  为调和函数。它必为某复变函数  $\Phi(z)$  ( $z = x + iy$ , 勿与坐标  $x_3 = z$  相混淆) 的实部，记

$$\Phi(z) = w(x, y) + \frac{i}{G} \psi(x, y) \quad (3.24)$$

由 Cauchy-Riemann 条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

代入 (3.5) ', 得

$$\tau_x = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \quad \tau_y = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \quad (3.26)$$

其中  $\Phi(z)$  之虚部  $\varphi(x, y)$  即为应力函数。有时也采用另一复变函数  $\omega(z)$ :

$$\omega(z) = iG\Phi(z) = -\varphi(x, y) + iGw(x, y) \quad (3.27)$$

复应力

$$\tau_y + i\tau_x = G \frac{\partial w}{\partial y} + iG \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + iG \frac{\partial w}{\partial x}$$

由 (3.27) 式

$$\tau_y + i\tau_x = \omega'(z) = iG\Phi'(z) \quad (3.28)$$

则由  $K_{II}$  控制的 III 型问题的弹性应力场:

$$\tau_y + i\tau_x = \omega'(z) = iG\Phi'(z) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi z}} \quad (3.29)$$

### ③ 小范围屈服条件下 III 型问题的全场解

已经分析了塑性区内应力分布的特点: 该区域内, 特征线族为过裂纹尖端的射线族。

在弹性区内。由小范围屈服的条件, 则在无限远处应力分布已知, 即有

$$|z| \rightarrow \infty, \quad \tau_y + i\tau_x \rightarrow \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi z}} \quad (3.29)'$$

现在要解决的问题是：（a）弹性区与塑性区的边界，（b）弹性区内的应力分布。

如图3.5所示的物理平面（ $z = x + iy$ ）上，弹塑性区边界的形状虽然为未知，但在边界上各点，剪应力值为 $\tau_0$ 。与弹塑性区边界上各点对应的应力，在 $(\tau_x, \tau_y)$ 的应力平面上，位于半径为 $\tau_0$ 的圆周上。为了观察方便，将 $(\tau_x, \tau_y)$ 平面顺时针旋转 $\pi/2$ ，并将纵坐标与横坐标均除以 $\tau_0$ 。这样 $P$ 点在 $(\tau_y/\tau_0, -\tau_x/\tau_0)$ 面（称为应力平面，或 $\zeta = \xi + i\eta$ 的 $\zeta$ 平

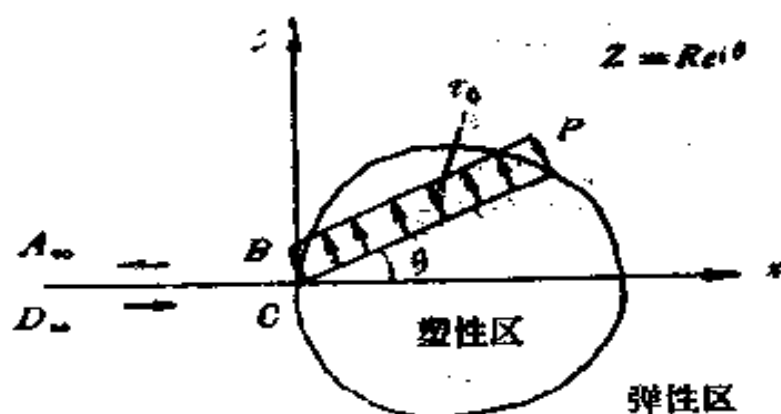


图 3.5 Ⅲ型问题的弹性区、塑性区及其交界线

面)的单位圆上，且 $P$ 点的方位与物理平面相同。应力平面上， $\xi = \tau_y/\tau_0$ ， $\eta = -\tau_x/\tau_0$ ，见图3.6。

在物理平面上， $A, B, C, D$ 点均位于自由裂纹表面上。该表面上应力分量 $\tau_r = 0$ ，所以在应力平面上，这些点必位于竖轴上。由(3.28)式

$$\zeta = \frac{\tau_y - i\tau_x}{\tau_0} = \omega'(z)/\tau_0 \quad (3.30)$$

故 $\zeta$ 为 $z$ 的函数，设其逆为

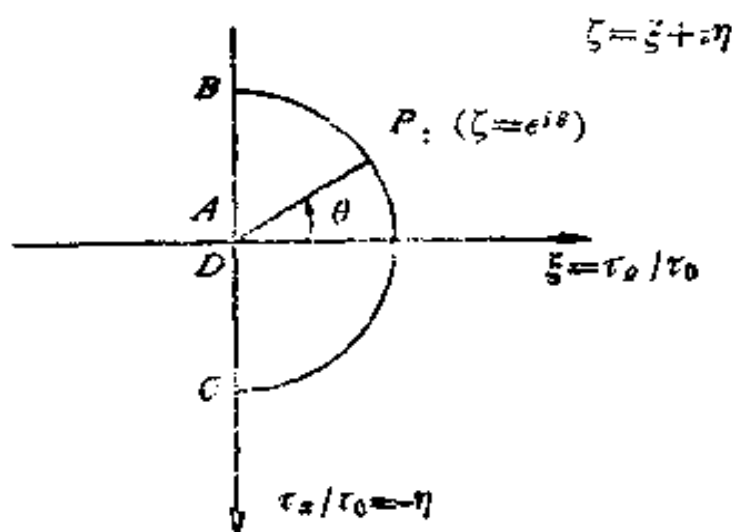


图 3.6  $\zeta$ 平面—应力平面

$$\bar{z} = F(\zeta) \quad \zeta \in |\zeta| < 1 \text{ 半圆内} \quad (3.30)'$$

即把 $\zeta$ 当作自变量, 物理平面上的 $\bar{z} = x - iy$ 当作函数。

在应力平面上的已知条件如下:

裂纹表面自由的条件

$$\text{Im} F(\zeta) \big|_{\zeta=0} = 0 \quad (3.31)$$

物理平面无限远处的渐近边界条件, 由 (3.29)' 式

$$\zeta = \frac{\tau_y - i\tau_x}{\tau_0} \rightarrow \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\bar{z}}} \quad \text{当 } |z| \rightarrow \infty$$

$$\text{即} \quad \bar{z} = F(\zeta) \rightarrow \frac{K_{II}^2}{2\pi\tau_0^2\zeta^2}, \quad \text{当 } \zeta \rightarrow 0 \quad (3.32)$$

弹塑性区交界处, 由 (3.30)' 式  $\bar{z} = R(\theta)e^{-i\theta} = F(e^{i\theta})$ 。由于塑性区的尺寸应为实数, 故有

$$\text{Im}\{e^{i\theta} F(e^{i\theta})\} = 0 \quad (3.33)$$

问题归结为, 在已知条件 (3.31) — (3.33) 的基础上, 求解  $F(\zeta)$ 。

设用待定常数法求解  $F(\zeta)$ 。

$$F(\xi) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\tau_0^2} \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{A}{\xi} + B + C\xi + D\xi^2 + \dots \right)$$

由 (3.31) 式,  $A, C, \dots$  为纯虚数,  $B, D, \dots$  为实数。

由 (3.33) 式

$$\operatorname{Im}[e^{-i\theta} + A + Be^i + Ce^{2i\theta} + De^{3i\theta} + \dots] = 0$$

故解得  $B = 1$ , 其余常数为零。即

$$F(\xi) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\tau_0^2} \left( \frac{1}{\xi^2} + 1 \right) \quad (3.34)$$

故有

$$R(\theta) = e^{i\theta} F(e^{i\theta}) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\tau_0^2} (e^{-2i\theta} + e^{i\theta}) \quad (3.34)''$$

$$= \frac{K_{II}^2}{\pi\tau_0^2} \cos\theta = 2R_0 \cos\theta$$

故弹塑性区边界为一以  $2R_0$  为直径的圆。

$$R_0 = \frac{1}{2\pi} (K_{II}/\tau_0)^2$$

此即 (3.12) 式。

由 (3.22) 式位移  $w = w(\theta)$ 。应变  $\gamma_r, \gamma_\theta$  见前面 (3.14) 式, 裂纹张开位移  $\delta$  见 (3.15) 式。

为求弹性区内的应力场, 可将 (3.34) 式代入 (3.30)

$$\bar{z} = F(\xi) = \frac{K_{II}^2}{2\pi\tau_0^2} \left( 1 + \frac{1}{\xi^2} \right)$$

故

$$\xi = \frac{\tau_y - i\tau_x}{\tau_0} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi\tau_0^2 \left( \bar{z} - \frac{K_{II}^2}{2\pi\tau_0^2} \right)}}$$

即



$$\tau_y + i\tau_x = \frac{K_n}{\sqrt{2\pi(z - R_0)}} \quad (3.35)$$

与 (3.29) 式相比较, 即相当于将“似裂纹尖端”右移  $R_0$ , 移到圆心上。

由于服从比例加载条件, 在小范围屈服条件下, 上述解也同时为增量 (流动) 理论的解。

## 2. 幂硬化材料Ⅲ型裂纹问题的弹塑性解

现在讨论在小范围屈服条件下, 幂硬化材料的Ⅲ型裂纹问题的弹塑性解。

硬化材料的应力应变关系, 按形变理论, 对于幂硬化规律

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma_0} &= \tau/\tau_0 & \text{当 } \tau \leq \tau_0 \\ \frac{\gamma}{\gamma_0} &= (\tau/\tau_0)^n & \text{当 } \tau > \tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

其中  $\tau = [\tau_r^2 + \tau_\theta^2]^{1/2}$ ,  $\gamma = [\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2]^{1/2}$

并有  $\tau_0 = G\gamma_0$ 。由上述硬化规律, 写出其应力应变关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma_a}{\gamma_0} &= \frac{\tau_a}{\tau_0} & \text{当 } \tau \leq \tau_0 \quad (a = 1, 2 \text{ 或 } r, \theta) \\ \frac{\gamma_a}{\gamma_0} &= (\tau/\tau_0)^{n-1} \frac{\tau_a}{\tau_0} & \text{当 } \tau > \tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

这里简单介绍幂硬化材料小范围屈服条件下解的结果。

如图3.7所示, 塑性区仍为一圆, 其圆心在  $\beta R_0$  处, 塑性区半径为  $R_0$ , 且有

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{2\pi} (K/\tau_0)^2 \\ \beta &= \frac{n-1}{n+1} & \text{当 } n \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

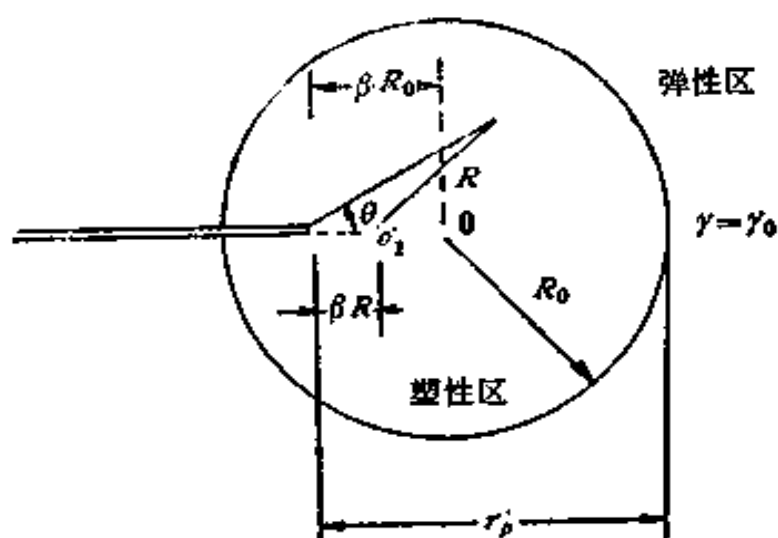


图 3.7 硬化材料Ⅱ型裂纹的弹塑性区

Rice<sup>[60]</sup>利用与流体力学中速度图法相似的解法，求得了本问题的解，具体求解过程此处从略。

塑性区形状如图，圆心在 $O$ 点。塑性区内等应变圆的圆心在 $O_1$ ，图中

$$r_p = (1 + \beta)R_0 = \frac{2}{n+1} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{II}}{\tau_0} \right)^2 \quad (3.39)$$

弹性区内的应力分布为

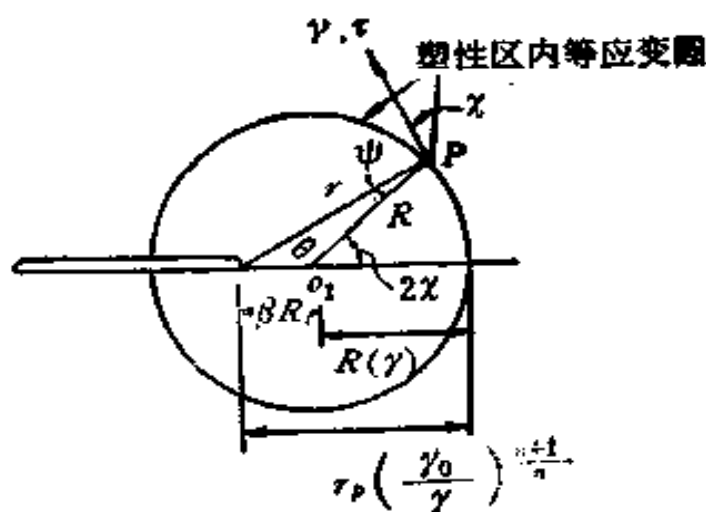


图 3.8 塑性区内等应变圆

$$\tau_r + i\tau_\theta = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}(z - \beta R_0)} \quad (3.40)$$

弹性区内的等应变线为以 $o$ 为圆心的同心圆。

塑性区内的应变分布：

塑性区内( $\gamma > \gamma_0$ )等应变圆的圆心在 $o_1$ ，如图3.8所示。

塑性区内任一点 $P(r, \theta)$ 处， $\gamma, \tau$ 如图示。因为

$$\sin(2\chi - \theta) = \beta \sin \theta$$

故  $2\chi = \theta + \arcsin[\beta \sin \theta] = \theta + \psi$

且有简单的三角关系：

$$R = \frac{r \sin \theta}{\sin 2\chi} \quad (3.41)$$

由于塑性区内等应变圆的半径已在[60]中解得：

$$R = R_0 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{II}}{\tau_0} \right)^2 \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{\frac{n+1}{n}}$$

故  $\gamma = \gamma_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\gamma}(\theta)$  (3.42)

式中  $\tilde{\gamma}(\theta) = \left[ \frac{n+1}{2n} \frac{\sin 2\chi}{\sin \theta} \right]^{\frac{n}{n+1}}$

由于  $\frac{\gamma}{\gamma_0} = (\tau/\tau_0)^n$

故  $\tau = \tau_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\tau}(\theta)$  (3.43)

$$\tilde{\tau}(\theta) = \left[ \frac{n+1}{2n} \frac{\sin 2\chi}{\sin \theta} \right]^{\frac{1}{n+1}}$$

利用关系 $\sin(2\chi - \theta) = \beta \sin \theta$ ，易证 $\tilde{\tau}(0) = 1$   
显然有 $\gamma(\theta) = \tau^n(\theta)$

最后得应变、应力与位移

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_x, \gamma_y) &= \gamma (-\sin\chi, \cos\chi) \\ (\tau_x, \tau_y) &= \tau (-\sin\chi, \cos\chi) \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

$$w = \frac{K_{II}^2 \gamma_0}{\pi \tau_0^2} \left( \frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{\frac{1}{n}} \sin\chi = \frac{K_{II}^2 \gamma_0}{\pi \tau_0^2} \left( \frac{r}{r_p} \right)^{\frac{1}{n+1}} \frac{\sin\chi}{\tau(\theta)} \quad (3.45)$$

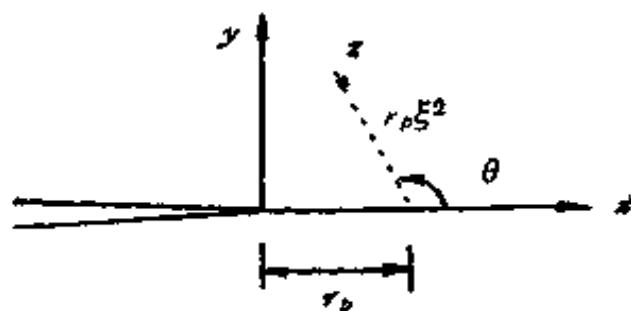


图 3.9 III型问题小范围屈服的D模型

3. III型问题在小范围屈服条件下的 Dugdale 模型的解

如图 3.9 所示的 III 型问题在小范围屈服条件下，假设裂纹延长线上存在窄带屈服区，按 Dugdale 模型来计算分析。

将裂纹看作半无限长，由 Dugdale 模型，解由两部分组成。

其一为线弹性解，以  $x = r_p$ ,  $y = 0$  点为裂纹尖端。线弹性反平面应变问题的复应力函数

$$\omega'(z) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} (z - r_p)^{-1/2}$$

其中  $z = x + iy$ 。

其二为在窄带屈服区段  $r_p$  长度上加上相等而方向相反的剪应力  $\tau_0$ ，根据弹性力学的复变函数理论，这一问题可化为 Hilbert 问题，其解为：

$$\omega'(z) = \frac{(z - r_p)^{-1/2}}{\pi} \int_0^{r_p} \tau_0 (r_p - t)^{1/2} \frac{dt}{t - z}$$

将上述两个解叠加后得

$$\begin{aligned}\omega'(z) &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} (z - r_p)^{-1/2} \\ &+ \frac{\tau_0 (z - r_p)^{-1/2}}{\pi} \int_0^{r_p} \frac{(r_p - t)^{1/2}}{t - z} dt\end{aligned}$$

设在延长裂纹端点 ( $z = r_p$ ) 处应力为有限, 即

$$\lim_{z \rightarrow r_p} (z - r_p)^{1/2} \omega'(z) = 0$$

可得

$$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\tau_0}{\pi} \int_0^{r_p} \frac{(r_p - t)^{1/2}}{t - r_p} dt = 0$$

于是有 
$$r_p = \frac{\pi}{8} \left( \frac{K_{II}}{\tau_0} \right)^2 \quad (3.46)$$

再求塑性区与原裂纹尖端 ( $x = 0$ ) 处的开口位移, 利用积分公式, 改换变量  $t = r_p - s^2$ , 则有

$$\begin{aligned}\int_0^{r_p} \frac{(r_p - t)^{1/2}}{t - z} dt &= -2\sqrt{r_p} \\ &+ 2(z - r_p)^{1/2} \tan^{-1} \left[ \left( \frac{r_p}{z - r_p} \right)^{1/2} \right]\end{aligned}$$

于是得

$$\omega'(z) = \frac{2\tau_0}{\pi} \tan^{-1} \left[ \left( \frac{r_p}{z - r_p} \right)^{1/2} \right]$$

令 
$$\frac{r_p}{z - r_p} = u^2, \quad z = r_p \left( 1 + \frac{1}{u^2} \right), \quad \text{则}$$

$$\omega'(z) = \frac{2\tau_0}{\pi} \tan^{-1} u$$

$$\omega(z) = \int \omega'(z) dz = \frac{2\tau_0}{\pi} \left[ \frac{r_p}{u} + r_p \left( 1 + \frac{1}{u^2} \right) \tan^{-1} u \right]$$

由图3.9,  $z = r_p + r_p \xi^2 e^{i\theta}$ , 则  $u = \left( \frac{r_p}{z - r_p} \right)^{1/2} = \xi^{-1} e^{-i\theta/2}$

利用公式  $\tan^{-1}(iz) = i \operatorname{th}^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$

可得

$$\begin{aligned} \tan^{-1} u &= \tan^{-1} \left( \xi^{-1} e^{-i\theta/2} \right) = \tan^{-1} \left( i \xi^{-1} e^{-i(\pi+\theta)/2} \right) \\ &= \frac{i}{2} \ln \frac{1 + \xi^{-1} e^{-i(\pi+\theta)/2}}{1 - \xi^{-1} e^{-i(\pi+\theta)/2}} \end{aligned}$$

故

$$\omega(z) = \frac{2\tau_0}{\pi} \left[ r_p \xi e^{i\frac{\theta}{2}} + \frac{i}{2} z \ln \frac{1 + \frac{1}{\xi} e^{-i(\pi+\theta)/2}}{1 - \frac{1}{\xi} e^{-i(\pi+\theta)/2}} \right] \quad (3.47)$$

$$\omega^+(z) \Big|_{\substack{\theta = \pi - 0 \\ 0 < \xi < 1}} = \frac{2\tau_0}{\pi} \left\{ r_p \xi i + x \frac{i}{2} \left( \ln \frac{1 - \xi}{1 + \xi} - i\pi \right) \right\}$$

$$\omega^-(z) \Big|_{\substack{\theta = -\pi + 0 \\ 0 < \xi < 1}} = \frac{2\tau_0}{\pi} \left\{ r_p \xi (-i) + x \frac{i}{2} \left( \ln \frac{1 + \xi}{1 - \xi} - i\pi \right) \right\}$$

式中  $\xi = \left( 1 - \frac{x}{r_p} \right)^{1/2}$ , 故塑性区 ( $0 < x < r_p$ ) 的开口位移为

$$\begin{aligned} \delta &= u_s^+(a < x < r_p, y=0) - u_s^-(a < x < r_p, y=0) \\ &= \frac{1}{G} \operatorname{Im} \omega^+(z) \Big|_{\substack{\theta = \pi - 0 \\ 0 < \xi < 1}} - \frac{1}{G} \operatorname{Im} \omega^-(z) \Big|_{\substack{\theta = -\pi + 0 \\ 0 < \xi < 1}} \\ &= \frac{2\tau_0}{\pi G} \left\{ 2r_p \xi + x \ln \frac{1 - \xi}{1 + \xi} \right\} \end{aligned}$$

在原裂纹尖端处 ( $x=0$ , 故 $\xi=1$ ) 的分开距离为:

$$\delta_t = \delta \bigg|_{\substack{x=0 \\ \xi=1}} = \frac{K_{II}^2}{2G\tau_0} \quad (3.48)$$

对小范围屈服条件下的解作如下说明:

(a) 所得应力应变场结果只与应力强度因子  $K_{II}$  及材料特性 ( $\tau_0, n$ ) 有关。即试件的几何形状、尺寸、外加载荷, 只通过  $K_{II}$  影响应力应变场。

图3.10所示的不同的  $a/b$  情形下,  $\tau^\infty$ 、 $b$ 、 $a$  等不再单独出现在结果中。唯一的具有长度量纲的量是  $(K_{II}/\tau_0)^2$ , 这是唯一的尺度。

例如对于  $n \rightarrow \infty$  的理想塑性的情形。塑性区与张开位移如图3.11所示, 其中图3.11(a)可由(3.12)式得到; 图3.11(b)可由(3.15)式得到。

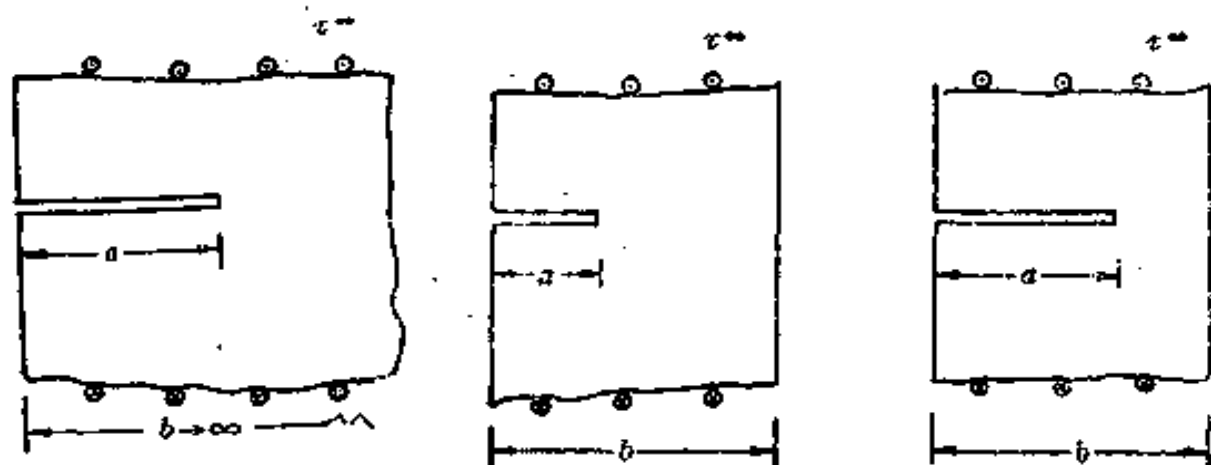


图 3.10

如图示, 在小范围屈服条件下, 由  $K$  准则, 张开位移  $\delta_t$  准则, 塑性区尺寸  $r_p$  准则, 所得到的结果是一致的。

(b) 由 (3.42) 至 (3.44) 式可见, 在塑性区内, 应

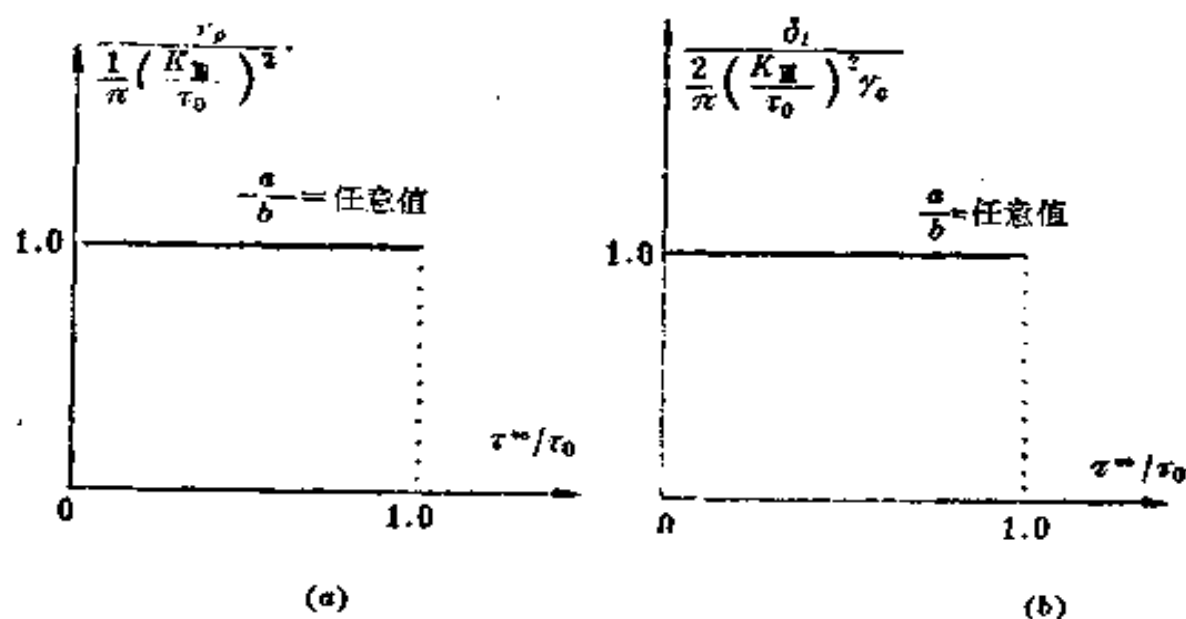


图 3.11 小范围屈服情形下, 无量纲  $\gamma_0, \delta_I$  与  $\tau^\infty/\tau_0$  的关系

变  $\gamma_0$  具有  $r^{-\frac{n}{n+1}}$  阶奇异性, 应力  $\tau_0$  具有  $r^{-\frac{1}{n+1}}$  阶奇异性。

(c) 由 (3.45) 式可知, 除理想塑性材料外, 只要材料有硬化, 则在裂纹尖端处恒有  $w|_{x=0} = 0$ , 即  $\delta_I = \text{COD} = 0$ 。

(d) 小范围屈服的解符合比例加载。

(e) 由弹性区应力分布公式可以认为, 小范围屈服的解, 可以提供修正裂纹长度的计算公式。

除了在 § 2 所述的 Dugdale 模型外, 对于小范围屈服条件下的 I、II 型问题, 目前尚无封闭解。



## § 4 大范围屈服条件下的弹塑性解

在分析韧性断裂的问题中，需要讨论大范围屈服条件下的解。对于理想弹塑性及幂硬化材料的Ⅲ型问题，这一问题已经得到了解决。而对于Ⅰ、Ⅱ型问题，目前尚未得到解，而只有用有限元的数值方法得到的一些工程结果。

大范围屈服条件下的问题，与§3所讨论的小范围屈服条件的情况不同。对小范围屈服情形，应用了渐近边界条件(3.29)'。即认为距裂纹尖端远处的应力分布，由 $K_{II}$ 应力强度因子（即 $K$ 场）来控制；而对大范围屈服条件，不能以 $K_{II}$ 场作为远处边界条件，而应该采用实际的边界条件。

如图4.1所示的有限宽的反平面应变问题。对于有限宽

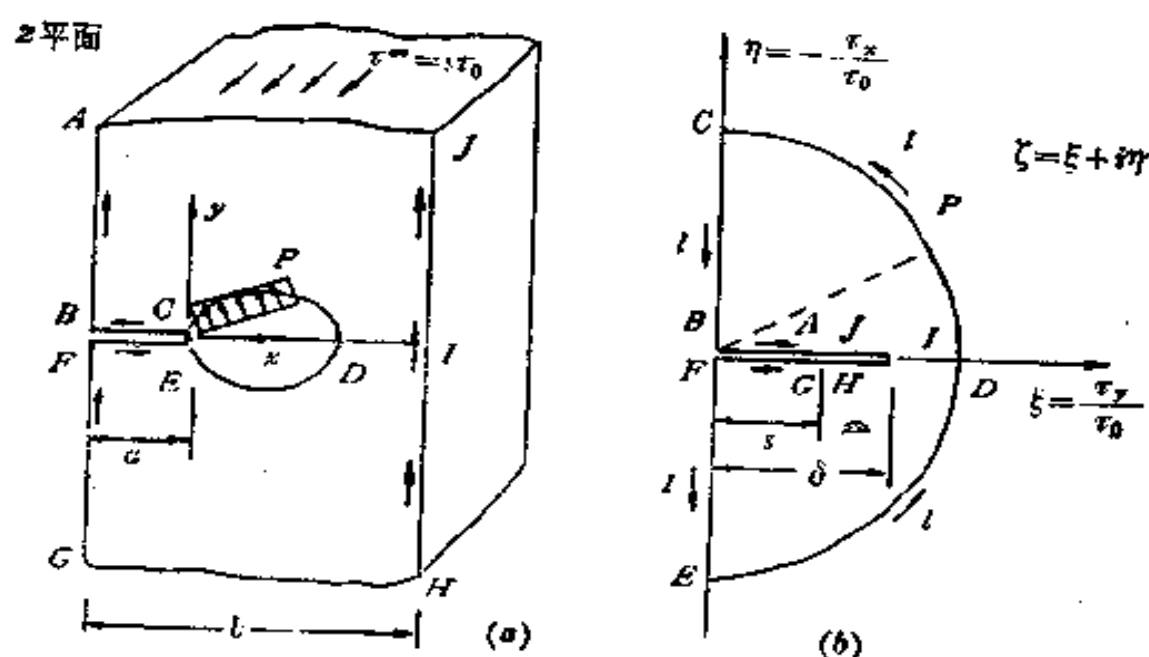


图 4.1 有限宽的Ⅲ型弹塑性问题

的Ⅲ型问题，线弹性解

$$K_{II} = \tau^{\infty} \sqrt{\pi a} \left\{ \frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b} \right\}^{1/2} \quad (4.1)$$

下面分别讨论理想弹塑性和幂硬化的情形。

### 1. Ⅲ型理想弹塑性问题

Rice 在文[61]得到这一问题的完全解。即图4.1所示的Ⅲ型问题：平衡方程同(3.2)'式，屈服条件见(3.4)式，弹性区内服从虎克定律，应力应变关系见(3.5)'。图4.1(a)的物理平面 $xoy$ ，它对应于图4.1(b)的应力平面 $\zeta$ ，即在应力平面上带割缝的半圆域。记截面净应力

$$\tau_n = \frac{\tau^{\infty} b}{b-a} \quad (4.2)$$

并引入两个无量纲表征参数 $s$ 和 $\beta$

$$s = \frac{\tau^{\infty}}{\tau_0}, \beta = \frac{b}{a} \quad (4.3)$$

而令 
$$\delta = \frac{\tau_1}{\tau_0} \quad (4.3)'$$

$s$ 表示无限远处剪应力 $\tau^{\infty}$ 、 $\delta$ 是表示图4.1(a)中I点的剪应力 $\tau_1$ 的无量纲参数、 $\tau_n$ 表示韧带的截面净应力。由

(4.2)、(4.3)式，且有 
$$\frac{\tau_n}{\tau_0} = \frac{s}{1 - 1/\beta}$$
 关系存在。在给定几

何形状参数 $\beta$ 和外加应力 $s$ 条件下， $\delta$ 是未知的。

问题归结为寻求由物理平面 $z$ （或 $\bar{z} = x - iy$ ）变换到应力平面 $\zeta = \xi + i\eta = (\tau_y - i\tau_x)/\tau_0$ 的映照函数

$$\bar{z} = a f'(\zeta) \quad (4.4)$$

设 
$$f(\zeta) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$$

$$\text{有} \quad f'(\zeta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + i \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - i \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (4.5)$$

由 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{x}{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \quad (4.6)$$

以  $\partial/\partial l$  表示图 4.1(b) 中逆时针方向的弧长的方向导数。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial l} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial l} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left( \frac{x - iy}{a} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial l} \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

在  $BC$ ,  $EF$ ,  $CDE$  段上,  $z$  与  $\frac{\partial \zeta}{\partial l}$  相垂直, 故  $(x - iy) \frac{\partial \zeta}{\partial l}$

为纯虚数, 由 (4.7) 式, 故有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0, \quad \text{不失一般性取 } \varphi = 0 \quad (4.8)$$

沿割缝上、下表面  $\frac{\partial \zeta}{\partial l} = \pm 1$ ; 故有  $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \pm \frac{x}{a}$ , 积分之

并让  $\varphi(1, 0) = 0$ , 故:

$$\text{在 } \zeta \text{ 面上, 沿 } BA \text{ 与 } GF: \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{x}{a} = -1$$

$$\text{在 } \zeta \text{ 面上, 沿 } JI \text{ 与 } IH: \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \pm \frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{x}{a} = \beta - 1$$

最后可写出:

$$\varphi(\xi, 0) = -\xi \quad 0 < \xi < s \quad (4.9)$$

$$\varphi(\xi, 0) = -\beta s + (\beta - 1)\xi \quad s < \xi < \delta \quad (4.10)$$

确定  $f(\zeta)$  函数的问题变为在边界条件 (4.8) 至 (4.10) 条件下求解调和函数  $\varphi(\xi, \eta)$  的问题。

如果求得  $f(\zeta)$ , 则由 (4.4) 式, 得弹塑性区交界面的方程

$$\frac{R(\theta)}{a} = e^{i\theta} f'(e^{i\theta}) \quad (4.11)$$

及裂纹前缘塑性区尺寸

$$R_0 = R(\theta)|_{\theta=0} = a f'(1) \quad (4.12)$$

塑性区内应变

$$\gamma_\theta = \frac{1}{r} \frac{\tau_0}{G} R(\theta) = \frac{1}{r} \frac{\tau_0}{G} a e^{i\theta} f'(e^{i\theta}) \quad (4.13)$$

位移

$$\begin{aligned} w(\theta) &= \frac{\tau_0}{G} \int_0^\theta R(\varphi) d\varphi = -\frac{\tau_0 a}{G} i \int_1^{e^{i\theta}} f'(e^{i\theta}) d e^{i\theta} \\ &= -\frac{\tau_0 a}{G} i [f(e^{i\theta}) - f(1)] \end{aligned}$$

裂纹尖端处的位移间断:

$$\delta_i = 2[w(\pi/2)] = -\frac{2\tau_0 a}{G} i [f(e^{i\frac{\pi}{2}}) - f(1)] \quad (4.14)$$

所以, 一旦求得  $f(\zeta)$  (和  $f'(\zeta)$ ) 的表达式, 则  $R(\theta)$ 、 $R_0$ 、 $\gamma_\theta$ 、 $\delta_i$  等应变位移场的各量均可求出。

再引入保角变换函数

$$\Omega = \Omega(\zeta) = i \left( \frac{\zeta^2 - \delta^2}{1 - \zeta^2 \delta^2} \right)^{1/2} \quad (4.15)$$

将应力平面  $\zeta$  上带割缝的单位半圆变换到  $\Omega$  平面上不带缝的单位半圆域。在  $\Omega$  平面上, 问题也化归为标准的可解类型, 便可求得调和函数  $f(\zeta)$ 。求得  $f(\zeta)$  之后, 此处略去具体推导过程, 直接写出结果如下:

引入第一、二类椭圆函数  $E_1(\mu, x)$ ,  $E_2(\mu, x)$

$$E_1(\mu, x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\mu^2 t^2)}}$$

$$E_2(\mu, x) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-\mu^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

则未知参数  $\delta = \tau_1/\tau_0$  可用  $s = \frac{\tau^\infty}{\tau_0}$ ,  $\beta = \frac{b}{a}$  表示如下:

$$\begin{aligned} \beta = & \{E_2(\delta^2, 1) - (1-\delta^2)E_1(\delta^2, 1)\} / \left\{ \left[ E_2(\delta^2, 1) \right. \right. \\ & \left. \left. - E_2(\delta^2, \frac{s}{\delta}) \right] \right. \\ & \left. - (1-\delta^2) \left[ E_1(\delta^2, 1) - E_1(\delta^2, \frac{s}{\delta}) \right] \right\} \quad (4.16) \end{aligned}$$

裂纹前缘塑性区尺寸

$$\begin{aligned} \frac{r_p}{K_{II}^2/(\pi\tau_0^2)} = & \left\{ (\beta-1) - \frac{2}{\pi} \left[ (\beta-1)E_2(\delta^2, 1) - \beta E_2(\delta^2, \frac{s}{\delta}) \right] \right. \\ & \left. - \frac{2\beta}{\pi} \tan^{-1} \frac{1-\delta^2}{\sqrt{(1-\delta^2 s^2)(\delta^2 s^2-1)}} \right\} \frac{\pi}{2} \frac{\tan\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right]}{s^2\beta} \quad (4.17) \end{aligned}$$

裂纹尖端张开位移 (位移间断值)

$$\begin{aligned} \frac{\delta_t}{\frac{2}{\pi}(K_{II}^2)/(G\tau_0)} = & \frac{\pi}{2} \frac{\tan\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\right]}{s^2\beta} \left\{ (\beta-1) - \frac{2}{\pi} \left( 1 + \right. \right. \\ & \left. \left. \delta^2 \right) \left[ (\beta-1)E_1(\delta^2, 1) - \beta E_1(\delta^2, \frac{s}{\delta}) \right] \right\} + \\ & + \frac{2\beta s}{\pi} \ln \left[ \frac{\sqrt{1-\delta^2 s^2} + \sqrt{\delta^2 - s^2}}{\sqrt{1-\delta^2 s^2} - \sqrt{\delta^2 - s^2}} \right] - \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{2\beta}{\pi} \tan^{-1} \frac{1+\delta^2}{\sqrt{(1-\delta^2 s^2)(\frac{\delta^2}{s^2}-1)}} \right\} \quad (4.18)$$

对无限宽板,  $\beta \gg 1$ ,  $\delta \rightarrow s$ , 则(4.17)、(4.18)式化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r_p}{a} &= \left\{ -1 + \frac{2}{\pi} \frac{1+s^2}{1-s^2} E_2 \left( \frac{2s}{1+s^2}, 1 \right) \right\} \\ \frac{\sigma_t}{a} &= \left\{ -1 + \frac{2}{\pi} (1+s^2) E_1(s^2, 1) \right\} \frac{2\tau_0}{G} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

对于小范围屈服情形, 有  $s \ll 1, \delta \ll 1$ , 则解退化为 § 3 中相应的公式。

解(4.17)、(4.18)可以用到韧带完全屈服。将解

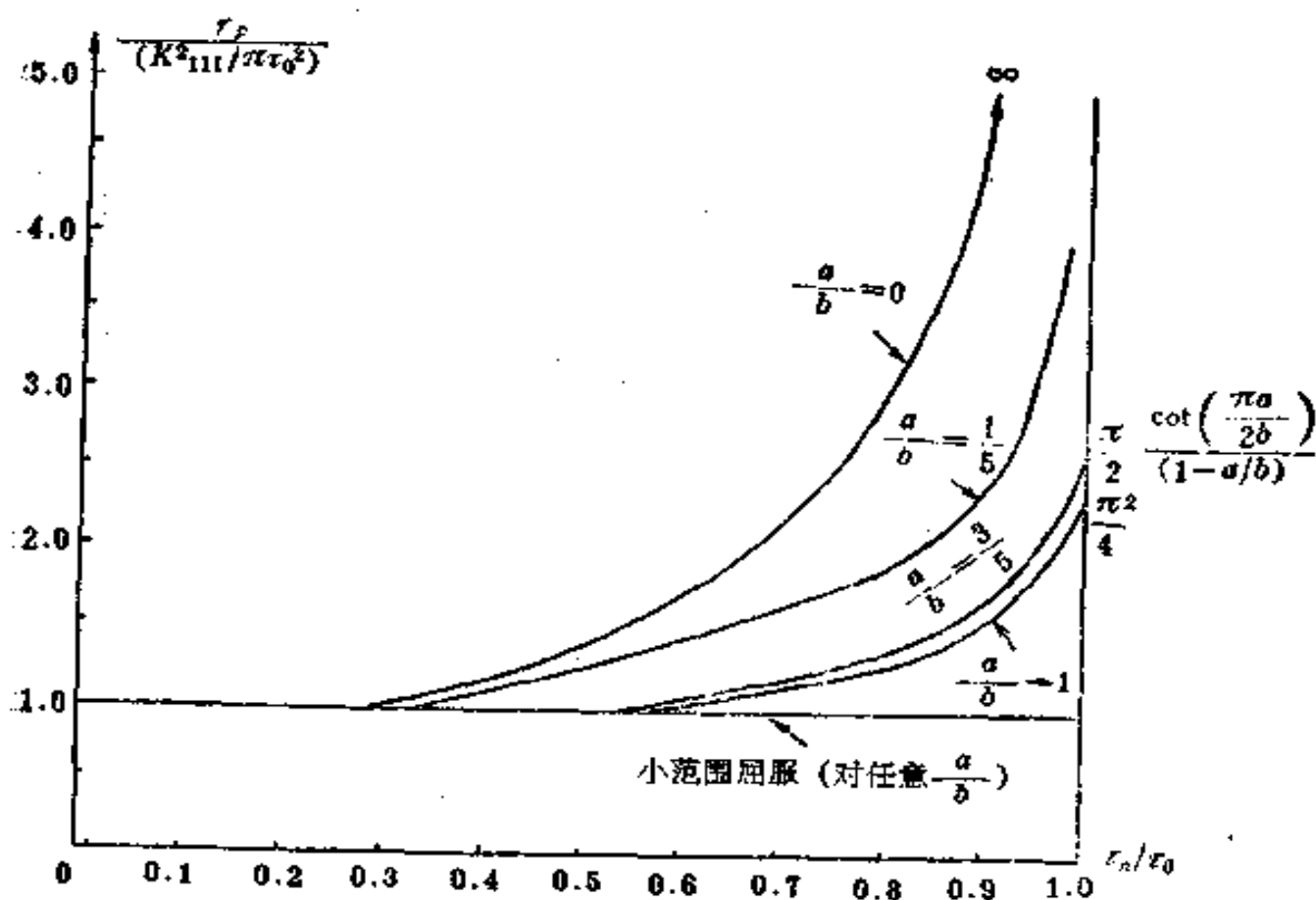


图 4.2 不同  $a/b$  条件下,  $r_p / (K_{III}^2 / \pi \tau_0^2)$  与  $\tau_a / \tau_0$  的关系

(4.17) 式作图如4.2。塑性区在大范围屈服条件下变成扁形，其水平方向尺寸为  $r_p$ ，当韧带全屈服  $\tau_n/\tau_0 = 1$ ，即有  $r_p = b - a_0$ 。

由计算结果及图4.2可见，当  $\tau_n/\tau_0 = 0.3 \sim 0.5$  时，小范围屈服的结果与大范围屈服的结果已有相当大的差异。但由

$\frac{\delta_t}{\frac{2}{\pi} \left( \frac{K_{III}^2}{G\tau_0} \right)}$  与  $\tau_n/\tau_0$  的关系式(4.18)可知：当  $\tau_n/\tau_0 \sim 0.6$  至

0.7 时，小范围屈服与大范围屈服的结果才有较大的差异（图4.3）。

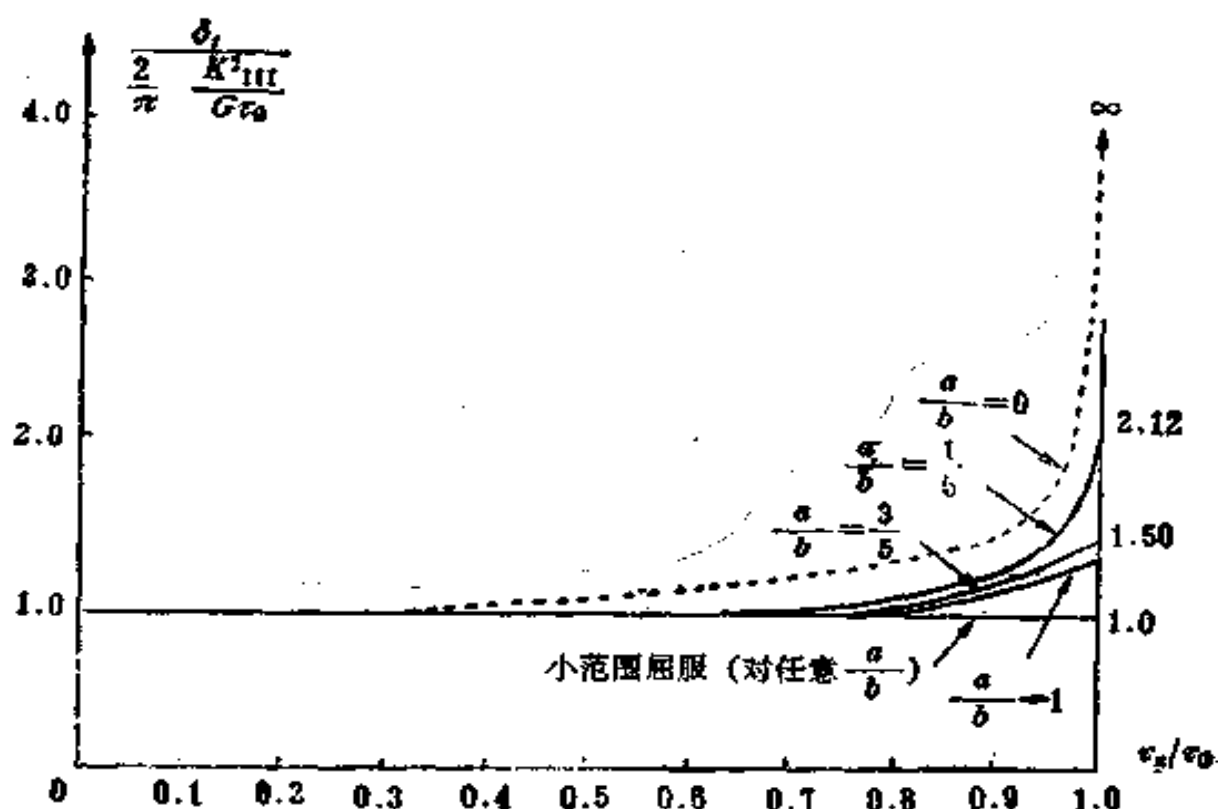


图 4.3 不同  $\frac{a}{b}$  条件下， $\frac{\delta_t}{\frac{2}{\pi} \frac{K_{III}^2}{G\tau_0}}$  与  $\tau_n/\tau_0$  的关系

由理想弹塑性Ⅲ型裂纹在大范围屈服条件下的解可知：

(1) 对应变位移场最终结果发生影响的，不仅是  $K_{II}$  参数，还与形状，尺寸，载荷等因素有关。例如塑性区的形状，大小都随它们而变化。而小范围屈服的解的特点是：局部场可以用单参数  $K_{II}$  表示。而大范围屈服问题，除了有  $(K_{II}/\tau_0)^2$  尺度以外，还有其它尺度，如  $a$ ， $b$  等。

(2)  $\frac{\tau_a}{\tau_0}$  较小时，大范围屈服的情形退化为小范围屈服的解。

(3) 在大范围屈服情形下，上述的解也是增量塑性理论情形下的解，这是Ⅲ型理想弹塑性问题的特殊性。

(4) 从断裂准则的角度来分析。如同在 § 3 所指出的，在小范围屈服条件下，用应力强度因子的  $K_{II}$  准则、塑性区尺寸  $r_p$  准则和裂纹尖端张开位移  $\delta_c$  准则，三者的结果是一致的。然而，在大范围屈服条件下，它们得到不同的结果。 $r_p$  准则相当于裂纹延长线上的应变准则，这是因为：

$$\gamma_v(x, 0) = \frac{\tau_0}{G} - \frac{r_p}{x}$$

而  $\delta_c$  准则相当于应变在整个塑性区的积分，这是因为，由 (3.9)，(3.15) 式

$$\gamma_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \gamma_0 \frac{R(\theta)}{r}$$

$$\delta_c = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \gamma_\theta d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \gamma_0 R(\theta) d\theta$$

三者相比较， $K_{II}$  准则得到的断裂时净截面应力的估计值最高，而  $\delta_c$  准则得到的结果居中。而由图 4.2，图 4.3 相比，在  $r_p$  的图中，大范围屈服与小范围屈服条件下的结果差别最



大, 所以 $r_p$ 准则所得的结果比较保守。如果用塑性区尺寸修正裂纹长度, 可使 $K_{II}$ 准则的结果更接近于 $\sigma_c$ 准则。

在大范围屈服条件下, 对于理想弹塑性材料还缺少一个可以取代线弹性断裂力学中, 用应力强度因子描述局部变形程度的单一参数。

## 2. 幂硬化材料的Ⅲ型裂纹问题

由于许多实际材料是具有硬化性质的, 而幂硬化律是对材料硬化既方便而又较合适的描述。Rice在形变理论的基础上, 用解析法和数值方法相联合, 求解了这一问题<sup>[69]</sup> ( $b = \infty$ )。

如图4.4所示, 硬化材料的裂纹尖端被塑性区所包围。

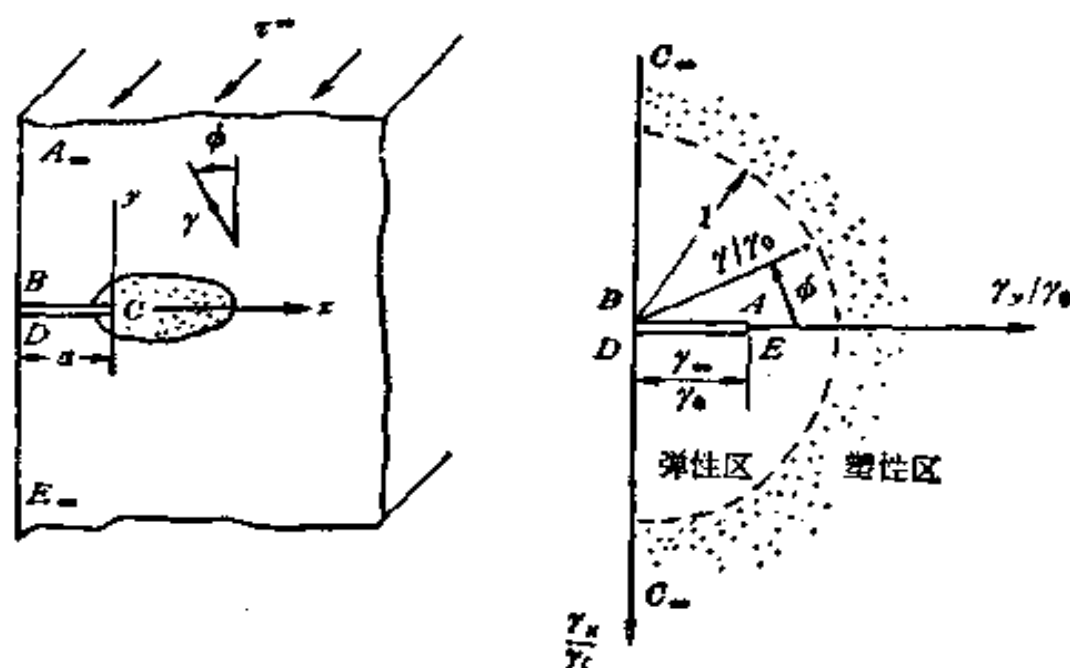


图 4.4 硬化材料Ⅲ型裂纹的弹塑性问题

将物理平面 $z$ 上的点, 转换到应变平面 $\zeta = \xi + i\eta = \frac{1}{\gamma_0} (\gamma_y - i\gamma_x)$

上去。在 $\zeta$ 面上, 含割缝的半圆以内为弹性区; 半圆以外为塑性区; 半圆为弹塑性区交界线。将问题延拓为带缝的整个单位圆。化归为 Hilbert 问题求解。

用计算机求得硬化指数  $N = 0.1$  ( $N = 1/n$ ) 情形下的一个算例之应变沿裂纹延长线的分布与塑性区的形状, 其应力-应变关系与计算结果均表示于图 4.5 上。

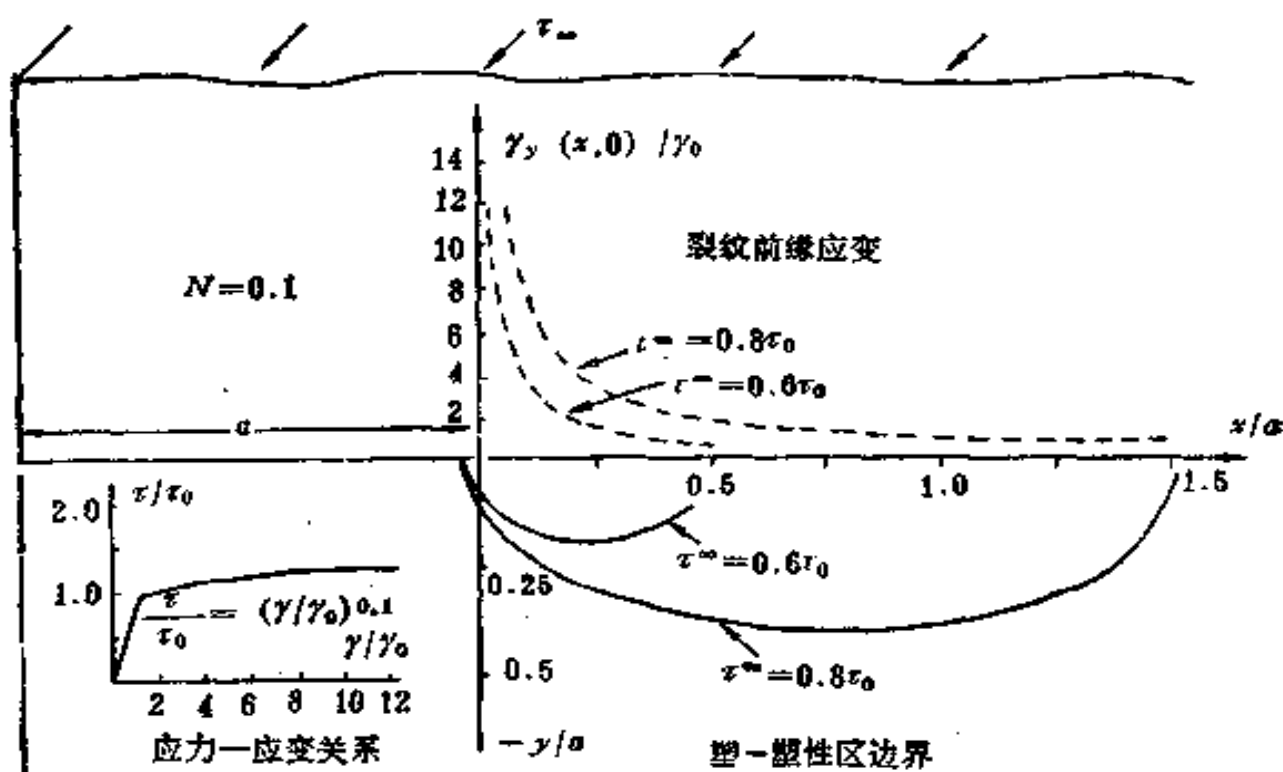


图 4.5 硬化材料Ⅱ型问题的计算例

由图示结果可见: (1) 当屈服程度较深时, 与小范围屈服的解不同, 此时塑性区的形状不是圆形, 弹塑性区边界与裂纹上、下表面相交, 裂纹尖端被塑性区所包围。且随着  $s = \tau^\infty/\tau_0$  的增大, 塑性区沿  $x$  轴方向增长的速度比沿  $y$  轴方向增长得快, 即塑性区趋向扁平状。(2) 计算表明硬化指数对塑性区的形状与尺寸有可观的影响。

由于裂纹尖端附近是比例加载, 预期形变理论的解可以作为增量理论的近似解。

Amazigo<sup>(62)</sup>利用 Mellin 变换和 Weiner-Hopf 方法求

得了Ⅲ型中心裂纹在幂硬化条件下的精确解。讨论了下列幂硬化材料

$$\gamma/\gamma_0 = \alpha(\tau/\tau_0)^n \quad (4.20)$$

计算了无量纲  $J$  积分和张开位移

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{J/(\gamma_0 \tau_0 a)}{\alpha \left( \frac{b-a}{b} \right) (P/P_{\text{limit}})^{n+1}} \\ \bar{\delta} &= \frac{\delta/(\gamma_0 a)}{\alpha (P/P_{\text{limit}})^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

其中  $\alpha$ 、 $n$  分别为硬化系数和硬化指数； $a$ 、 $b$  的含义同前。 $P = \tau_0 b$ ， $P_{\text{limit}} = \tau_0(b-a)$  为韧带完全屈服的极限载荷。求得了不同  $n$ 、 $b/a$  时， $J$ 、 $\delta$  的关系曲线，见图 4.6。

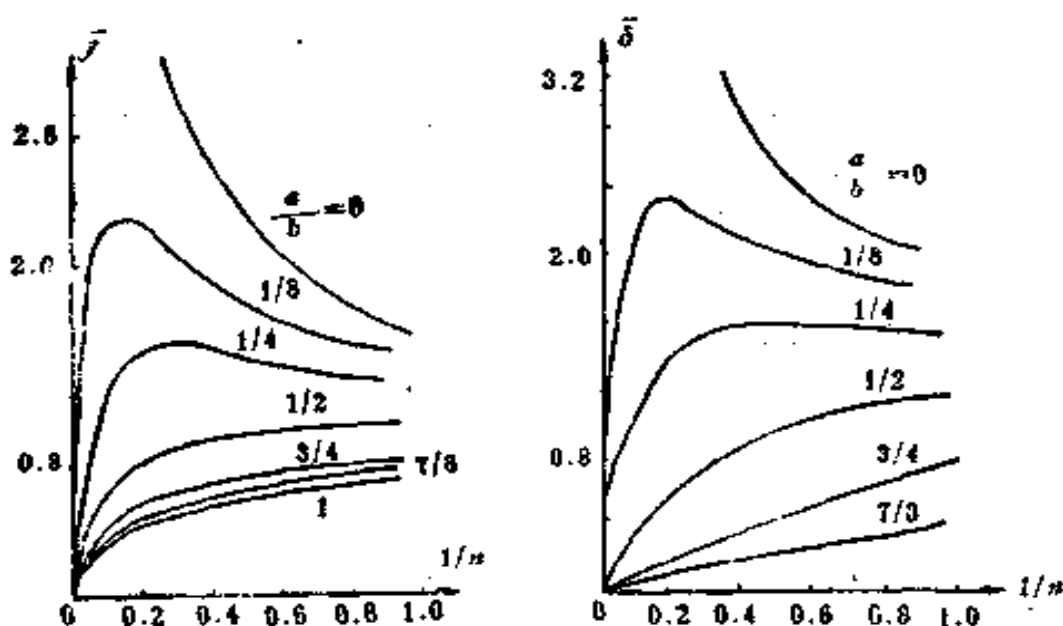


图 4.6 不同  $n$ 、 $a/b$  值下Ⅲ型问题  $J$ 、 $\delta$  的精确解

以上介绍了Ⅲ型裂纹问题，在大范围屈服条件下的解。对于大范围屈服条件下，I、II型裂纹问题，除了Dugdale模型外，目前尚无解。

## § 5 局部解 (渐近解)(一) ——Ⅲ型问题

以上 § 3, § 4, 介绍的均是“全场解”, 即满足外部边界条件的解。§ 3 的小范围屈服解满足远处  $K$  场的边界条件; 而 § 4 的大范围屈服解则满足实际的边界条件。

所谓“局部解”的含义是指在裂纹尖端附近的主奇异解, 它实际上是  $r \rightarrow 0$  的渐近解。除了裂纹表面自由条件以外, 不要求满足远处边界条件。

线弹性断裂力学的  $K$  场实际上就是局部解。这个  $K$  场就是 Williams 展开式中的主奇异项。只是所讨论的材料是线弹性材料。不管是什么形状、什么尺寸、受什么荷载的试件中, 在裂纹尖端附近就是这样的  $K$  场。而且  $r$  愈小 ( $r \rightarrow 0$ ), 它就越占主导地位。

为了能更好地阐明局部解的含义, 并且能和某些精确解相比较, 我们仍从Ⅲ型问题讨论起。然后在下节再介绍Ⅰ型和复合型的某些结果。

### 1. Ⅲ型问题 (理想弹塑性材料)

以  $\varphi(x, y)$  表示应力函数, 无论是弹性或塑性情形, 应力均可表示为:

$$\tau_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (5.1)$$

因为这是平衡方程所要求的。在极坐标系中, 上式可表示为

$$\tau_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad \tau_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (5.1)'$$

(5.1) 与 (5.1)' 式不受材料的限制。

弹性区与塑性区在裂纹尖端附近, 如图 5.1 所示。

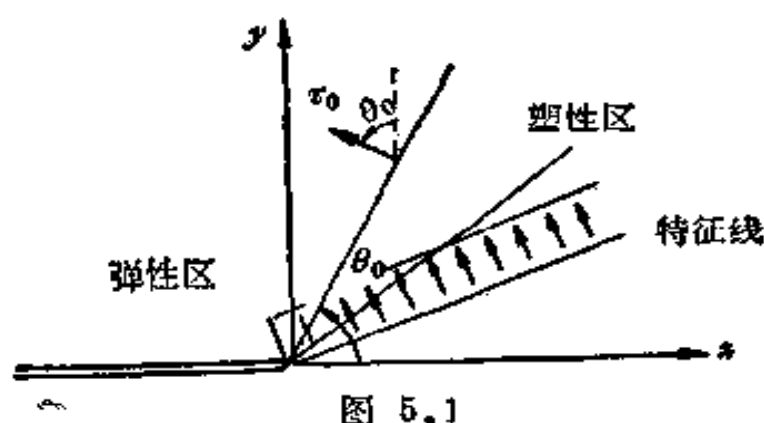


图 5.1

塑性区:  $\theta_0 \geq \theta \geq -\theta_0$ , 可以只讨论上半平面。

$$\tau_r = 0, \quad \tau_\theta = \tau_0 \quad (5.2)$$

故由 (5.1)'

$$\varphi = -\tau_0 r + \text{const} \quad (5.3)$$

不失广泛性, 可令 (5.3) 式中的常数 const 为零。位移为  $w$ , 由 (3.22) 式

$$w = F(\theta) \quad (5.4)$$

$w(\theta)$  为奇函数, 要求  $w(0) = 0$ ,

$$\gamma_r = \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \gamma_\theta = \frac{1}{r} \frac{dF(\theta)}{d\theta} \quad (5.5)$$

注意, (5.1) 至 (5.5) 式不仅适用于尖端局部, 而且适用于全塑性区。

弹性区: 由 (3.24) 式,  $\frac{1}{G} \varphi(x, y)$  为复变函数  $\Phi(z)$  的虚部, 故满足

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (5.6)$$

(5.6) 式实际上是变形协调方程, 因为将

$$\gamma_x = \frac{1}{G} \tau_x = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \gamma_y = \frac{1}{G} \tau_y = -\frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

代入变形协调方程

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} = 0$$

即得 (5.6) 式, 由裂纹面自由

$$(\tau_y)_{\theta=\pi} = 0$$

得

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{\theta=\pi} = 0 \quad (5.7)$$

弹塑性区交界  $\theta = \theta_0$  处, 应力连续, 故  $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial n}$  连续 ( $n$  表示交界线的法线方向), 故有

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{\theta=\theta_0} = -\tau_0 \sin \theta_0, \quad -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{\theta=\theta_0} = \tau_0 \cos \theta_0 \quad (5.8)$$

比较 (5.7) 与 (5.8) 之第二式, 得  $\tau_0 \cos \theta_0 = 0$ , 故

$$\theta_0 = \pi/2$$

(5.8) 中第一式成为

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{\theta=\pi/2} = -\tau_0 \quad (5.9)$$

局部解的分区示意图见图 5.2。

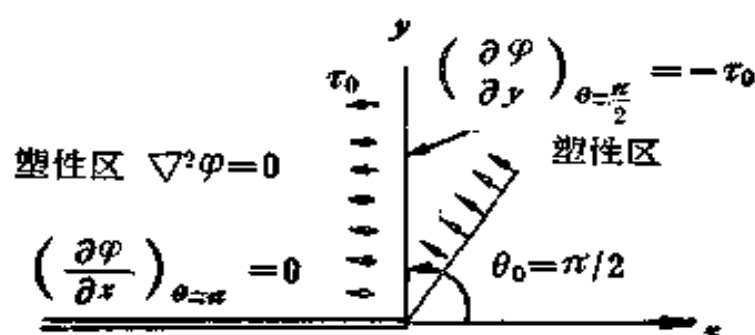


图 5.2 I 型局部解分区示意图

在弹性区内满足 (5.7)、(5.9) 条件的方程 (5.6) 的解显然为:

$$\varphi = -\tau_0 y \quad (5.10)$$

弹性区应力分布:

$$\tau_x = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\tau_0, \quad \tau_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (5.11)$$

由 (3.24) 式

$$\Phi(z) = w(x, y) + \frac{i}{G} \varphi(x, y)$$

将 (5.11) 式代入上式, 求得弹性区位移

$$w(x, y) = -\frac{\tau_0}{G} x + C \quad (5.12)$$

上式也可以从 Cauchy-Riemann 条件 (3.25) 式得到。由  $\theta = \theta_0$  交界处位移连续条件, (5.12) 式中常数  $C$

$$C = F(\pi/2)$$

则 
$$w = -\frac{\tau_0}{G} x + F(\pi/2) \quad (5.12)'$$

上述局部解不受屈服范围大小的限制。在这个局部解中, 弹性区的应力也达到  $\tau_0$ , 故也可以当作塑性区了。其特征线的形状如图 5.3(a) 所示。注意到图 5.3(b)(c), 因为局部解中塑性区对应于单位半圆  $BPC$  段, 而弹性区只对应于  $B$  点 (或  $C$  点) 附近的单位半圆角点的区域。

在弹性区  $B$  点局部, 有

$$\tau_x = -\tau_0, \quad \tau_y = 0$$

对于大范围屈服问题, 这个局部解也适用。所以在局部解中, 裂纹尖端似乎全部被塑性区所包围, 而实际的塑性区则不一定。由图 5.3(a) 可见, 塑性区分为扇形区与均匀区。扇形区与均匀区的分界线也有可能是实际的塑性区的边界线。

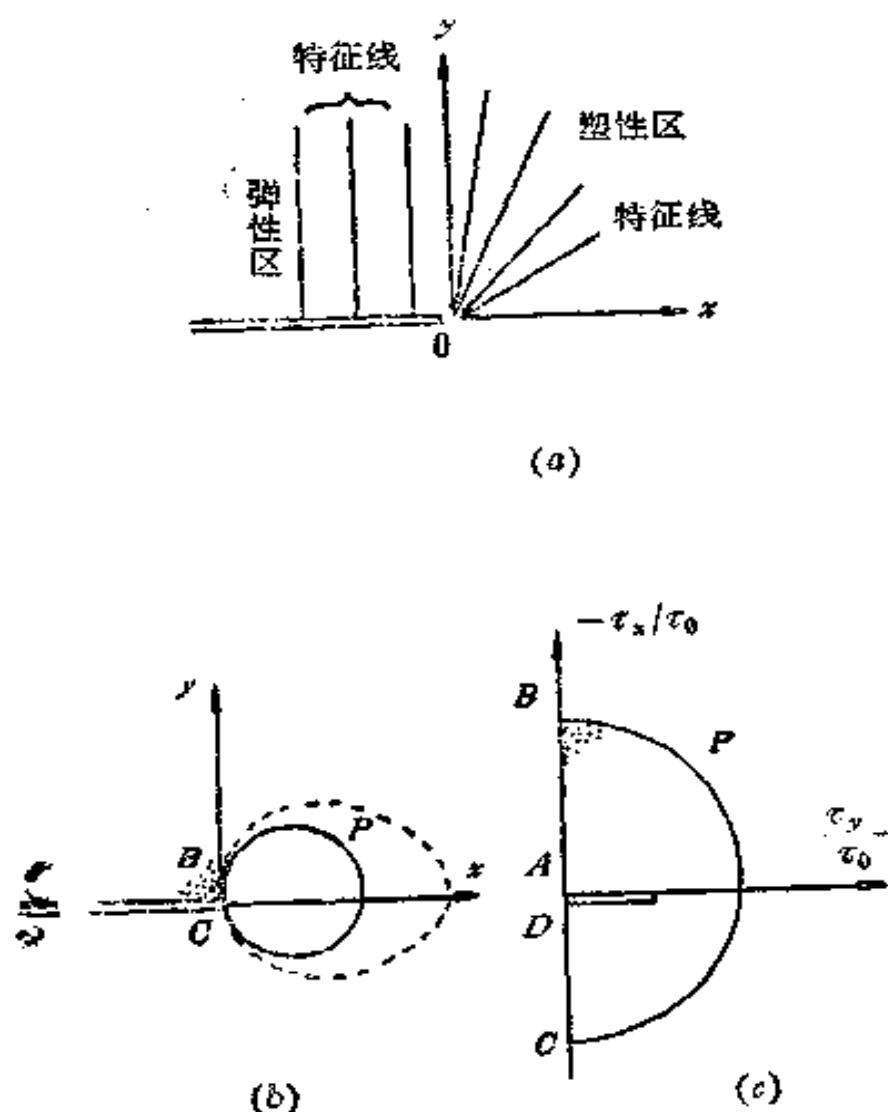


图 5.3 III型问题的局部解

小范围屈服条件下，实际的弹塑性区分界线是圆；大范围屈服情形下，塑性区形状如同图5.3 (b) 中虚线所示。局部解的弹、塑性区分界线是直线，它是实际的弹塑性区分界线在裂纹尖端处的切线。

$w = F(\theta)$  不能由局部解定出，这是由于理想塑性材料的缘故，也恰恰是因为这个解不受屈服范围大小的限制。由

(5.5) 式（它适用于全部塑性区）可知，当  $r = R(\theta)$  时  $\gamma_s = \gamma_0$



$$\gamma_\theta = \frac{1}{R(\theta)} F'(\theta)$$

故  $F'(\theta) = \gamma_\theta R(\theta)$ , 于是有  $\gamma_\theta = \frac{\gamma_0}{r} R(\theta)$ 。对于小范围

屈服, 由 (3.13) 式  $w = F(\theta) = \frac{1}{\pi} \frac{K_{II}^2}{G\tau_0} \sin\theta$ 。但对于大范围屈服的各种问题,  $R(\theta)$  的形状与大小互不相同, 不可能企图由局部解定出一个共同的  $R(\theta)$ 。

## 2. III型 (幂硬化材料) 问题

设应力函数的渐近展开的主项

$$\varphi = -A\tau_0 r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\varphi}(\theta) \quad A \neq 0 \quad (5.13)$$

这里, 预先看出上式中  $r$  的幂次是  $n/(n+1)$ 。在解 I 型问题时, Hutchinson<sup>[63]</sup> 及 Rice 与 Rosengren<sup>[64]</sup> (简称 HRR 奇异解, 下节将介绍之) 假定应力函数  $\varphi$  具有  $r^s$  次幂, Hutchinson 靠数值计算来确定  $s$  的幂次; Rice 与 Rosengren 则先看出  $r$  的幂次。其根据是: 由 J 积分的守恒性, 应力与应变的乘积必须是  $r^{-1}$  量级。而由材料的幂硬化律, 应变的  $r$  的幂次应是应力的  $r$  幂次的  $n$  倍。故

$$\tau_\theta \sim r^{-\frac{1}{n+1}}, \quad \gamma_\theta \sim r^{-\frac{n}{n+1}}$$

于是有

$$\left. \begin{aligned} \tau_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -A\tau_0 r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\varphi}'(\theta) \\ \tau_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = A\tau_0 \frac{n}{n+1} r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\varphi}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

由于

$$\tau^2 = \tau_r^2 + \tau_\theta^2 = A^2 \tau_0^2 r^{-\frac{2}{n+1}} \left[ \tilde{\varphi}'^2(\theta) \right]$$

$$+ \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \tilde{\varphi}^2(\theta) \Big] \\$$

$$\text{则} \quad \tau = A \tau_0 r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\tau}(\theta) \quad (5.15)$$

$$\text{式中} \quad \tilde{\tau}(\theta) = \left[ \tilde{\varphi}^{\frac{n}{n+1}}(\theta) + \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \tilde{\varphi}^2(\theta) \right]^{1/2} \quad (5.16)$$

设按塑性形变理论，写出其应力应变关系。对幂硬化材料的局部解，可略去弹性变形。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma_0} &= \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \\ \gamma_r &= \frac{\gamma}{\tau(\gamma)} \tau_r, \quad \gamma_\theta = \frac{\gamma}{\tau(\gamma)} \tau_\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

由上式之第一个式子

$$\frac{\gamma}{\tau} = \frac{\gamma_0}{\tau_0} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{n-1} = \frac{\gamma_0}{\tau_0} \left[ A r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\tau}(\theta) \right]^{n-1}$$

将 (5.14) 与上式代入 (5.17) 第二式，

$$\left. \begin{aligned} \gamma_r &= -\gamma_0 A^n r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\tau}^{n-1}(\theta) \tilde{\varphi}'(\theta) \\ \gamma_\theta &= \gamma_0 A^n \frac{n}{n+1} r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\tau}^{n-1}(\theta) \tilde{\varphi}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

$$\gamma = (\gamma_r^2 + \gamma_\theta^2)^{1/2} = \gamma_0 A^n r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\gamma}(\theta),$$

$$\tilde{\gamma}(\theta) = \tilde{\tau}^n(\theta) \quad (5.19)$$

由协调方程

$$\frac{\partial \gamma_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r \gamma_\theta) = 0 \quad (5.20)$$

因此有

$$\begin{aligned} w &= -(n+1)\gamma_0 A^n r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\tau}^{n-1}(\theta) \quad \tilde{\varphi}'(\theta) \\ &= \gamma_0 A^n r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{w}(\theta) \end{aligned} \quad (5.21)$$

其中  $\tilde{w}(\theta) = -(n+1) \tilde{\tau}^{n-1}(\theta) \tilde{\varphi}'(\theta)$ 。

将 (5.18) 式代入 (5.20) 式, 消去  $\gamma_0 A^n r^{\frac{1}{n+1}}$ , 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[ \tilde{\tau}^{n-1}(\theta) \tilde{\varphi}'(\theta) \right] \\ + \frac{n}{(n+1)^2} \tilde{\tau}^{n-1}(\theta) \tilde{\varphi}(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

上式对  $\tilde{\varphi}(\theta)$  为齐次, 故解可任意乘一倍数。注意  $\tilde{\tau}(\theta)$  中含有  $\tilde{\varphi}'(\theta)$ 。(5.22) 式为  $\tilde{\varphi}(\theta)$  的二阶非线性常微分方程。其边界条件如下:

$$\begin{aligned} \text{由反对称条件, } \quad \tilde{\tau}_r|_{\theta=0} = 0, \quad \text{由 (5.14) 式} \\ \tilde{\varphi}'(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \text{由裂纹面自由, } \quad \tilde{\tau}_\theta|_{\theta=\pi} = 0, \quad \text{由 (5.14) 式有} \\ \tilde{\varphi}(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

不失一般性, 由规格化条件, 可规定  $\tilde{\tau}(0) = 1$ 。  
故由 (5.19) 式,  $\tilde{\nu}(0) = 1$ , 即

$$\left[ \tilde{\varphi}'^2(0) + \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \tilde{\varphi}^2(0) \right]^{1/2} = 1$$

$$\text{得} \quad \tilde{\varphi}(0) = \frac{n+1}{n} \quad (5.25)$$

现证明边界条件 (5.24) 恒被满足。

注意到 J 积分

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Gamma_c} (W n_x - \sigma_{ij} n_i u_{j,x}) ds \\ &= \int_{\Gamma_c (r=\text{const})} (W n_x - T_s u_{s,x}) ds \end{aligned}$$

如果允许 J 积分的路径起点在裂纹下表面任一点，终点在上表面另一任意点，则 J 积分与  $\Gamma_c$  路径无关的证明，必须要求满足裂纹表面为自由的条件。

此处已设应力函数如 (5.13) 式，则可以证明，如只取  $\Gamma_c$  为圆心位于裂纹尖端的圆，J 值与  $\Gamma_c$  的圆半径  $r$  无关。因为

$$\begin{aligned} IV &= \int_0^r \tau d\gamma = \int_0^r \tau_0 (\gamma/\gamma_0)^{1/n} d\gamma = \frac{\tau_0}{\gamma_0^{1/n}} \frac{n}{n+1} \gamma^{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{n}{n+1} \tau_0 \gamma_0 \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1} \tau_0 \gamma_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) \left( \frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \end{aligned}$$

引入 (5.19) 式

$$\begin{aligned} IV &= \frac{n}{n+1} \tau_0 \gamma_0 \left[ A^n r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\gamma}(\theta) \right]^{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{n}{n+1} \tau_0 \gamma_0 A^{n+1} r^{-1} \tilde{\tau}^{\frac{n+1}{n}}(\theta) \end{aligned}$$

由 (5.14) 式

$$I_z = \tau_r = -A \tau_0 r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\varphi}'(\theta)$$

$$u_{\gamma, \gamma} = \frac{\partial w}{\partial \gamma}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[ \gamma_0 A^n r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{w}(\theta) \right] \\ &= \gamma_0 A^n \left[ \frac{1}{n+1} \cos \theta r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{w}(\theta) \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{w}'(\theta) \right] \\ &= \gamma_0 A^n r^{-\frac{n}{n+1}} \left[ \frac{1}{n+1} \cos \theta \tilde{w}(\theta) - \sin \theta \tilde{w}'(\theta) \right] \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-\pi}^{\pi} (Wn_r - T_s n_{s,r}) ds \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{n}{n+1} \tau_0 \gamma_0 A^{n+1} r^{-1} \tilde{\tau}^{n+1}(\theta) \cos \theta \right. \\
&\quad \left. - \left( -A_0 \tau_0 r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\varphi}'(\theta) \right) \gamma_0 A^n r^{-\frac{n}{n+1}} \left[ \frac{1}{n+1} \cos \theta \tilde{w}(\theta) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin \theta \tilde{w}'(\theta) \right] \right\} r d\theta = A^{n+1} I_n \gamma_0 \tau_0 \quad (5.26)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{n}{n+1} \tilde{\tau}^{n+1}(\theta) \cos \theta + \tilde{\varphi}'(\theta) \left[ \frac{\cos \theta}{n+1} \tilde{w}(\theta) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin \theta \tilde{w}'(\theta) \right] \right\} d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \left\{ \frac{n}{n+1} \tilde{\tau}^{n+1}(\theta) \cos \theta + \tilde{\varphi}'(\theta) \left[ \frac{\cos \theta}{n+1} \tilde{w}(\theta) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sin \theta \tilde{w}'(\theta) \right] \right\} d\theta \quad (5.27)
\end{aligned}$$

因此,  $J$  与积分回路圆周  $\Gamma_c$  的半径无关。由于在图5.4中 闭路积分应为零。有

$$\int_{\Gamma_{c_1}} \{ \dots \} ds = \left[ \int_{\Gamma_{c_2}} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_{c_2}} \right] \{ \dots \} ds$$

$\Gamma_{c_1}$ ,  $\Gamma_{c_2}$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  如图5.4所示。

故有

$$\int_{\Gamma_1} (Wn_r - T_s n_{s,r}) ds + \int_{\Gamma_2} (Wn_r - T_s n_{s,r}) ds = 0$$

在  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  上,  $T_s$  与  $n_s$  均异号, 故两积分相等, 则

$$\int_{\Gamma_i} T_{\theta} u_{\theta, \theta} ds = 0$$

故在 $\Gamma_i$ 上, 必有 $T_{\theta} = 0$ 。即当 $\theta = \pi$ 处,  $\tau_{\theta} = 0$ 。

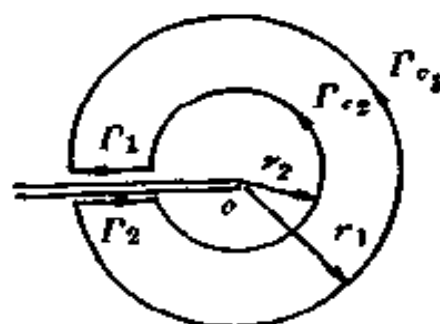


图 5.4 积分回路

故证得 (5.24) 式自动满足。

因此二阶常微分方程 (5.21) 在求解时, 只要考虑边界条件 (5.23) 与 (5.25)。可以用数值解法解出 $\varphi(\theta)$ 。

在以上的计算中, 局部解的乘数 $A$ 是不定的。正如同线弹性的局部解中, 应力强度因子 $K$ 不确定一样。

现对上述局部解作几点说明:

(1) 以上的分析不受屈服范围大小的限制, 但却受到小变形假定与硬化指数 $n$ 值的限制, 这点下文还将讨论之。

(2) 如所预料, 应力应变有如下奇异性

$$\tau_{\theta} \sim r^{-\frac{1}{n+1}}, \quad \gamma_{\theta} \sim r^{-\frac{n}{n+1}}$$

(3) 局部解的乘数 $A$ 可以与 $J$ 积分建立关系, 即由 (5.26) 式

$$A = \left( \frac{J}{I_n \tau_0 \gamma_0} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

所以, 局部解的最终形式如下 (其中 $a = 1, 2$ 或 $r, \theta$ );

由 (5.14) 式

$$\tau_z = \tau_0 \left( \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\tau}_z(\theta) \quad (5.28)$$

$$\tau = \tau_0 \left( \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\tau}(\theta)$$

式中  $\tilde{\tau}_r(\theta) = -\tilde{\varphi}'(\theta)$ ,  $\tilde{\tau}_\theta(\theta) = \frac{n}{n+1} \tilde{\varphi}(\theta)$ ,  $\tilde{\tau}(\theta)$  见

(5.16) 式

由 (5.18) 式

$$\left. \begin{aligned} \gamma_z &= \gamma_0 \left( \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\gamma}_z(\theta) \\ \gamma &= \gamma_0 \left( \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\gamma}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

式中

$$\tilde{\gamma}_r(\theta) = -\tilde{\tau}^{n-1}(\theta) \tilde{\varphi}'(\theta)$$

$$\tilde{\gamma}_\theta(\theta) = \frac{n}{n+1} \tilde{\tau}^{n-1}(\theta) \tilde{\varphi}(\theta)$$

$$\tilde{\gamma}(\theta) = \tilde{\tau}^n(\theta)$$

由 (5.21) 式

$$w = \gamma_0 r^{\frac{1}{n+1}} \left( \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{w}(\theta) \quad (5.30)$$

式中

$$\tilde{w}(\theta) = (n+1) \tilde{\gamma}_r(\theta)$$

$$\tilde{w}'(\theta) = \tilde{\gamma}_\theta(\theta)$$

上述所得到的应力应变位移场称为 III 型问题的 J 场。

只要用数值解法求出了  $\tilde{\varphi}(\theta)$  后, 全部应力应变位移场的角分布函数均已得到,  $I_n$  值也可以积分出来。所以, 这是一个单参数场, 也是增量理论的局部解。Riedel[152]研究了

上述问题的数值解。这个Ⅲ型问题的局部解，与Ⅰ型问题的HRR局部解是相对应的。

然而，对于Ⅲ型问题，可以求得局部解的解析表达式。现在介绍一种以前尚未见诸文献的用解析求解的方法。

其基本方法是改变自变量，取应变 $\gamma_x$ 、 $\gamma_y$ 为自变量，以 $x$ 、 $y$ 为未知函数。

先用直角坐标来描写。

平衡方程：
$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0$$

因
$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial \tau_y} \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(\tau_x, \tau_y)} \right)^{-1}$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial \tau_x} \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(\tau_x, \tau_y)} \right)^{-1}$$

故
$$\frac{\partial x}{\partial \tau_x} + \frac{\partial y}{\partial \tau_y} = 0 \quad (5.31)$$

协调方程：
$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} = 0$$

因
$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} = - \frac{\partial x}{\partial \gamma_y} \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(\gamma_x, \gamma_y)} \right)^{-1}$$

$$\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} = - \frac{\partial y}{\partial \gamma_x} \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(\gamma_x, \gamma_y)} \right)^{-1}$$

故
$$\frac{\partial x}{\partial \gamma_y} - \frac{\partial y}{\partial \gamma_x} = 0 \quad (5.32)$$

引入应变函数  $\psi(\gamma_x, \gamma_y)$

令
$$x = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_y}, \quad y = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_x} \quad (5.33)$$

$(x, y)$  为在应变平面上 $\psi$ 的梯度，物理平面上的矢径 $r$ ，可



以表示如下：

$$\mathbf{r} = \nabla_r \psi \quad (5.33)$$

由于引入应变函数(5.33)式，则(5.32)式恒满足。图 5.5 表示了物理平面与应变平面。

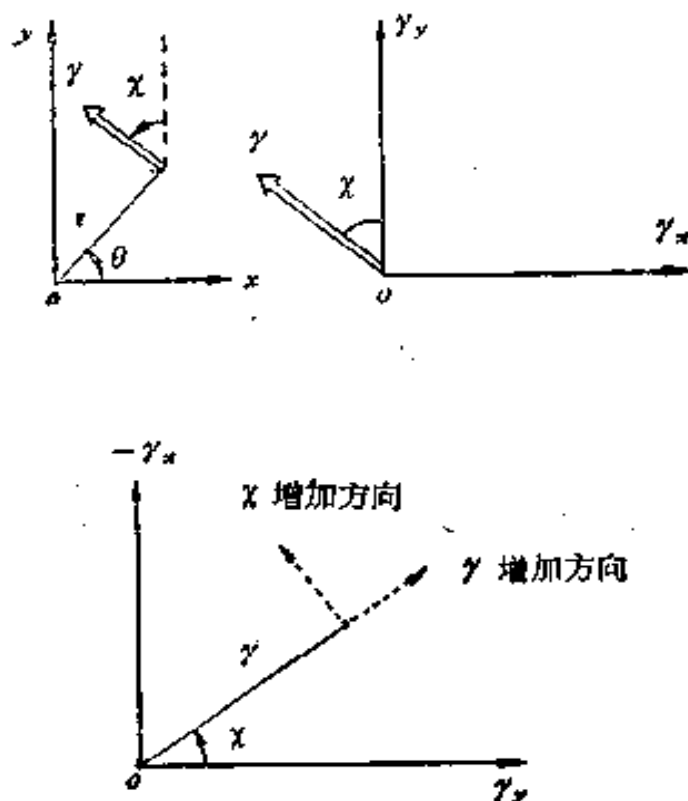


图 5.5 物理平面与应变平面

在应变平面上采用极坐标，极坐标求导与直角坐标求导存在关系：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma_r} &= \cos \chi \frac{\partial}{\partial \gamma} - \sin \chi \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \chi} \\ -\frac{\partial}{\partial \gamma_\theta} &= \sin \chi \frac{\partial}{\partial \gamma} + \cos \chi \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \chi} \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

故 (5.33) 式成为：

$$\left. \begin{aligned} x &= -\sin \chi \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \cos \chi \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \\ y &= \cos \chi \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} - \sin \chi \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

在平衡方程 (5.31) 式中, 出现应力平面中的求导, 应力平面如图 5.6 所示。应力平面与应变平面有简单的对应关系。应力平面中的  $\chi$  角与应变平面中  $\chi$  相同, 对硬化材料:  $\tau = \tau(\gamma)$

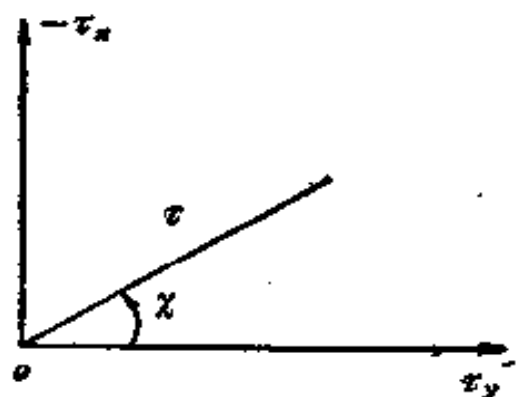


图 5.6 应力平面

对幂硬化材料

$$\left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^n = \frac{\gamma}{\gamma_0} \quad (5.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{故} \quad \frac{\partial}{\partial \tau_y} &= \cos \chi \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\sin \chi}{\tau} \frac{\partial}{\partial \chi} \\ &= \frac{\cos \chi}{\tau'(\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\sin \chi}{\tau(\gamma)} \frac{\partial}{\partial \chi} \\ \frac{\partial}{\partial \tau_x} &= \sin \chi \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\cos \chi}{\tau} \frac{\partial}{\partial \chi} \\ &= \frac{\sin \chi}{\tau'(\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\cos \chi}{\tau(\gamma)} \frac{\partial}{\partial \chi} \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

将 (5.35) 式与 (5.36) 式代入平衡方程 (5.31) 中, 得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\sin \chi}{\tau'(\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\cos \chi}{\tau(\gamma)} \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \left( \sin \chi \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{\cos \chi}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right) + \\ & + \left( \frac{\cos \chi}{\tau'(\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\sin \chi}{\tau(\gamma)} \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \left( \cos \chi \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sin \chi}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \right) = 0 \end{aligned}$$

展开，化简并乘以 $\tau(\gamma)/\gamma$ 后得

$$\frac{\tau(\gamma)}{\gamma \tau'(\gamma)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} = 0 \quad (5.37)$$

由 (5.17) 式，对幂硬化材料，

$$n \ln \frac{\tau}{\tau_0} = \ln \frac{\gamma}{\gamma_0}$$

对 $\gamma$ 微分

$$n \frac{\tau'(\gamma)}{\tau(\gamma)} = \frac{1}{\gamma}, \quad \text{故} \frac{\tau(\gamma)}{\gamma \tau'(\gamma)} = n$$

(5.37) 式成为

$$n \frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} = 0 \quad (5.37)'$$

上式为在应变平面上未知函数 $\psi$ 的二阶偏微分方程。由(5.29)式

$$\gamma \sim r^{-(\frac{n}{n+1})}$$

故

$$r \sim \gamma^{-(\frac{n+1}{n})}$$

由 (5.33) 可看出：

$$\psi \sim \gamma^{-\frac{n+1}{n}+1} = \gamma^{-\frac{1}{n}}$$

设

$$\psi = -B \gamma^{-\frac{1}{n}} \tilde{\psi}(\chi), \quad B \neq 0 \quad (5.38)$$

代入微分方程 (5.37)', 整理后得

$$\tilde{\psi}''(\chi) + \tilde{\psi}(\chi) = 0 \quad (5.39)$$

解为

$$\tilde{\psi}(\chi) = C_1 \sin \chi + C_2 \cos \chi \quad (5.40)$$

代入 (5.38) 式

$$\psi = -B\gamma^{-\frac{1}{n}}(C_1 \sin \chi + C_2 \cos \chi) \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = \frac{1}{n} B \gamma^{-\frac{1}{n}-1}(C_1 \sin \chi + C_2 \cos \chi)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} = -B \gamma^{-\frac{1}{n}-1}(C_1 \cos \chi - C_2 \sin \chi)$$

代入 (5.35)' 可得

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{1}{n} B \gamma^{-\frac{1}{n}-1}(C_1 \sin \chi + C_2 \cos \chi) \sin \chi + \\ &\quad + B \gamma^{-\frac{1}{n}-1}(C_1 \cos \chi + C_2 \sin \chi) \cos \chi \\ y &= \frac{1}{n} B \gamma^{-\frac{1}{n}-1}(C_1 \sin \chi - C_2 \cos \chi) \cos \chi + \\ &\quad + B \gamma^{-\frac{1}{n}-1}(C_1 \cos \chi - C_2 \sin \chi) \sin \chi \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

由边界条件, 在  $x$  轴上 ( $y=0$ ), 剪应变  $\gamma_1 = 0$ , 即  $\chi = 0$ 。

由 (5.42) 式第二式,

$$\frac{1}{n} B \gamma^{-\frac{1}{n}-1} C_2 = 0, \text{ 即 } C_2 = 0$$

不失广泛性, 可令  $C_1 = 1$

$$\text{故 } \psi(\gamma, \chi) = -B \gamma^{-\frac{1}{n}} \sin \chi \quad (5.41)'$$

$$\left. \begin{aligned} x &= B \gamma^{-\frac{1}{n}-1} \left( -\frac{1}{n} \sin^2 \chi + \cos^2 \chi \right) \\ y &= B \gamma^{-\frac{1}{n}-1} \left( \frac{1}{n} + 1 \right) \sin \chi \cos \chi \end{aligned} \right\} \quad (5.42)'$$

(5.42)' 又可写作

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} B r^{-\frac{1}{n}-1} \left[ \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \cos 2\chi \right] \\ y &= \frac{1}{2} B r^{-\frac{1}{n}-1} \left[ 1 + \frac{1}{n} \right] \sin 2\chi \end{aligned} \right\} \quad (5.42)''$$

将  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  代入上式, 并相除

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \cos 2\chi}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right) \sin 2\chi}$$

整理后得:

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right) \sin (2\chi - \theta) = \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \sin \theta$$

$$\text{即} \quad \sin (2\chi - \theta) = \beta \sin \theta \quad (5.43)$$

$$\beta = \frac{n-1}{n+1}$$

由 (5.43) 式可确定函数  $\chi(\theta)$ 。可知  $\theta$  取 0,  $\pi$  值时,  $\chi$  取 0,  $\pi/2$ 。

由  $\cos \theta / \sin \theta$  的式子, 易于确定下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \sin 2\chi}{\left\{ -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos 2\chi \right\}^{1/2}} \\ \cos \theta &= \frac{-\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \cos 2\chi}{\left\{ -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos 2\chi \right\}^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.43)'$$

仿图3.8推导, 由于

$$2\chi = \theta + \sin^{-1}[\beta \sin \theta], \quad \beta = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\chi &= \sin \theta \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} + \cos \theta \cdot \beta \sin \theta \\ \cos 2\chi &= \cos \theta \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} - \sin \theta \cdot \beta \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (5.43)''$$

将 (5.42)'' 式中  $x, y$  作平方和, 再开方则

$$\begin{aligned} r &= \frac{B}{2} \gamma^{-\frac{1}{n+1}} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \cos 2\chi \right]^2 + \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^2 \sin^2 2\chi \right\}^{1/2} \\ &= B \gamma^{-\frac{n+1}{n}} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos 2\chi \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad \gamma &= \left( \frac{B}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \cos 2\chi \right\}^{\frac{1}{2(n+1)}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

由图5.5, 在极坐标系中, 有

$$\left. \begin{aligned} \gamma_r &= \gamma \sin(\theta - \chi) \\ \gamma_\theta &= \gamma \cos(\theta - \chi) \\ \tau &= \tau_0 (\gamma/\gamma_0)^{1/n} \\ \tau_r &= \tau \sin(\theta - \chi) \\ \tau_\theta &= \tau \cos(\theta - \chi) \\ w &= (n+1) r \gamma_r \end{aligned} \right\} \quad (5.44)'$$

将 (5.44) 中之任一式, 例如  $\gamma$  与 (5.29) 式比较, 则有:

$$\left( \frac{B}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos 2\chi \right\}^{\frac{1}{2(n+1)}}$$

$$= \gamma_0 \left( \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\gamma}(\theta)$$

令  $\theta = 0$ , 则  $\chi = 0$ 。由规格化条件  $\tilde{\gamma}(0) = 1$ , 则

$$B^{\frac{n}{n+1}} = \gamma_0 \left( \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

即

$$B = \gamma_0^{\frac{n+1}{n}} \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n}$$

与 (5.26) 式相比较, 可知  $B = \gamma_0^{\frac{n+1}{n}} A^{n+1}$ 。则  $B$  换成  $J$  以后, (5.44)' 式即为 III 型问题  $J$  场的解析表达式, 与 (5.28) 式至 (5.30) 式相同。其中

$$\tilde{\gamma}(\theta) = \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \cos 2\chi \right\}^{\frac{n}{2(n+1)}}$$

由 (5.19) 式

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(\theta) = \tilde{\gamma}^{\frac{1}{n}}(\theta) &= \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right. \\ &\quad \times \cos 2\chi \left. \right\}^{\frac{1}{2(n+1)}} \end{aligned} \quad (5.44)''$$

$$\left( \tilde{\gamma}_r(\theta), \tilde{\gamma}_\theta(\theta) \right) = \tilde{\gamma}(\theta) \left( \sin(\theta - \chi), \cos(\theta - \chi) \right)$$

$$\left( \tilde{\tau}_r(\theta), \tilde{\tau}_\theta(\theta) \right) = \tilde{\tau}(\theta) \left( \sin(\theta - \chi), \cos(\theta - \chi) \right)$$

$$\tilde{w}(\theta) = (n+1) \tilde{\gamma}_r(\theta), \quad \tilde{w}'(\theta) = \tilde{\gamma}_\theta(\theta)$$

式 (5.44)'' 相当于在 (5.28) 式与 (5.30) 式中取

$$\tilde{\varphi}(\theta) = \frac{n+1}{n} \tilde{\tau}_r(\theta) = \frac{n+1}{n} \tilde{\tau}(\theta) \cos(\theta - \chi)$$

$$\tilde{\varphi}'(\theta) = -\tilde{\tau}_\theta(\theta) = -\tilde{\tau}(\theta) \sin(\theta - \chi)$$

这易于由 (5.28) 式的  $\tau_\theta$  表达式中看出。

这里指出: 上述的各角分布函数如  $\tilde{\gamma}(\theta), \tilde{\gamma}_r(\theta), \tilde{\gamma}_\theta(\theta) \dots$  等均含有硬化指数  $n$ , 故有时常常写成  $\tilde{\gamma}(\theta, n), \tilde{\gamma}_r(\theta, n) \dots$  等。

求得各角分布函数的解析表达式之后, 则可以用于计算  $I_n$  积分值与 COD。

由 (5.27) 式

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{n}{n+1} \tilde{\tau}^{n+1}(\theta) \cos \theta + \tilde{\varphi}'(\theta) \left[ \frac{\cos \theta}{n+1} \tilde{w}(\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \theta \tilde{w}'(\theta) \right] \right\} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{n}{n+1} \tilde{\tau}^{n+1}(\theta) \cos \theta - \tilde{\tau}_r(\theta) \left[ \cos \theta \tilde{\gamma}_r(\theta) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \theta \tilde{\gamma}_\theta(\theta) \right] \right\} d\theta \end{aligned}$$

将有关各角分布函数的解析表达式代入上式, 并利用 (5.43)、(5.43)' 及 (5.43)'' 式, 得

$$I_n = \frac{\pi(n+1)}{2n}$$

还可以计算裂纹尖端的滑动位移(即 COD), 按图 5.7 Rice 建议的  $45^\circ$  角裂纹张开位移的定义 (见 Tracey<sup>(65)</sup> 引文)。

令:

$$w \Big|_{\theta=45^\circ} = r = \frac{1}{2} \text{COD} = \frac{1}{2} \delta_i$$

由 (5.30) 式

$$w \Big|_{\theta=45^\circ} = \gamma_\theta r \left( \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{w}(\pi)$$



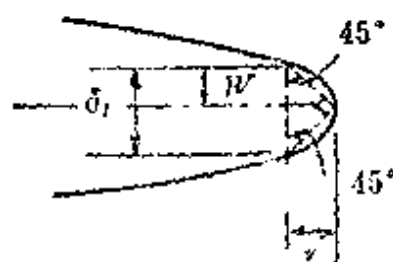


图 5.7 Rice建议的45°角的裂纹

张开位移定义示意图

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\pi) &= (n+1) \tilde{\gamma}_r(\pi) = (n+1) [\gamma(\theta) \sin(\theta - \chi)]_{\theta=\pi} \\ &= (n+1) \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \end{aligned}$$

代入上式, 得

$$\frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n n} = \left[ \frac{1}{\gamma_0 (n+1)} \right]^{\frac{n+1}{n}}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_i = r &= [\gamma_0 (n+1)]^{\frac{n+1}{n}} \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n n} \\ &= \frac{2J}{\pi \tau_0} [\gamma_0 (n+1)]^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow \infty$  (理想塑性情形)

$$\delta_i \rightarrow \delta_i^* = \frac{4J}{\pi \tau_0}$$

与 (3.16) 式相比较, 结果相同。并可得到  $\delta_i$  随硬化指数  $n$  的变化规律。

$$\delta_i = \delta_i^* [\gamma_0 (n+1)]^{\frac{1}{n}}$$

令  $N = 1/n$ , 则

$$\delta_i = \delta_i^* \left[ \frac{\gamma_0 (1+N)}{N} \right]^N$$

此式与 Tracey (65) 文中的公式相同, 该式是 Rice 向 Tracey 建议的。

对于小范围屈服情形, 可取  $J = K_{II}^2/2G$ 。现在讨论, 作为幂硬化材料当  $n \rightarrow \infty$  (理想塑性) 的极限情形<sup>1)</sup>。对幂硬化材料, 记某物理量为  $P_n$ , (例如位移记为  $w_n(\theta)$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ 。由 (5.43) 式, 当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\sin(2\chi - \theta) = \sin\theta$$

由 (5.43) 式,  $2\chi - \theta \leq \pi/2$ , 故

$$2\chi - \theta = \theta \quad \text{当 } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$2\chi - \theta = \pi - \theta \quad \text{当 } \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

因此可得

$$\chi(\theta) = \begin{cases} \theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \pi/2 & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

由 (5.44)"式, 各角分布函数的极限

$$\tilde{\gamma}(\theta) \rightarrow \begin{cases} \cos \theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < \theta \end{cases}$$

$$\tilde{\tau}(\theta) \rightarrow 1$$

$$\tilde{\gamma}_r(\theta) \rightarrow 1$$

$$\tilde{\gamma}_r'(\theta) \rightarrow \begin{cases} \cos \theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$\tilde{\tau}_r(\theta) \rightarrow \begin{cases} 0 & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -\cos \theta & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

$$\tilde{\tau}_r'(\theta) \rightarrow \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \sin \theta & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

下面讨论  $\tilde{w}_n(\theta)$  当  $n \rightarrow \infty$  时的极限。由于  $\tilde{w}_n'(\theta) = \tilde{\gamma}_{\theta,n}(\theta)$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时可得

1) 这一极限情形的讨论, 由靳志和所完成。

$$\tilde{w}'(\theta) = \tilde{\gamma}_0(\theta) \rightarrow \begin{cases} \cos \theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

利用反对称条件  $\tilde{w}(0) = 0$ , 积分上式得

$$\tilde{w}(\theta) \rightarrow \begin{cases} \sin \theta & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

由 (5.27) 式在积分号下求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I_\infty = \pi/2$$

因此 (5.28) 至 (5.30) 式的极限为

	$0 \leq \theta \leq \pi/2$	$\pi/2 < \theta \leq \pi$
$\tau_r(\theta)$	0	$-\tau_0 \cos \theta$
$\tau_\theta(\theta)$	$\tau_0$	$\tau_0 \sin \theta$
$\gamma_r(r, \theta)$	0	0
$\gamma_\theta(r, \theta)$	$\frac{2J}{\pi \tau_0} \frac{\cos \theta}{r}$	0
$w(\theta)$	$\frac{2J}{\pi \tau_0} \sin \theta$	$\frac{2J}{\pi \tau_0}$

上述的极限情形, 正是本节第一部分以及 § 3 的理想塑性情形下的解。因此, 由上面的讨论可知: 对于小范围屈服条件下的Ⅲ型问题, 当硬化指数  $n \rightarrow \infty$  时, 幂硬化材料相应的局部解退化为理想塑性情形下的局部解。

但在大范围屈服的情形下, 情况就不同了。Amazigo (62) 求得了大范围屈服情形下, 有限宽板Ⅲ型问题的精确解。在此基础上, 文[66]对精确解与当  $r \rightarrow 0$  时的范围内局部解作了比较。对精确解作渐近展开, 以  $\gamma_y$  为例,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_y(r, \theta)}{\gamma_0} &= \left( \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\gamma}_y(\theta, n) \\ &+ \left( \frac{A}{\tau_0 \gamma_0 r} \right)^{\frac{1}{n}} \tilde{\gamma}_y(\theta, n) + \left( \frac{B}{\tau_0 \gamma_0 r} \right)^{\frac{1}{n}} \tilde{\gamma}_y(\theta, n) + \dots \quad (5.46) \end{aligned}$$

上式中右端第一项即上面所求的局部解，其幅值与  $J$  有关。一般地  $p, q$  也与  $n$  有关，可记作  $p(n), q(n)$ 。当  $r$  值小时，第一项起主导作用即：

$$\frac{n}{n+1} > p(n) > q(n) > \dots$$

当  $n \rightarrow \infty$ ，即趋于理想塑性的极限情形，则

$$\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

此时， $p(n), q(n)$  也同时趋近于 1。因此，第二项及以后的项与第一项相比，并不是次要的。此时

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_y(r, \theta)}{\gamma_0} &\rightarrow \frac{J}{\tau_0 \gamma_0 l_\infty r} \tilde{\gamma}_y(\theta, \infty) + \frac{A}{\tau_0 \gamma_0 r} \tilde{\gamma}_y(\theta, \infty) \\ &+ \frac{B}{\tau_0 \gamma_0 r} \tilde{\gamma}_y(\theta, \infty) + \dots \end{aligned} \quad (5.47)$$

在大范围屈服条件下，对于理想塑性情形，其裂纹尖端场已不能用单个参数来表示，这一点在 § 4 的第一部分中已经指出，(5.47) 式也说明这一点。即不同的试件、尺寸、形状及载荷之下，裂纹体的  $J$  值相同，但裂纹尖端附近的局部场却可能不同。因为  $A, B, \dots$  等可能不同。

Amazigo<sup>(66)</sup> 给出  $a/b = 0.75$  的单边裂纹的数值结果，比较了精确解与局部解的  $\gamma_y(x, 0)/\gamma_I$ 。  $\gamma_I$  为韧带边缘  $I$  点的应变。对应于同一个  $\gamma_y(x, 0)/\gamma_I$  值，如要求精确解与局部解

对应的  $\frac{x}{a}$  相差不大于 10%，则在下述条件才成立。即若  $n = 5$ ，

仅当  $\gamma_y(x, 0)/\gamma_I > 6$ ， $x/a < 0.02$ ；若  $n = 10$ ，则仅当

$\gamma_v(x,0)/\gamma_I > 25$ , 即  $x/a < 0.003$ ; 若  $n = 20$ , 则仅当

$$\gamma_v(x,0)/\gamma_I > 300, \text{ 即 } x/a < 0.0003; \dots\dots$$

这说明随着  $n$  的增加, J 主导区 (即 HRR 场) 适用范围减小; 当  $n \rightarrow \infty$  时, J 主导区的适用范围也趋近于零。

这个现象与本节理想弹塑性局部解的非唯一性有关 (注意 (5.4) 式  $w = F(\theta)$  的不确定性)。

## § 6 局部解 (二) —— I 型与复合型

本节讨论 I 型平面应变和平面应力及复合型情况下的局部解。仍分别研究材料为理想塑性和幂硬化两种情形。

### 1. I 型平面应变, 理想塑性材料


#### (1) Prandtl 场

假设材料为理想弹塑性的, 并且不可压缩。在讨论理想塑性材料的静止裂纹问题, 求其局部解时, 可以略去弹性变形, 即当成刚塑性。并假设裂纹尖端全部被塑性区包围。

由材料的不可压缩性, 对平面应变问题, 有

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

则可以采用塑性力学中平面应变滑移线理论。含裂纹平面应变问题的滑移线见图 6.1。各分区的应力解为:

A 区:  A 区的裂纹表面为自由, 故为均匀应力区。

$$\sigma_{xx} = 2\tau_0, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0 \quad (6.1)$$

B 区: 该区有直线边为  $x$  轴, 其上  $\sigma_{xy} = 0$ , 故也为均匀应力区。

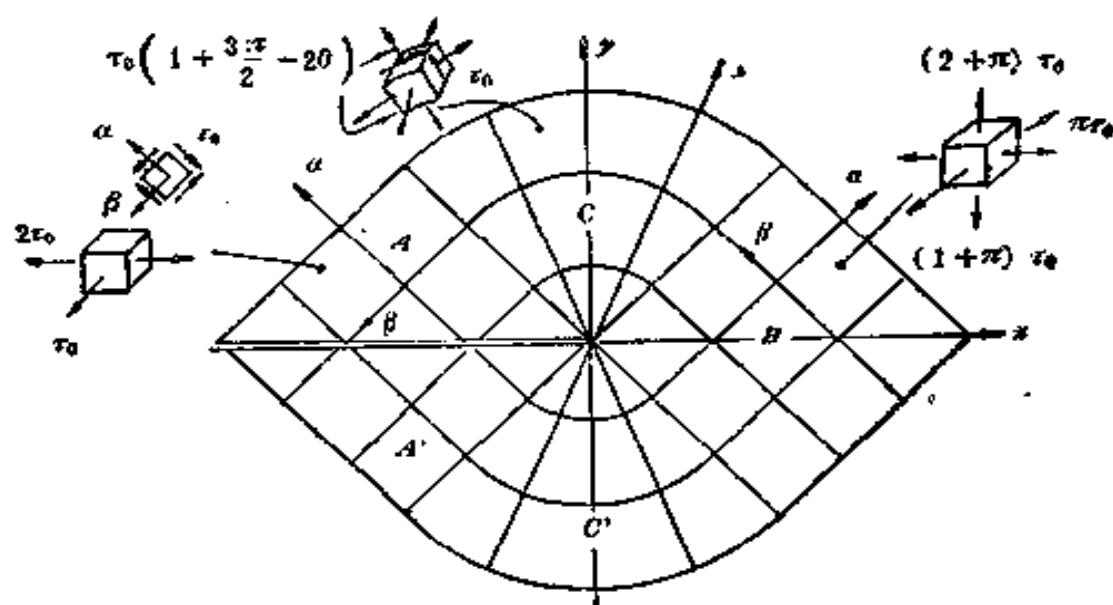


图 6.1 Prandtl 场

按滑移线理论，沿 $\beta$ 线有

$$\frac{\sigma}{2\tau_0} + \varphi = \text{const} \quad (6.2)$$

其中 $\varphi$ 为从 $x$ 轴到 $\alpha$ 线的逆时针转角。 $\sigma$ 为平均应力，

故

$$\frac{\sigma_A}{2\tau_0} + \varphi_A = \frac{\sigma_B}{2\tau_0} + \varphi_B$$

$$\sigma_B = 2\tau_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = (1 + \pi)\tau_0$$

故 $B$ 区内，

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_B - \tau_0 = \pi\tau_0 \\ \sigma_{yy} &= \sigma_B + \tau_0 = (2 + \pi)\tau_0 \\ \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$C$ 区（扇形区）：

$$\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\sigma_C}{2\tau_0} + \theta$$

$$\text{故 } \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_C = \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)\tau_0 - 2\tau_0\theta \quad (6.4)$$

$$\sigma_{r\theta} = \tau_0$$

这个由 A、B、C 三个区域构成的场，称为 Prandtl 场。其应力的角分布见图 6.2。

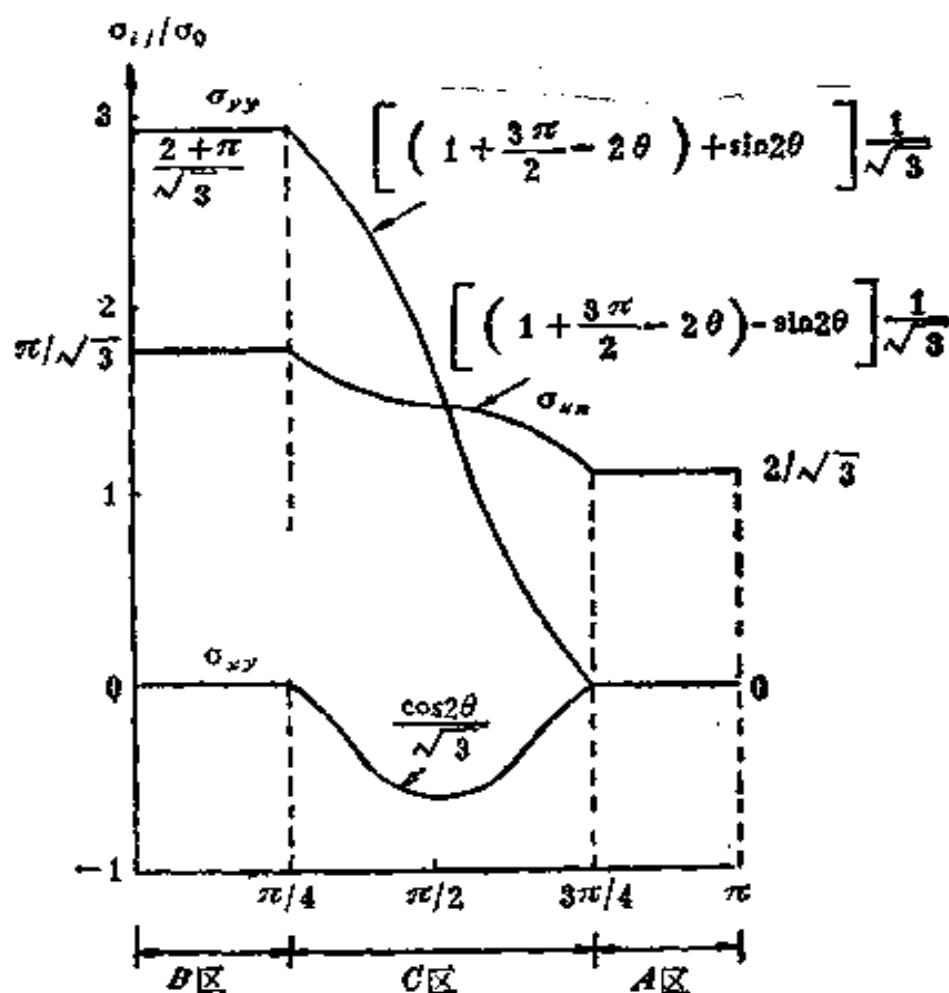


图 6.2 Prandtl 场的应力角分布

记最大平均应力为  $\bar{\sigma}_{\max}$ ，则

$$\frac{\overline{\sigma}_{\max}}{2\tau_0} = \frac{\sigma|_{\theta=0}}{2\tau_0} = \frac{(1+\pi)\tau_0}{2\tau_0} = \frac{1}{2}(1+\pi) = 2.07$$

下面求应变和位移。按滑移线理论，沿直线滑移线，位移为恒量。

应变奇异性只能在扇形区（C区）中出现，即仅塑性变形可能奇异。

沿特征线： $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0$ ，故

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0$$

积分之：

$$\begin{aligned} u_r &= f'(\theta) \\ u_\theta &= -f(\theta) + g(r) \end{aligned} \quad (6.4)'$$

因为应力不随时间变化，局部解中，质点一旦进入塑性区后，应力即不变，故此局部解也适用于塑性增量理论。

C区的应变与旋转：

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \\ &= \frac{f''(\theta) + f(\theta)}{r} + g'(r) - \frac{g(r)}{r} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{f''(\theta) + f(\theta)}{r} + g'(r) + \frac{g(r)}{r} \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

设在B区中： $\lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0) = 0$ ，B区应变有限。

BC区交线上： $\lim_{r \rightarrow 0} u\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = 0$



在C区内: 由(6.4)式,

$$f'(\pi/4) = 0, \quad -f(\pi/4) + g(0) = 0$$

不失广泛性, 取  $f(\pi/4) = 0, \quad g(0) = 0$ 。

当  $r \rightarrow 0$  时 (讨论的是局部解) 有  $g'(r) - \frac{g(r)}{r} \approx 0$ 。又

因设  $\omega$  有界, 则  $g'(r)$  为有界, 于是由 (6.5) 式

$$\gamma_{r,\theta} = \gamma_0 \frac{R(\theta)}{r} \quad (6.7)$$

上式中  $R(\theta)$  可近似地理解为塑性区射线长度, 它不能由局部分析确定。在扇形区中, 应变  $\gamma_{r,\theta}$  具有  $r^{-1}$  阶奇异性。

现在回过来对开始引入的假设作讨论。因为在研究应变奇异性时, 对理想塑性材料, 弹性变形可以略去, 故可设材料为不可压缩。虽然此局部解是根据裂纹尖端被塑性区全部包围的假设求得的, 但是此局部解亦可适用于塑性区范围为  $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$  的情形。而均匀区相当于弹性区。在 § 5 讨论 III 型裂纹理想弹塑性情形的局部解时, 已经指出了这一点。

Rice [42] 近似假设塑性区形状为

$$R(\theta) \approx R_0 \cos \left[ 2 \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

设积分回路  $\Gamma$  为一以裂纹尖端为原点的圆,  $J$  积分为:

$$J = 2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left\{ W \cos \theta - \sigma_{rr} \left[ \epsilon_{rr} \cos \theta - \left( \frac{1}{2} \gamma_{r,\theta} + \omega \right) \sin \theta \right] \right. \\ \left. - \sigma_{r,\theta} \left[ \left( \frac{1}{2} \gamma_{r,\theta} + \omega \right) \cos \theta - \epsilon_{\theta\theta} \sin \theta \right] \right\} r d\theta$$

在扇形区内

$$\sigma_{rr} = \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)\tau_0 - 2\tau_0\theta, \quad \sigma_{r\theta} = \tau_0$$

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0$$

$$W \approx \tau_0 \gamma_0 \frac{R(\theta)}{r}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{r\theta} \approx -\omega \approx \frac{1}{2r} \left( f''(\theta) + f(\theta) \right) = -\frac{\gamma_0 R(\theta)}{2r}, \quad \text{当 } r \rightarrow 0$$

$$\text{故有 } J = 2\tau_0\gamma_0 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} R(\theta) \left[ \cos\theta + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) \sin\theta \right] d\theta$$

由 (6.4) 式

$$u_r \approx f'(\theta), \quad u_\theta \approx -f(\theta), \quad \text{当 } r \rightarrow 0$$

$$\text{故 } u_1 = u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta \approx f'(\theta) \cos\theta + f(\theta) \sin\theta$$

$$u_2 = u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta \approx f'(\theta) \sin\theta - f(\theta) \cos\theta$$

$$du_1/d\theta \approx [f''(\theta) + f(\theta)] \cos\theta = \gamma_0 R(\theta) \cos\theta$$

$$du_2/d\theta \approx [f''(\theta) + f(\theta)] \sin\theta = \gamma_0 R(\theta) \sin\theta$$

$$\text{故 } J = 2\tau_0 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{du_2}{d\theta} \left[ \cot\theta + \left(1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta\right) \right] d\theta$$

$$u_2 = \int_{\pi/4}^{\theta} \gamma_0 R(\theta) \sin\theta d\theta$$

$$\delta_i = 2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{du_2}{d\theta} d\theta$$

将  $R(\theta) = R_0 \cos[2(\theta - \pi/2)]$  代入上述各式, 得近似公式

$$R_0 \approx \frac{3J}{4\sqrt{2} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \tau_0 \gamma_0}$$

$$\delta_i \approx \frac{J}{\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \tau_0}$$

在小范围屈服条件下, 设  $\nu = 0.3$ , 且  $\sigma_0 = \sqrt{3} \tau_0$ , 有

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \frac{3(1-\nu)}{4\sqrt{2}(2+\pi)} \left( \frac{K}{\tau_0} \right)^2 = 0.217 \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \\ \delta_t &= \frac{2(1-\nu^2)}{2+\pi} \frac{K^2}{E\tau_0} = 0.613 \frac{K^2}{E\sigma_0} = 2.8 \frac{\sigma_0}{E} R_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)'$$

图6.3所示的双边切口试件, 其滑移线场正是 Prandtl 场, 试件的几何尺寸标明在图上。设  $P$  为单位板厚上的外加载荷。

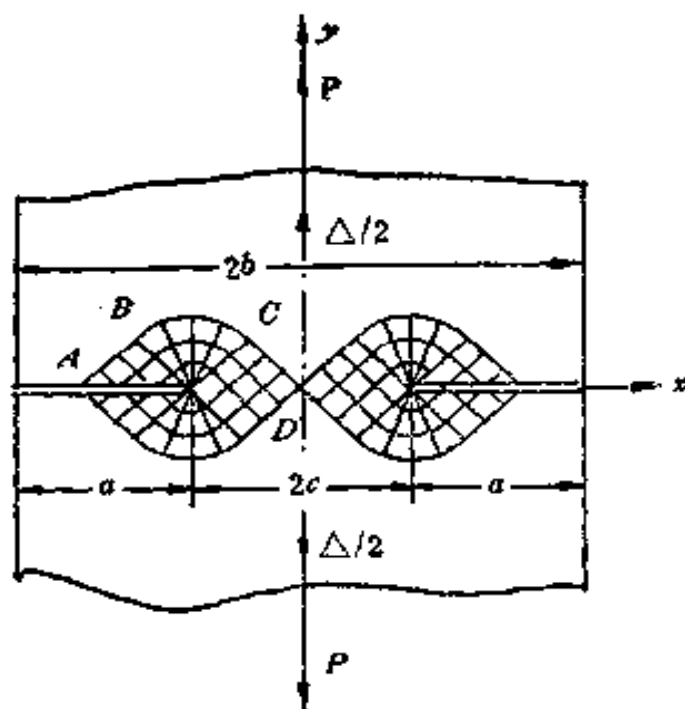


图 6.3 双边切口试件

由 (6.3) 式, 极限载荷

$$P = 2\tau_0(2+\pi)(b-a) = 2\tau_0(2+\pi)c \quad (6.8)$$

虽然这个场作为理想塑性的“全解”, 还缺少刚性区中满足平衡条件的静力可能场, 但是这个场曾被实验证实<sup>[67]</sup>, 得到普遍的承认。

根据塑性力学中滑移线理论的 Geringer 方程,

$$d\dot{u}_\alpha - \dot{u}_\beta d\varphi = 0, \quad \text{沿}\alpha\text{线}$$

$$d\dot{u}_\beta + \dot{u}_\alpha d\varphi = 0, \quad \text{沿}\beta\text{线}$$

式中 $\dot{u}_\alpha$ 与 $\dot{u}_\beta$ 为沿 $\alpha$ 线与沿 $\beta$ 线方向的速度，可讨论双边切口试件的速度场。由于对称性，我们由 Качанов[73]第 178 至 179 页关于这一问题的速度场的解，如图 6.3 所示的各区域内的速度：

在  $OCD$  区 ( $0 \leq \theta \leq \pi/4$ )， $\varphi = -3\pi/4$ ，有

$$\dot{u}_x = \dot{\Delta}/2, \quad \dot{u}_y = 0$$

在  $OBC$  扇形区 ( $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ )， $\varphi = -(\pi - \theta)$

$$\dot{u}_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\Delta} \sin \theta, \quad \dot{u}_y = \frac{1}{2} (\dot{\Delta} - \sqrt{2} \dot{\Delta} \cos \theta)$$

在  $OAB$  域内 ( $3\pi/4 \leq \theta \leq \pi$ )， $\varphi = -\pi/4$

$$\dot{u}_x = \dot{\Delta}/2, \quad \dot{u}_y = \dot{\Delta}$$

则可写出裂纹张开位移增量

$$d\delta_i = 2d\Delta \quad (6.8)'$$

(2) 单边裂纹或中心裂纹平板，如图 6.4 所示。在均匀场中， $\sigma_y = 2\tau_0$ ，极限载荷如图中所示。

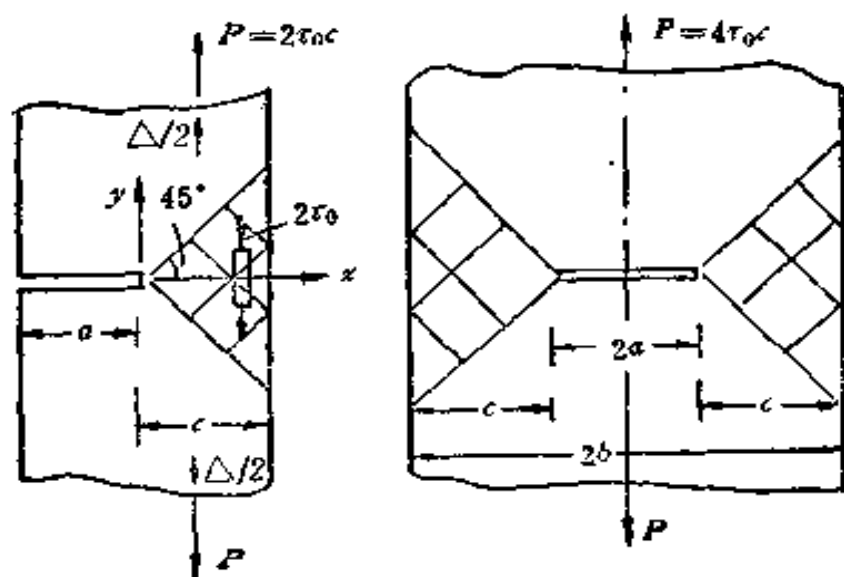


图 6.4 单边裂纹试件与中心裂纹试件

其中  $P$  为单位厚度上的载荷。其最大平均应力  $\bar{\sigma}_{\max}$  比

$$\frac{\bar{\sigma}_{\text{max}}}{2\tau_0} = 1/2 = 0.5$$

上述滑移场解是其全解。以单边裂纹为例，其机动解如图6.5所示。令外力功与内功相等，有

$$2P \cdot \Delta / 2 = 2 \cdot \tau_0 \left( \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \right) \cdot c \sqrt{2}$$

故

$$P = 2\tau_c c$$

而静力解为:

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{yy} = 2\tau_0, \quad \sigma_{rz} = \tau_0 \quad (\text{当 } 0 < x < c)$$

$$\sigma_{ij} = 0 \quad (\text{当 } x < 0)$$

同前推导, 可知有裂纹张开位移增量

$$d\delta_1 = d\Delta$$

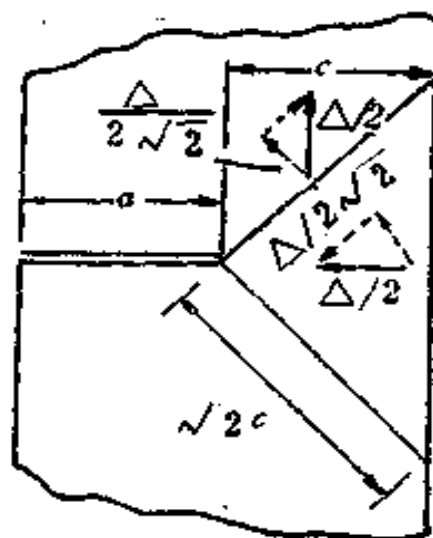


图 6.5

(3) 深裂纹纯弯曲试件<sup>[92]</sup>, 如图6.6所示。

取 $OQO'$ 截面, 写出三个静力平衡方程

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma M = 0$$

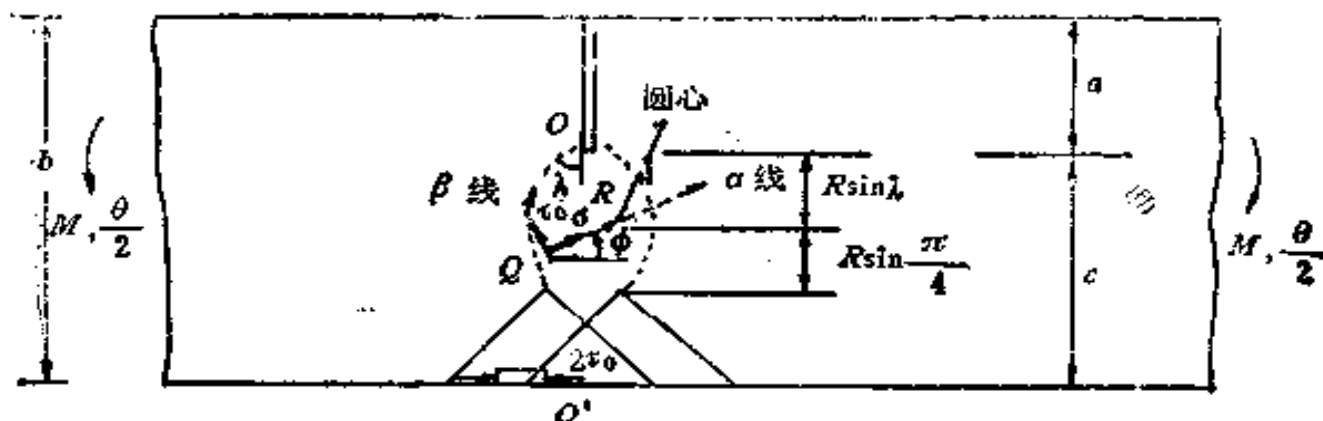


图 6.6 纯弯曲试件的滑移场

可求出三个未知量  $M$ ,  $\lambda$ ,  $R$ 。以  $\sum X = 0$  为例，沿  $OQ$  ( $\beta$  线)

$$\frac{\sigma}{2\tau_0} + \varphi = \frac{\sigma_Q}{2\tau_0} + \varphi_Q = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

故

$$\frac{\sigma}{2\tau_0} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \varphi \quad (6.9)$$

代入  $\sum X = 0$  的方程，即

$$2\tau_0 \left( c - R \sin \lambda - R \sin \frac{\pi}{4} \right) = \int_0^{\pi/4} (\sigma \cos \varphi - \tau_0 \sin \varphi) R d\varphi$$

整理后得：

$$\frac{R}{c} = \frac{1}{\left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \lambda \right) \sin \lambda + \frac{1}{2} \cos \lambda}$$

联立求解三个平衡方程的结果为：

$$\lambda = 1.258 \text{ 弧度} = 72^\circ$$

$$R = 0.3886 c$$

$$M = 1.261 \times \frac{1}{4} 2\tau_0 c^2 \approx 0.63 \tau_0 c^2 \approx 0.364 \sigma_0 c^2 \quad (6.9)'$$

由 (6.9) 式, 在  $O$  点 (沿着  $\beta$  线  $OQ$  切线方向 趋 近 于  $O$  点)

$$\frac{\sigma_0}{2\tau_0} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \lambda = 1.643 \quad (6.10)$$

上述的解, 虽然缺少刚性区中的静力可能场, 但也有实验的证实, 得到承认。

为了比较, 注意到本节 1. (1) 小节的 Prandtl 场, 其

$$\frac{\sigma_{\max}}{2\tau_0} = 2.07$$

对于该 Prandtl 场的扇形域, 若取 (6.4) 式中  $\theta = \lambda$ ,

$$\frac{\sigma_{\max}}{2\tau_0} = \frac{1}{2\tau_0} \left[ \left( 1 + \frac{3}{2} \pi \right) \tau_0 - 2\tau_0 \lambda \right] = 1.598$$

张开位移增量 (图 6.6)

$$d\delta_i = R \sin \lambda d\theta \approx 0.37 c d\theta$$

以上介绍的各种各样的解, 它们都是充分屈服的平面应变解, 都是大范围屈服情况下的局部解。

这些解在三轴应力水平上表现出它们明显的区别, 这可以从比较三个解的最大平均应力  $\frac{\bar{\sigma}_{\max}}{2\tau_0}$  看出。

姑且假定在小范围屈服情况下, 有一个 取决于外部  $K$  场 (小范围屈服情况下被  $K$  场包围) 的局部解。对于 I、II 复合型还没有找到封闭形式的解 (有限元解将在本节稍后介绍)。那么上述各种各样试件在载荷较小时, 即都还处于小范围屈服时, 只要  $K$  值一样, 局部解就应一样。但可能与现在求得的上述的充分屈服的解中的不论哪一个都不一样。

我们知道理想塑性材料问题的解一般说来是不唯一的。在 III 型裂纹的理想塑性材料的局部解中 (见 § 5 第 1 小节) 其应力分布是唯一的, 不唯一性只反映在  $w = F(\theta)$  上, 对于

小范围屈服的情形，由 (3.13) 式

$$w = F(\theta) = \frac{1}{\pi} \frac{K_{II}^2}{G\tau_0} \sin \theta$$

但是  $F(\theta)$  在一般情况下 (包括小、大范围屈服) 是不可定的，也是不唯一的。

至于 I 型的问题，从以上的例子看，局部解甚至对应力分析而言也是不唯一的。至于应变与位移分布就更不唯一了。

本节中，上述所得到的解是刚塑性解，对于同一种类型的试件，刚塑性解本身的场也不是唯一的。全屈服以后，真正的弹塑性解，若令  $E \rightarrow \infty$ ，也可以得到一个刚塑性解，但刚塑性解却可能不止一个 (虽然极限载荷是唯一的)。完全可能找到别的不同的刚塑性解。Hill[68] 曾经指出 (也见 McClintock 在 [69] 所引)，在任一个刚塑性解 (指全解) 的塑性区 (即产生塑性变形的区域) 中的应力分布是唯一的。而两个不同的刚塑性解如有共同的刚性区 (即不产生变形的区域)，应力分布可能不同。对理想塑性情形，已经指明奇异应变场随  $\theta$  的变化不是唯一的。这是因为：理想塑性情形下的场方程是双曲型的；而当硬化指数  $n$  为有限值的情形，如同下面将加以阐明的，其场方程是椭圆型的。

## 2. I 型平面应变，幂硬化材料 (HRR 局部解)

讨论的方法与 § 5 中 III 型问题幂硬化材料的情形相仿。这一问题是由 Hutchinson[63] 和 Rice, Rosengren[64] 解决的，所以又称 HRR 奇异性，或 HRR 局部解。

Hutchinson[63] 应用塑性形变理论，对于幂硬化材料<sup>1)</sup>，

1) Rice, Rosengren[64] 采用区分弹塑性段的应力变形律：

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\tau}{\tau_0} \quad (\text{当 } \gamma \leq \gamma_0), \quad \frac{\gamma}{\gamma_0} = \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \quad (\text{当 } \gamma \geq \gamma_0) \quad \text{对局部解，}$$

弹性段不起作用。结果与 Hutchinson 按 (6.11) 式所得的一致。



在单向拉伸条件下:

$$\varepsilon/\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad n > 1 \quad (6.11)$$

$\alpha$ 为硬化系数,  $\sigma_0$ 规定为屈服极限,  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E_0$ 。一般地, 有应力应变关系

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0} = & (1 + \nu) \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} - \nu \frac{\sigma_{kk}}{\sigma_0} \delta_{ij} \\ & + \frac{3}{2} \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \end{aligned} \quad (6.12)$$

上式右部第一, 二项相当于线弹性情形, 最末一项对应塑性应变, 式中应力偏量  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ , 等效应力  $\sigma_e =$

$\left[ \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right]^{1/2}$ ,  $\nu$ 为泊松比, 只出现在线弹性变形部分。

求局部解时, 可以略去线弹性变形, 因此以下所求的局部解不受 $\nu$ 值的限制。

对于平面应变问题,  $\varepsilon_{zz} = 0$ , 于是有

$$\sigma_{zz} = -\frac{1}{2} (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \quad (6.13)$$

取应力函数 $\varphi(r, \theta)$ 渐近展开的主项

$$\varphi = Ar^2 \tilde{\varphi}(\theta) \quad (6.14)$$

由于

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

取如图6.7所示的积分回路 $\Gamma_c$ ，它是以 $r$ 为半径，以裂纹尖端为中心的圆周。则 $J$ 积分为

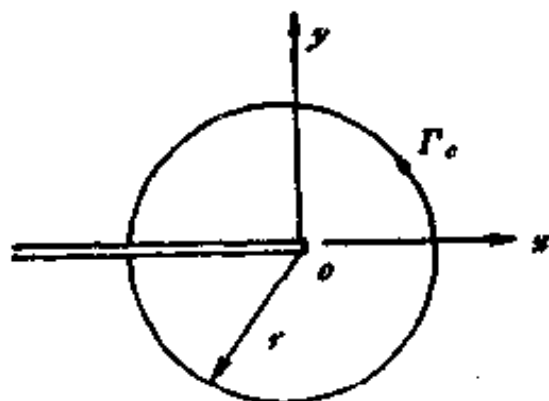


图 6.7

$$J = \int_{\Gamma_c} (W n_i - \sigma_{ij} n_j u_{i,x}) r d\theta$$

由 $J$ 积分与积分路径的无关性。当 $J$ 积分取有限的非零值，则当 $r \rightarrow 0$ 时必有：

$$\lim_{r \rightarrow 0} (W n_i - \sigma_{ij} n_j u_{i,x}) r = f(\theta)$$

或

$$W n_i - \sigma_{ij} n_j u_{i,x} \sim \frac{f(\theta)}{r}, \quad \text{当 } r \rightarrow 0$$

由上式 $W \sim \tilde{W}(\theta) \cdot r^{-1}$ ，再应用幂硬化的材料性能，又因为 $W \sim \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ ，则

$$\text{应力奇异性} \sim r^{-\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{应变奇异性} \sim r^{-\frac{n}{n+2}}$$

由(6.14)、(6.15)式，则

$$s = -\frac{1}{n+1} + 2 = \frac{2n+1}{n+1} \quad (6.16)$$

由平面应变问题极坐标形式的协调方程：

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_{\theta\theta}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} =$$

$$-\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (6.17)$$

其中  $\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \gamma_{r\theta}$ 。将协调方程用应力函数  $\varphi(r, \theta)$  表示, 整理后可得  $\tilde{\varphi}(\theta)$  的四阶非线性常微分方程。由于对称性, 仅考虑上半平面, 其边界条件为:

$$\theta = 0, \quad \tilde{\varphi}'(0) = \tilde{\varphi}'''(0) = 0 \quad (6.18)$$

由裂纹表面自由, 有

$$\theta = \pi, \quad \tilde{\varphi}(\pi) = \tilde{\varphi}'(\pi) = 0 \quad (6.19)$$

规格化条件, 例如可取等效应力  $\sigma_0$  的角分布函数  $\tilde{\sigma}_s(\theta)$

$$\max_{0 \leq \theta \leq \pi} \tilde{\sigma}_s(\theta) = 1 \quad (6.20)$$

用与 § 5 中讨论 III 型问题时类似的方法, 可证明 (6.19) 的两个条件中只需取一个, 则另一个必自动满足。

用数值计算方法来解上述问题。

作为一个局部解, 幅值因子  $A$  是不可定的但是用与 III 型问题中用过的同样的方法, 可以把  $A$  与  $J$  联系起来, 即通过  $J$  积分表示, 其最终的应力应变场解——HRR 奇异解为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}(r, \theta) &= \sigma_0 \left( \frac{EJ}{a\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \\ \varepsilon_{ij}(r, \theta) &= \frac{a\sigma_0}{E} \left( \frac{EJ}{a\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \\ \sigma_s(r, \theta) &= \sigma_0 \left( \frac{EJ}{a\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_s(\theta, n) \\ u_i(r, \theta) &= \frac{a\sigma_0}{E} \left( \frac{EJ}{a\sigma_0^2 I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, n) \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

与Ⅲ型问题相类似,  $I_n$  为与  $n$  有关的常数, 它由积分算出, 对于平面应变与平面应力问题, 其值不同。

文献中有时称

$$K_0 = \left( \frac{EJ}{\alpha \sigma_0^2 I_n} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

为塑性应力强度因子。

在 Hutchinson<sup>[63]</sup> 与 Rice 和 Rosengren<sup>[64]</sup> 的文中, 给出数值计算结果的图形表示, 文<sup>[64]</sup> 还算出了弹塑性边界曲线的形状, 当然是近似的, 因为这只是局部解。

HRR 解在弹塑性断裂力学中起了极其重要的作用。它发表以后十余年来, 许多研究者进一步研究它、应用它, 讨论它的适用范围, 利用它研究断裂准则。经过了十余年的努力, 使它由作为局部解的基本理论, 逐步获得广泛的实际应用。

现在对 HRR 局部解作几点说明:

(a) HRR 解不受屈服范围大小的限制。但在小范围屈服条件下有:

$$J = K_I^2 / E'$$

对于平面应变, 取  $E' = E/(1 - \nu^2)$ ; 对平面应力,  $E' = E$ 。但 HRR 解受小变形假定与  $n$  值的限制, 关于  $n$  值的限制, 后面还将讨论。

(b) 应力奇异性  $\sim r^{-1/(n+1)}$ ; 应变奇异性  $\sim r^{-\frac{n}{n+1}}$ 。

(c) 它是单参数解, 参数为  $J$  积分, 称为  $J$  场。它也是增量理论的局部解。

(d) 当  $n \rightarrow \infty$  时, 存在一个极限, 应力场趋近于 Prandtl 场。Ⅲ型问题的 HRR 型奇异解当  $n \rightarrow \infty$  时, 也有一个极限, 即 (5.45) 式。此处也存在与Ⅲ型问题一样的 HRR

解即J场适用范围的问题。

至少对于除双切口拉伸试件（该试件当  $n \rightarrow \infty$  时对应 Prandtl 场）以外的其它试件，HRR 局部解，当  $n \rightarrow \infty$  时，其适用范围可能将趋于零。这个问题我们将在 § 7 中讨论。

图6.8取自 Hutchinson<sup>[70]</sup> 的应力应变场角分布函数的计算结果。图6.9表示 Prandtl 场的结果，由两图比较可知，图6.8中  $n = 13$  的应力分布图与图6.9的 Prandtl 场结果已很相象了。

Rice 和 Johnson<sup>[71]</sup> 求得了当  $n \rightarrow \infty$  时，HRR 解的极限。设在小范围屈服条件下， $\nu = 0.3$ ，有最大塑性区射线矢径：

$$R_{\max} = 0.286(K_I/\sigma_0)^2, \text{ 当 } \theta = 103.5^\circ$$

裂纹张开位移

$$\delta_I = 0.717 \frac{K_I^2}{E\sigma_0} \approx 2.5 \frac{\sigma_0}{E} R_{\max}$$

位移  $u_r = \delta_I A \left\{ \left( 1 + \frac{3\pi}{2} - 2\theta \right) \left[ \exp \left( \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \left( 1 + \frac{5\pi}{4} - \theta \right) \right) - \sqrt{2} \pi \mu(\theta) \right] - \sqrt{2} (\cos \theta + \pi \sin \theta) \right\}$

式中  $\mu(\theta) = \int_{\pi/4}^{\theta} \sin \varphi \exp \left[ (\theta - \varphi) \left( 1 + \frac{3\pi}{2} - \theta - \varphi \right) \right] d\varphi$

$$A^{-1} = 2\sqrt{2} \exp \left[ \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] + 4\pi \mu \left( \frac{3\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \pi$$

严格地说，不能由局部解来定塑性区形状与尺寸，这只能理解为近似的。

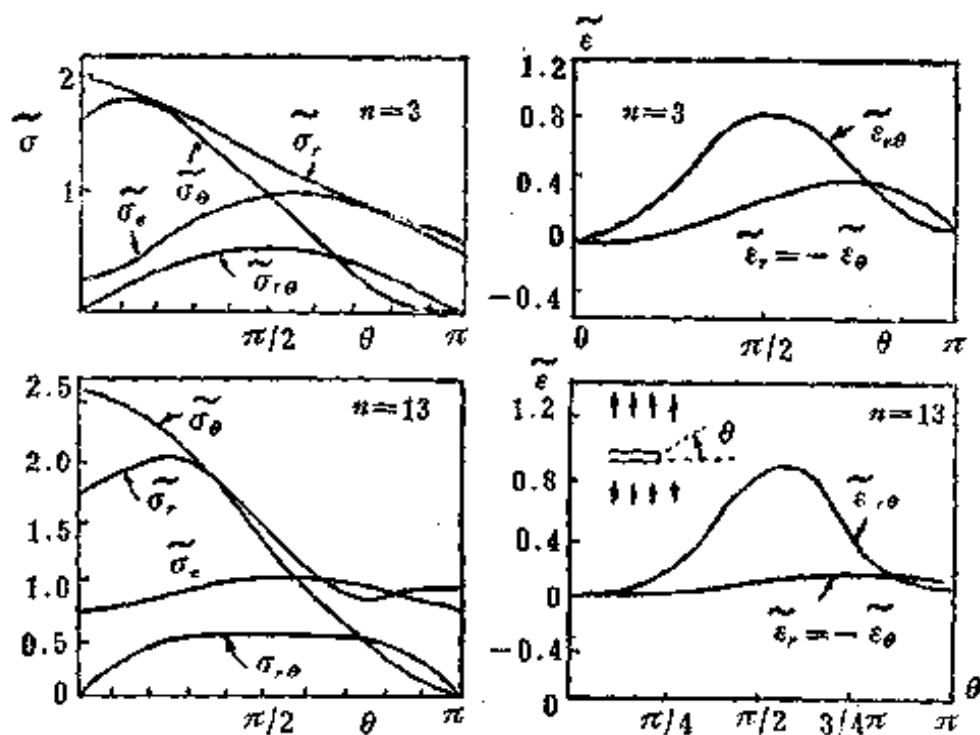


图 6.8 平面应变情形承受拉伸的裂纹尖端之应力与应变随 $\theta$ 的变化

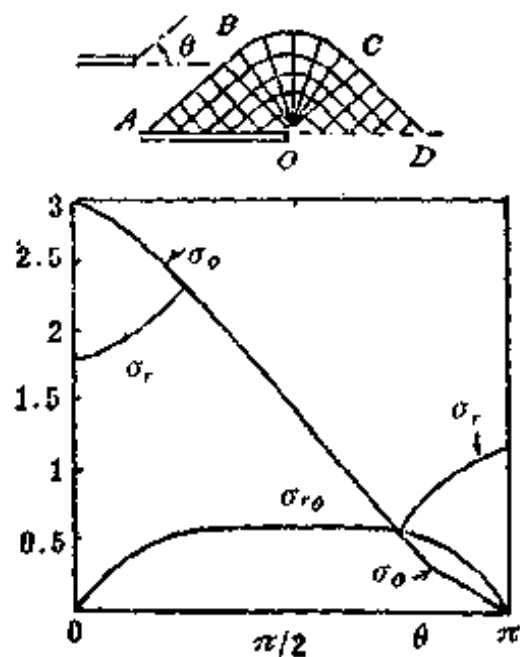


图 6.9 平面应变情形理想塑性材料的拉伸裂纹尖端的应力分布

### 3. I 型平面应力的局部解

(1) 对理想塑性材料讨论其局部解, 略去弹性变形

① 双切口拉伸试件, 如图6.10所示。Hill[72] 得到这种试件的解:  
在颈缩处,

$$\sigma_y = 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_x = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

极限载荷

$$P = 2\tau_0 \cdot 2c = 4 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} c \quad (6.22)$$

张开位移增量

$$d\delta_t = a \Delta \quad (6.22)$$

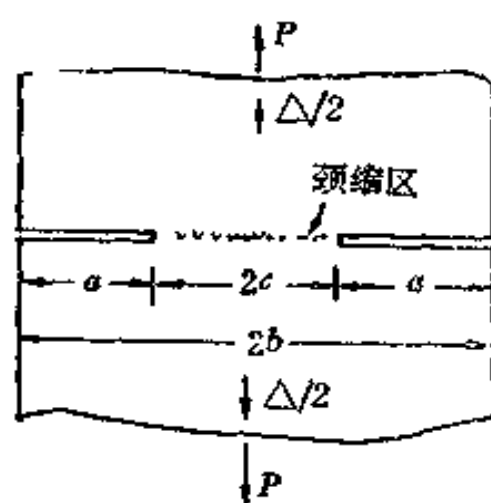


图 6.10 边裂纹的试件 (平面应力情形)

② 单边裂纹或中心裂纹试件。专著 [73, 69] 介绍了这一问题的解。由图6.11(a), (b) 在韧带均匀区内,  $\sigma_y = \sigma_0$ ,  $\sigma_x = 0$ 。 $\psi_1$  为图6.11所示速度矢量  $\vec{V}$  的有关的角度。

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1}{3} = 54^\circ 44'$$

$$\psi_1 = 2\psi - \frac{\pi}{2} = 19^\circ 28'$$

极限载荷与张开位移增量

$$\begin{aligned} P &= \sigma_0 c \\ d\delta_t &= d\Delta \end{aligned} \quad (6.23)$$

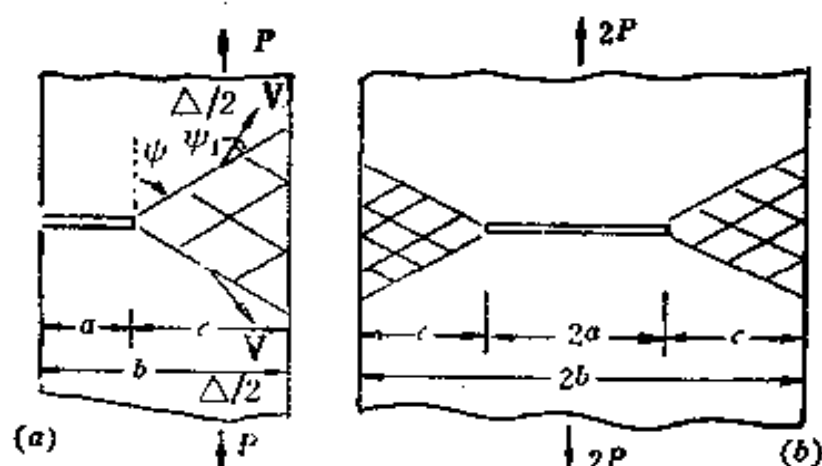


图 6.11 单边裂纹与中心裂纹试件 (平面应力情形)

③深裂纹弯曲试件, 见图6.12所示。Ford与Lianis<sup>[74]</sup>的解为:

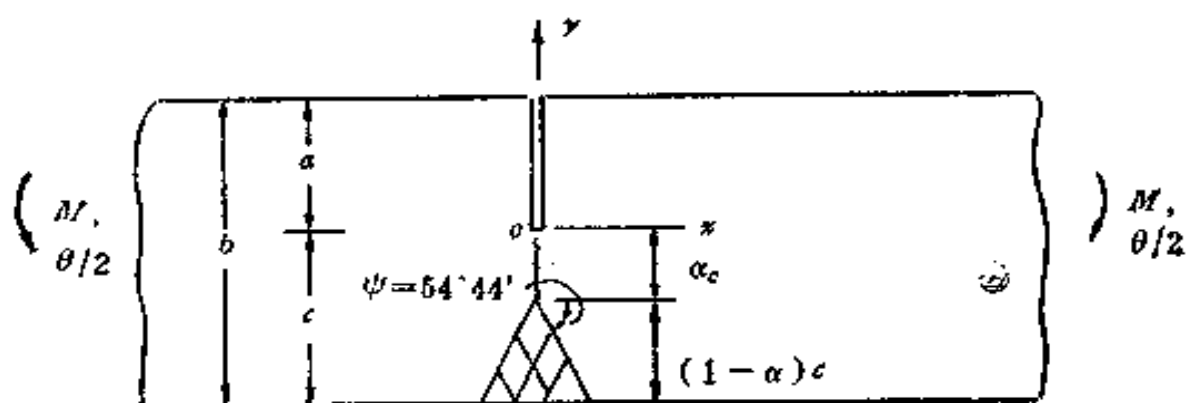


图 6.12 纯弯曲试件 (平面应力情形)

颈缩区内  $\sigma_x = 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$



均匀区内  $\sigma_x = -\sigma_0, \quad \sigma_y = 0$

由平衡方程  $\Sigma X = 0$ , 有

$$\sigma \cdot 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} - (1 - \alpha)\sigma_0 = 0$$

得

$$\alpha = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 1} = 0.464$$

由弯矩平衡, 得

$$\begin{aligned} M &= (1 - \alpha)c \cdot \sigma_0 \cdot \frac{1}{2} c = (2 - \sqrt{3})\sigma_0 c^2 \\ &= 0.268\sigma_0 c^2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$d\delta_i = \alpha c d\theta = 0.464 c d\theta$$

④ Hutchinson 解, Hutchinson [70] 求得了理想塑性情形下, I 型裂纹平面应力情形下的解, 其尖端的滑移场的构造及应力分布见图 6.13。

注意到下列应力应变分布特点: 与平面应变情形相反,

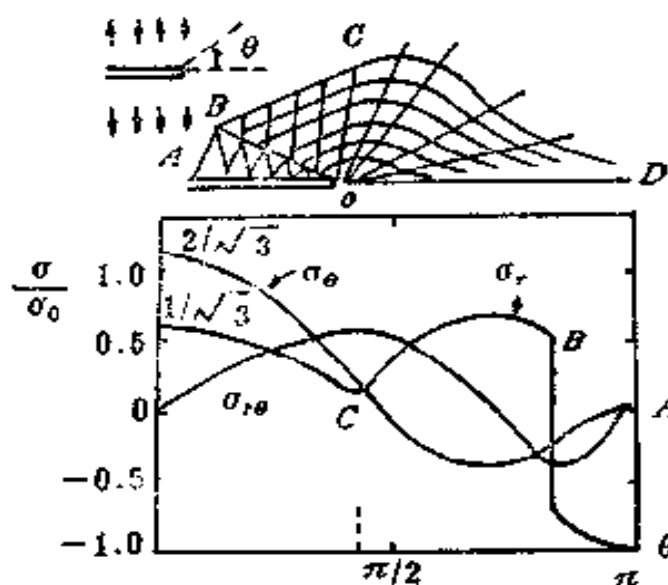


图 6.13 平面应力情形下理想弹塑性材料  
I 型裂纹的应力分布

沿裂纹表面是受压的(见图6.13中 $\sigma_r$ )，在扇形区内，塑性应变具有 $r^{-1}$ 阶奇异性。位移场是不定的。图6.13中， $\theta_{OB} = 151.4^\circ$ ， $\theta_{OC} = 79.7^\circ$ ，在 $OB$ 处 $\sigma_r$ 间断。在扇形区内，因 $\sigma_r = \sigma_\theta/2$ ， $\tilde{\epsilon}_r(\theta) = 0$ 。

对于这里考察的理想塑性材料平面应力的情形，也存在局部解的不唯一性。但上面所介绍的许许多多局部解中，其最大平均应力水平的差别，不如在本节“1”中所讨论的平面应变的情形那么剧烈。

## (2) 幂硬化材料，I型平面应力情形

Hutchinson(63)得到了局部解，所用的方法与本节“1”中所讨论的平面应变的情形相同。其差别是用 $\sigma_r = 0$ 代替在平面应变问题中 $\epsilon_r = 0$ 。所得到的应力、应变奇异场的解与(6.21)相同。但 $I_n$ 值与平面应变情形不同，其应力与应变

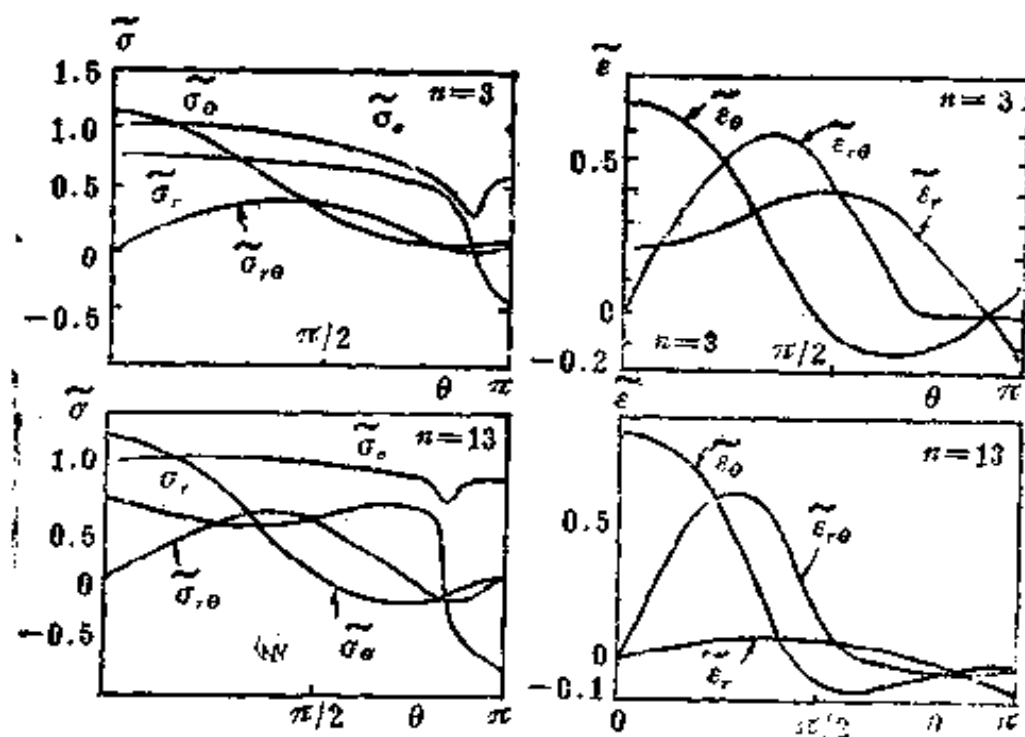


图 6.14 不同硬化指数 $n$ 值的应力与应变的角分布  
(平面应力情形)

随 $\theta$ 变化的计算结果表示在图6.14上。且当 $n \rightarrow \infty$ ，幂硬化材料退化到理想塑性的 Hutchinson 解。将图6.14中 $n = 13$ 的情形与图6.13相比较，其应力分布很相象，此时 $\varepsilon_r$ 值也很小。

#### 4. 复合型

仅讨论在平面应变条件下，I、II型复合的情形。

##### (1) 平面应变，理想塑性材料

Shih[76]研究了这一问题，定义了参数

$$M^p = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left| \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right| \quad (6.25)$$

对于I型， $M^p = 1$ ；对于II型， $M^p = 0$ 。图6.15给出了 $M^p$ 分别为1，0.84，0.54，0四种情形下，裂纹尖端的滑移场的分区构造及应力 $\sigma_{rr}$ ， $\sigma_{\theta\theta}$ ， $\sigma_{r\theta}$ 随角度 $\theta$ 变化的图形。

由图可见：

- ① 裂纹尖端全部被塑性区包围。
- ② 接近于I型时， $\sigma_{r\theta}$ 有间断；接近于II型时， $\sigma_{r\theta}$ 无间断。
- ③ 裂纹上、下表面应力分布有下列特点：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr}(r, \pi) &= \sigma_{rr}(r, -\pi) = 2\sigma_0 / \sqrt{3} \\ &\text{当 } M^p = 1, \\ \sigma_{rr}(r, \pi) &= -\sigma_{rr}(r, -\pi) = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \\ &\text{当 } 1 > M^p \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

高玉臣在[76]得到另一个解，接近于I型（但非I型）时，非满塑性区；接近于II型时，出现满塑性区。应力无间断，应变有 $r^{-1/2}$ 阶奇异性。

##### (2) 平面应变，幂硬化材料

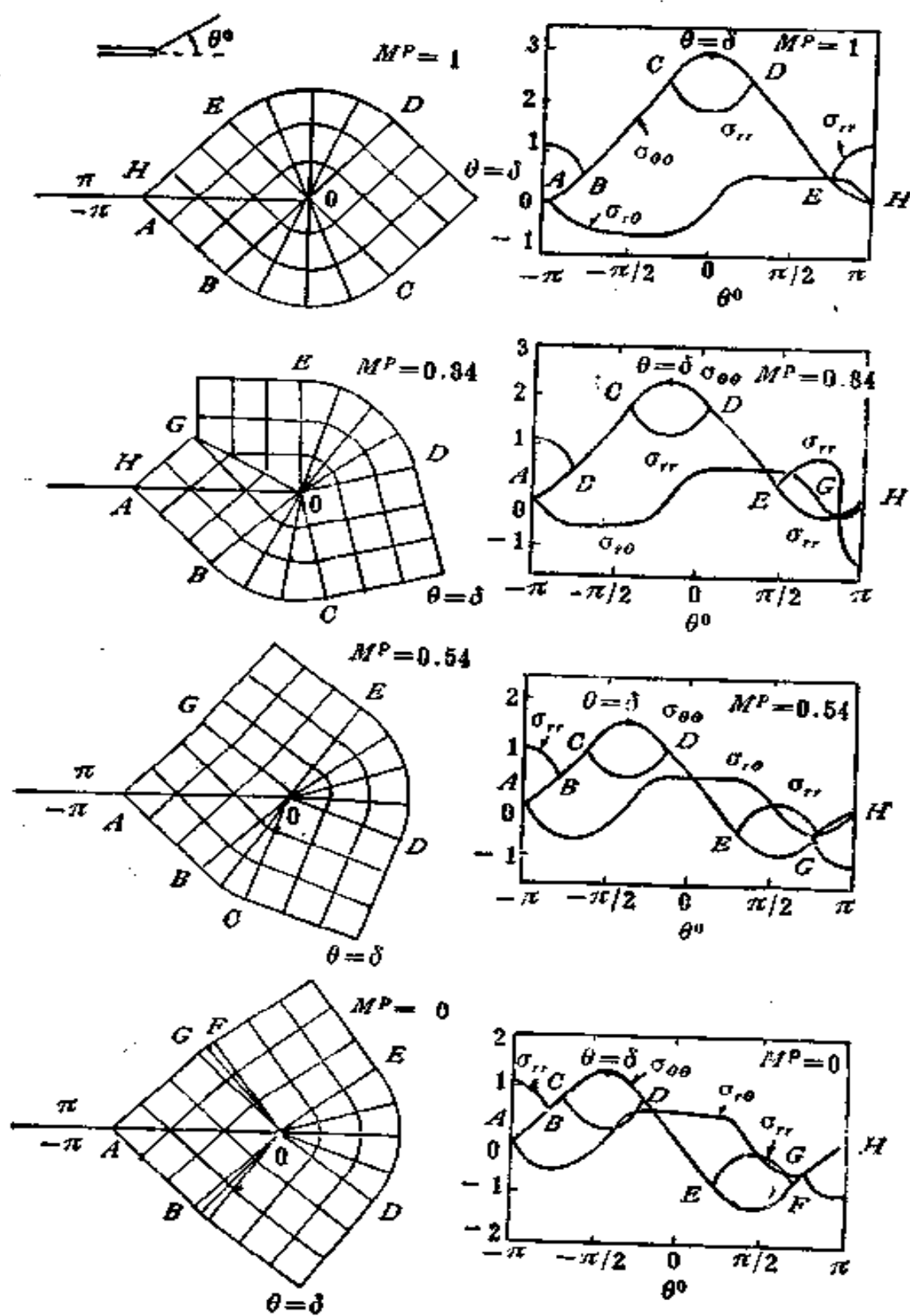


图 6.15 复合型的应力角分布 (平面应变, 理想弹塑性)

将 (6.21) 式 HRR 奇异性推广到复合型情形。定义

$$M^p = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right| \quad (6.27)$$

设硬化律为

$$\frac{\varepsilon^p}{\varepsilon_0} = a(\sigma/\sigma_0)^n \quad (6.28)$$

$\varepsilon^p$  为塑性应变。在讨论局部解时，可略去弹性变形。

最后得到下列复合型情况下应力应变场的结果

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_0 K_{M^p} r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, M^p) \\ \sigma_\theta &= \sigma_0 K_{M^p} r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_\theta(\theta, M^p) \\ \varepsilon_{ij}^p &= \frac{a\sigma_0}{E} (K_{M^p})^n r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}^p(\theta, M^p) \\ u_i &= \frac{a\sigma_0}{E} (K_{M^p})^n r^{-\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, M^p) \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

$K_{M^p}$  为幅值因子，在局部解中不能确定。故

$$M^p = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left| \frac{\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta = 0, M^p)}{\tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta = 0, M^p)} \right| \quad (6.27)'$$

称为复合型参数。

对于纯 II 型的幂硬化材料平面应变问题，Hutchinson 在 [70] 中已得到解。Shih<sup>[75]</sup> 关于复合型的工作是在 Hutchinson 的工作<sup>[63][70]</sup> 基础上进行的。

引入规格化条件

$$\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \tilde{\sigma}_\theta(\theta) = 1 \quad (6.30)$$

$K_{M^p}$  不可定，但可将它与 J 积分联系起来

$$J = \frac{\alpha \sigma_0^2}{E} I_n(M^p) (K_{M^p})^{n+1} \quad (6.31)$$

若已知外场的  $J$  积分, 由上式不足以确定两个未知量。

Eudiansky 与 Rice<sup>[44]</sup> 曾经企图利用由 Knowles 与 Sternberg<sup>[47]</sup> 导出的路径无关的积分来帮助确定  $K_{M^p}$  与  $M^p$ , 但未获成功。由本章 (1.16) 式, 当积分回路内不含奇异点, 则

$$J_k = \oint (W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) ds = 0 \quad k=1, 2, 3 \quad (6.32)$$

取如图 6.16 所示的积分回路,

$$\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$$

则沿  $\Gamma$  的  $J_1$  积分为零。

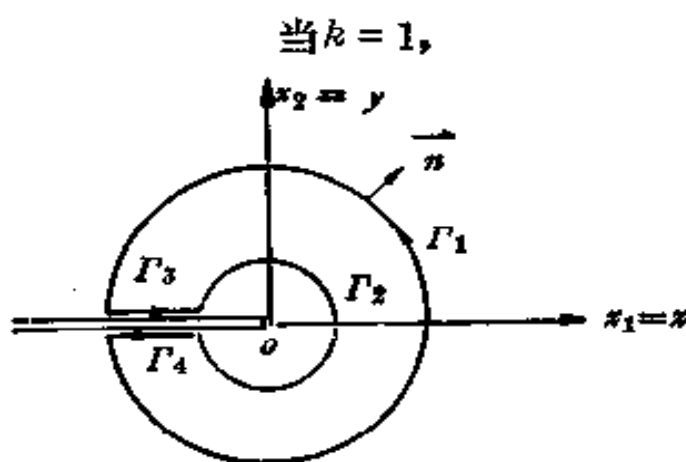


图 6.16

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (W n_1 - T_i u_{i,1}) ds = \\ & \left[ \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right] (W n_1 - T_i u_{i,1}) ds \end{aligned}$$

由于在裂纹表面上 (即  $\Gamma_3, \Gamma_4$  上) 有  $n_i = 0$ ,  $T_i = 0$ 。故

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (W n_1 - T_i u_{i,1}) ds \\ & = \int_{\Gamma_1} (W n_1 - T_i u_{i,1}) ds = \text{const} = J \end{aligned}$$

而且积分的起点与终点可沿裂纹表面任意滑动。此即为通常的J积分（即路径非封闭的 $J_1$ ）。

但当  $k = 2$  时，

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_2} (W n_2 - T_i u_{i,2}) ds \\ &= \left[ \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} + \int_{\Gamma_4} \right] (W n_2 - T_i u_{i,2}) ds \end{aligned}$$

在 $\Gamma_3$ 上， $n_2 = -1$ ， $T_i = 0$ ；在 $\Gamma_4$ 上， $n_2 = 1$ ， $T_i = 0$ 。故上述等式右端沿 $\Gamma_3$ 、 $\Gamma_4$ 的积分和不为零：

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \right] (W n_2 - T_i u_{i,2}) ds \\ &= - \int_{\Gamma_3} W_+ ds + \int_{\Gamma_4} W_- ds \end{aligned}$$

上式中，脚标“+”表示沿裂纹上表面（ $\theta = \pi$ ）的量；“-”号表示沿裂纹下表面。故

$$\int_{\Gamma_1} (W n_2 - T_i u_{i,2}) ds \neq \int_{\Gamma_2} (W n_2 - T_i u_{i,2}) ds$$

积分的起点与终点，也不能沿裂纹面任意滑动。因而路径非封闭的 $J_2$ 不守恒。所以，对于小范围屈服情况，外场为 $K$ 场（即局部解外面被 $K$ 场包围），此时即使计算得 $K$ 场中的 $J_1$ （不守恒）积分也无济于事。

Budiansky 与 Rice<sup>[44]</sup>通过较长的推导，对于线弹性情况求得

$$\begin{aligned} J_1 + iJ_2 = & -\frac{2i}{E'} \left[ \int_A^B (\varphi')^2 dz - 2 \int_A^B \overline{\varphi' \psi'} dz \right] \\ & + \frac{2i}{E'} \left[ z \overline{(\varphi'^2)} \right]_A^B \end{aligned}$$

积分回路与 $A$ 、 $B$ 点如图6.17所示， $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ 为复应力函数。

$$z_A = r_A e^{-i\alpha}, \quad z_B = r_B e^{i\alpha}$$

由 Williams 展开式

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{n/2}, \quad \varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} A_n z^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{\frac{n}{2}+1},$$

$$\psi(z) = \chi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2} + 1 \right) B_n z^{\frac{n}{2}}$$

式中首项, 由第一章 (1.2), (1.3) 式:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (K_I - iK_{II})$$

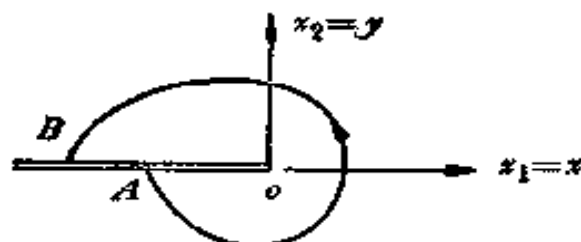


图 6.17

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{3} K_I + i K_{II} \right)$$

将 Williams 展开式代入  $J_1 + iJ_2$  式, 经过计算后, 得

$$J_1 = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2)$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi E'} K_{II}^2 \ln \frac{r_B}{r_A} - \frac{2}{E'} K_I K_{II} +$$



$$+ \frac{4}{E'} (r_B^{1/2} + r_A^{1/2}) \frac{1}{i} [(A_1 A_2 - \bar{A}_1 \bar{A}_2) + (A_1 \bar{A}_2 - \bar{A}_1 A_2)]$$

式中  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$  为与  $A_1, A_2$  共轭的复数。令  $r_A = r_B \rightarrow 0$ , 即得

$$J_2 = -2K_I K_{II} / E'$$

但 Budiansky 与 Rice 却根据上述  $J_2$  值当  $r_A = r_B \rightarrow 0$  时有极限存在的事实, 附带地得到一个结论: 在复合型的局部解中, 裂纹上、下表面  $W_+$  与  $W_-$  的奇异性幅度相同。因为裂纹表面自由, 故  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta r} = 0$ , 在裂纹表面上  $W$  只与  $\sigma_{rr}^2$  有关。同样, 对弹塑性情况, 不论  $M^p$  为何值, 恒有:

$$\tilde{\sigma}_{rr}(\theta = \pi) = \pm \tilde{\sigma}_{rr}(\theta = -\pi) \quad (6.33)$$

其极限情形为:

$$\left. \begin{aligned} M^p = 1 \text{ 时 (I 型)} \quad & \tilde{\sigma}_{rr}(\theta = \pi) = \tilde{\sigma}_{rr}(\theta = -\pi) \\ M^p = 0 \text{ 时 (II 型)} \quad & \tilde{\sigma}_{rr}(\theta = \pi) = -\tilde{\sigma}_{rr}(\theta = -\pi) \end{aligned} \right\} (6.34)$$

那么, 必然存在一个在 0 与 1 之间的  $M^p$  的过渡值, 从上述 (6.34) 式的第一式转变 (突变) 为另一式。

Shih 的数字计算结果表明, 这个转变就出现在  $M^p = 1$ , 即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}(\theta = \pi) &= \tilde{\sigma}_{rr}(\theta = -\pi) \quad \text{当 } M^p = 1 \\ \tilde{\sigma}_{rr}(\theta = \pi) &= -\tilde{\sigma}_{rr}(\theta = -\pi) \quad \text{当 } 1 > M^p \geq 0 \end{aligned} \right\} (6.34)'$$

即复合型的 HRR 局部解, 只要偏离 I 型一点点, 裂纹两表面受力就变成相反 (沿一个表面受拉, 沿另一表面受压)。

这个现象似乎是令人难以置信的, 它似乎预示着  $r \rightarrow 0$  (即局部解) 的数学过程是比较复杂的, 即当  $r \rightarrow 0$  时, 精

确解（全场解）趋近于局部解对于 $\theta$ 而言是不均匀的。

例如当 $M^p$ 接近1时，应力比 $\sigma_{rr}(r, \theta)/\sigma_{rr}(r, -\pi)$ 随 $\theta$ 角变化的情形（在到裂纹尖端的距离 $r$ 由较大值向零变化的过程中）示意于图6.18。

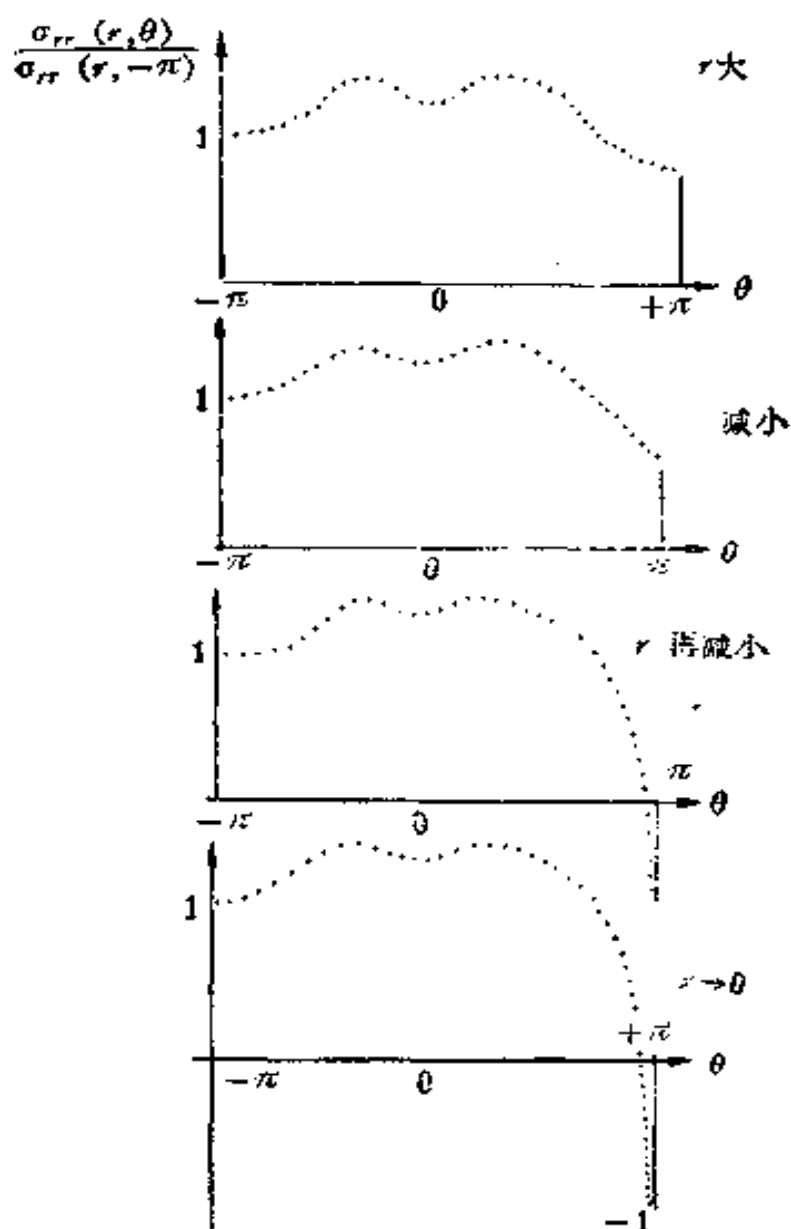


图 6.18 不同 $r$ 值时 $\sigma_{rr}(r, \theta)$ 的角分布变化示意图

这可能预示着，当 $M^p$ 接近于1时，在 $\theta = \pi$ 附近有一 $\theta$ 的边界层，这个边界层宽度( $\theta$ )随着 $r \rightarrow 0$ 而趋近于零。

当  $J$  值一定时, 最大正应力  $\lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\sigma_{\theta\theta \max}(\text{复合型})}{\sigma_{\theta\theta \max}(\text{I型})} \right]$  随参数  $M^p$  与硬化指数  $n$  的变化见图 6.19。由该图可见, 如果起裂服从最大正应力准则, 则  $n > 3$  时, II 型或复合型裂纹起裂时的  $J_c$  值可能比 I 型的  $J_{Ic}$  值要大。

以上的结论不受屈服范围大小的限制。对于小范围屈服的情况, 存在外部的复合型  $K$  场:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \tilde{\sigma}_{ij}^I(\theta) + K_{II} \tilde{\sigma}_{ij}^{II}(\theta) \right] \quad (6.35)$$

$K_{Mp}$ ,  $M^p$  与  $K_I$ ,  $K_{II}$  的关系, 只能用有限元的计算结果。即以 (6.35) 式为  $r \rightarrow \infty$  处的边界条件, 求小范围屈服条件下的局部解。Shih[75] 应用奇异单元, 参数  $K_{Mp}$ ,  $M^p$  也取作奇异单元的未知量。

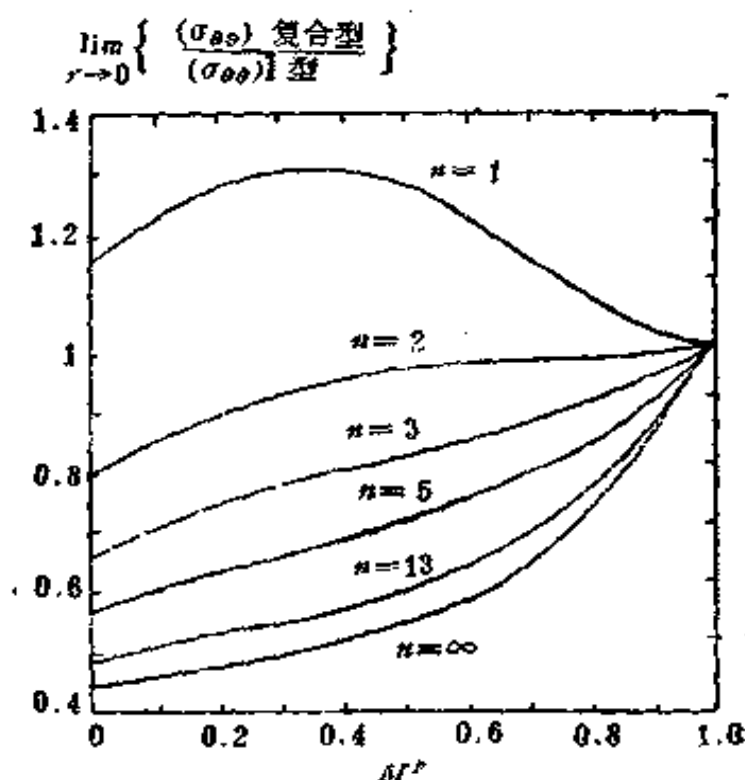


图 6.19 不同  $n$  值下复合型的  $\sigma_{\theta\theta}$  与  $M^p$  的关系

定义外场（K场）的复合型参数

$$M' = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{\theta n}(\theta = 0)}{\sigma_{t\theta}(\theta = 0)} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left| \frac{K_I}{K_{II}} \right| \quad (6.36)$$

注意 (6.27) 式的  $M^p$  与上式的  $M'$  是不等的。因为内场（局部解）决定于外场（K场），故  $M^p$  依赖于  $M'$  和硬化指数  $n$ ，结果画在图 6.20 上。有限元计算的结果，不仅仅是局部解，而且是小范围屈服条件下的全场解。小范围屈服条件下，复合型的塑性区形状，表示于图 6.21。由图中可见，当  $M' = 1$ ， $n = 13$  时，塑性区尺寸的最大值  $R_{\max}(\theta)$  发生在当  $\theta \approx \pm 70^\circ$ ，且  $R_{\max} \sim 0.15 \frac{J}{\sigma_0 \varepsilon_0}$ 。而 Rice 等<sup>[42]</sup> 计算近似的  $R_{\max}(\theta)$  发生在  $\theta \sim 103.5^\circ$ （见 § 6.2 当  $n \rightarrow \infty$  时）。二者相比，应该

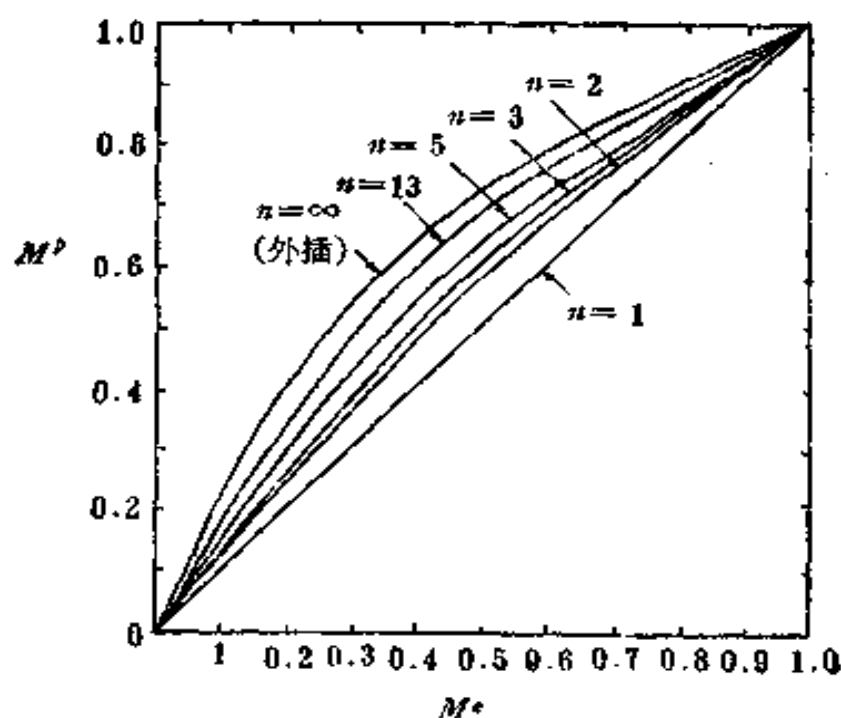


图 6.20 不同  $n$  值下  $M^p$  与  $M'$  关系

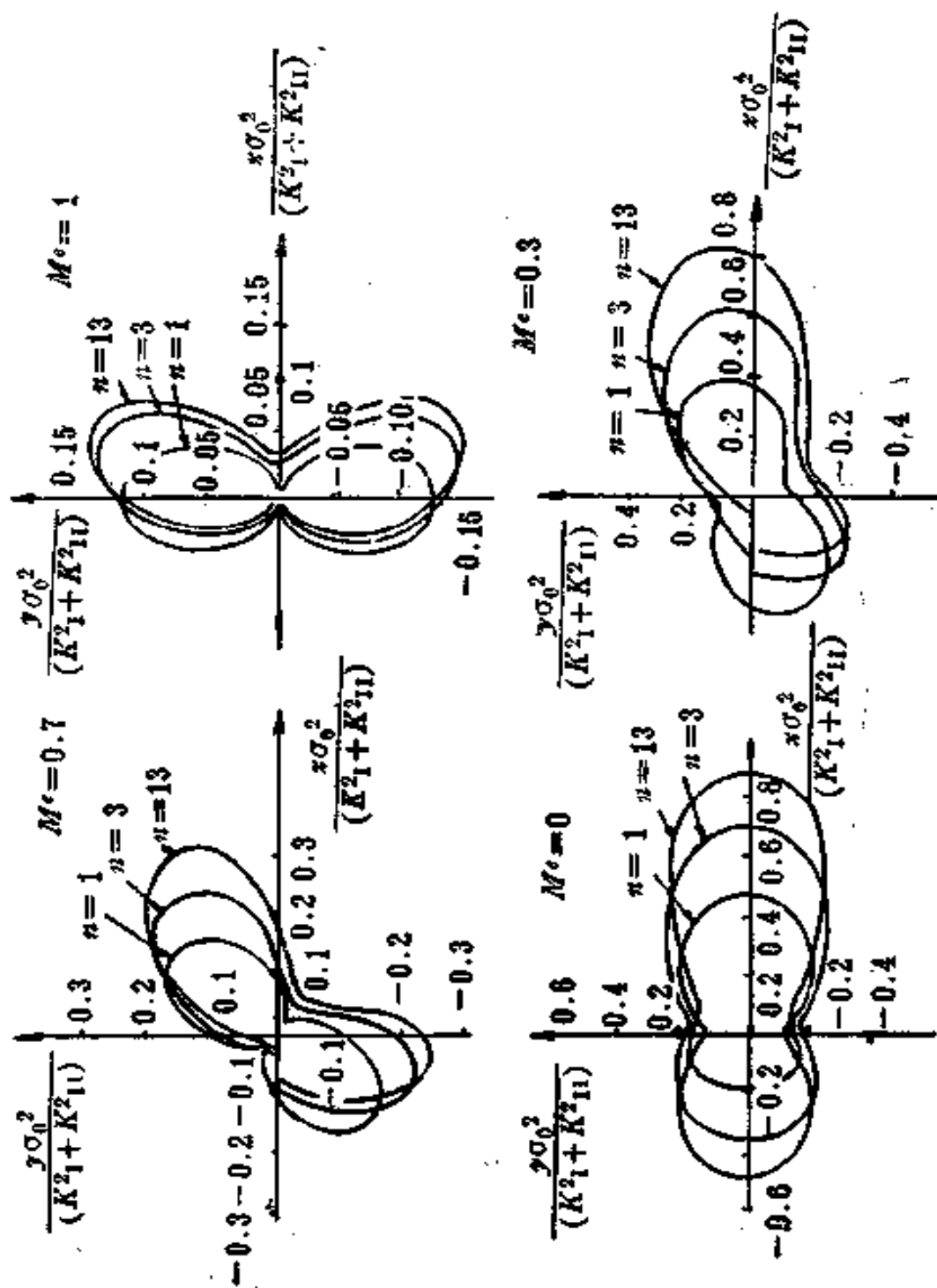


图 6.21 不同  $M'$  值的复合型情况下的塑性区形状与大小

说Shih 的计算结果在有限元精度范围内是正确的。

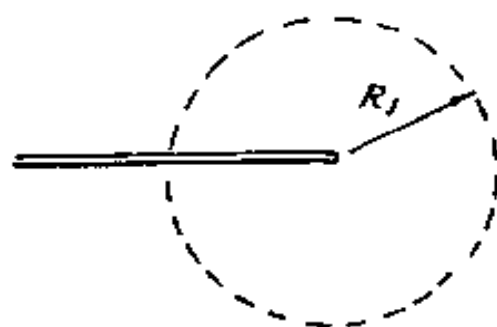
当 $n \rightarrow \infty$ 时, 复合型的HRR局部解趋近于前述的复合型的理想塑性情形的解。(6.34)' 也趋近于(6.26)式。

## § 7 J 主导条件

本章中讨论的材料模型有二: 其一是幂硬化材料, 它能近似地描写大多数工程上应用的材料; 其二是当硬化指数 $n \rightarrow \infty$ 的极限情形, 即理想塑性材料。

从§ 5, § 6 的讨论(分别对应于Ⅲ型和Ⅰ型问题) 我们得到一系列的局部解, 同时得到以下的结论:

①对于幂硬化材料, 当 $n$ 为有限时, J 场(即 HRR 奇异解, 对Ⅲ型是(5.28)至(5.30)式; Ⅰ型平面应变与平面应力见(6.21)式; 复合型平面应变见(6.29)式)是在裂纹



尖端附近区域中的唯一解。设在图 7.1 所示的尺寸(例如半径) $R_J$ 的区域内, HRR 局部解可以作为全场解的良好近似, 则这个区称为 J 主导区。 $R_J$ 为 J 主导区的尺寸。

图 7.1 J 主导区示意图

HRR 奇异解, 作为局部解, 对 $J_2$ 形变理论与 $J_2$ 流动理论都适用( $J_2$ 指Mises条件)。

总之, J 主导区的概念是建立在假定材料有一定硬化基础上的。

②对于 $n \rightarrow \infty$ 的理想塑性情形, 对于有限宽板的Ⅲ型问题, Amazigo<sup>[62,66]</sup> 的精确解说明当 $n \rightarrow \infty$ 时,  $R_J \rightarrow 0$ 。

对于Ⅰ型问题, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, HRR局部解(平面应变)

只趋近于众多的理想塑性材料尖端局部场中的一个。除了这一个以外的其它局部场，必定有  $R_J \rightarrow 0$ 。I 型 HRR 局部解（平面应力）与 I、II 复合型 HRR 局部解（平面应变），也有与 I 型（平面应变）相类似的情形。

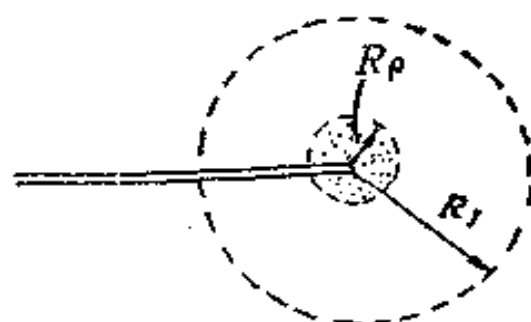
那么就必然提出一个问题：J 主导区尺寸  $R_J$  究竟多大。

对于 I 型问题，目前只有靠有限元计算来回答：在什么情况下  $R_J \rightarrow 0$ ？如果  $R_J$  不趋近于零，那么  $R_J$  与哪些因素有关？估计除幂硬化指数  $n$  以外，还与结构或试件的构形及加载方式有关（例如为单边裂纹拉伸，中心裂纹拉伸、深裂纹弯曲）；与载荷大小有关（载荷小时，处于小范围屈服阶段，或载荷大时，处于全屈服阶段）。

### ③小变形条件的限制：

欲使 J 作为裂纹尖端场的唯一度量（即单参数）有实际的意义与用处，必须要求断裂过程区（即材料实际发生分离的区域——属于宏观与微观相结合的研究区域范围）与有限变形区域都完全包含在 J 主导区之内，它们的大小以  $R_0$  表示，如图 7.2。

对于大多数韧性金属，断裂过程区尺寸  $\sim$  裂纹尖端附近有限变形区尺寸（尖端纯化区尺寸） $R_0$ 。



根据 McMeeking<sup>[77]</sup> 的研究

（小范围屈服，I 型平面应变，有限变形），有限变形的影响是小范围的，仅限于尖端附近  $2 \sim 3 \delta_1$  的范围。在此范围以外，按有限变形理论与按小变形理论计算的结果相差甚微。假定断裂过程区也在这个范围。

图 7.2 J 主导区与过程区

之内, 则 I 型平面应变, J 主导区尺寸  $R_J$  须满足下列条件 (大约)

$$R_J > 3\delta_t \quad (7.1)$$

J 才能作为静止裂纹单调加载下裂纹尖端场的唯一度量。

但是根据 HRR 解, 在平面应变与平面应力的 I 型条件下, Shih<sup>[78]</sup> 得到下列结果:

$$\delta_t = d(a\epsilon_0, n) \frac{J}{\sigma_0} \quad (7.2)$$

上式的详细推导将在 § 8 给出。但这种形式的公式前面已经出现过。例如 III 型裂纹, 理想塑性材料在小范围屈服条件下,

由 (3.16) 式有  $\delta_t = \frac{4}{\pi} \frac{J}{\sigma_0}$ , I 型的 Dugdale 模型,

由 (2.10) 式有  $\delta_t = \frac{J}{\sigma_0}$ 。

对于轻度与中等程度硬化的材料

$$\delta_t \approx 0.6 \frac{J}{\sigma_0} \quad (7.3)$$

硬化程度越大,  $d$  值越小。

于是 (7.1) 式要求:

$$R_J > 3 \times 0.6 \frac{J}{\sigma_0} = 1.8 \frac{J}{\sigma_0} \quad (7.4)$$

上式称为 J 主导条件。下面分两种情况分别讨论。

### 1. 小范围屈服 (平面应变)

远处为 K 场, 利用有限元计算, Shih 得到了 I 型的计算结果<sup>[75]</sup>。当  $n > 3$  时, 塑性区尺寸  $\sim 0.15 \frac{J}{\sigma_0 \epsilon_0}$

设  $\epsilon_0 \approx 0.003$ , 则上述塑性区尺寸为 (7.4) 式的约 28 倍。



$$R_J \sim (1/5 \sim 1/4) \sigma_P.$$

Tracey[65], McMeeking[77, 79] 的有限元数值结果证实: 对于一切  $n$  (包括  $n \rightarrow \infty$ )、 $J$  主导条件都满足。并且  $n \rightarrow \infty$  时, 尖端应力场趋于 Prandtl 场。

## 2. 大范围屈服 (平面应变)

若 HRR 解还适用, 即  $J$  主导区中, 由 (6.21) 式, 以  $r / \frac{J}{\sigma_0}$  为无量纲坐标的应力与应变分布应与  $J$  无关。

(1) 双切口拉伸试件, 深裂纹弯曲 (紧凑拉伸试件属此类)。称为第一类试件。

McMeeking 和 Parks[80] 用分段幂硬化材料 (即应力应变关系中计入线弹性与幂硬化两阶段) 的有限元计算, 考虑了有限变形, 从小范围屈服一直计算到全屈服。对深裂纹弯曲试件, 计算结果与上述的小范围屈服结果相近。

Shih 与 German[81] 计算结果表明, 在韧带全屈服情形下

$$R_J \approx 0.07 c \quad (7.5)$$

$c$  为韧带尺寸。由 (7.4)、(7.5) 式得

$$c > 25 \frac{J}{\sigma_0} \quad (7.6)$$

由 (7.3), 上式也可写成

$$c > 40 \delta_i$$

对通常韧性钢, 起裂时  $\delta_i \approx 0.2 \text{ mm}$ , 故估算得  $c > 1 \text{ cm}$ 。

(7.6) 式也是 Paris 在文[82]所建议的尺寸限制。

(2) 中心裂纹拉伸试件 (单边裂纹拉伸试件也属此类)。称为第二类试件。

McMeeking 与 Parks[80] 的有限元计算结果见图 7.3。由图可知, 当  $\sigma_0 c / J$  值小时, 结果与小范围屈服情形差异较大。

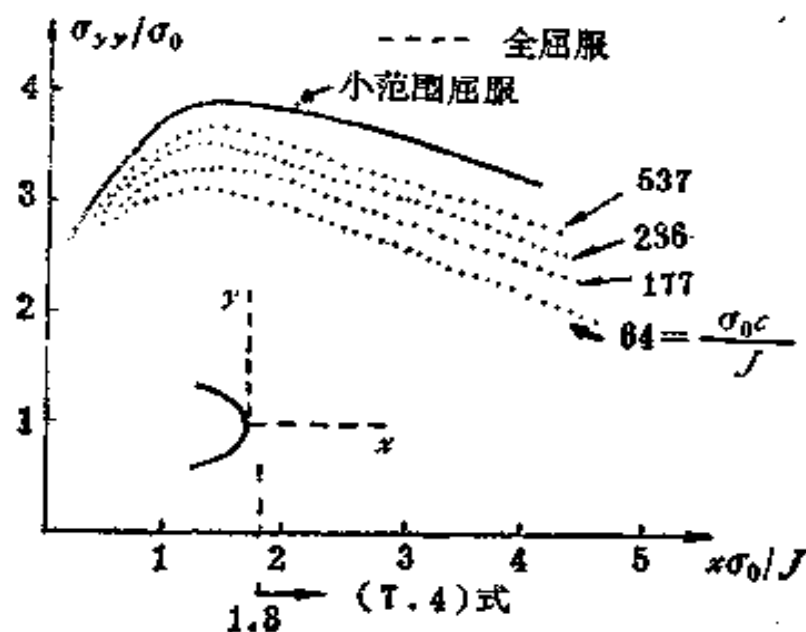


图 7.3  $\sigma_{yy}$  有限元计算结果

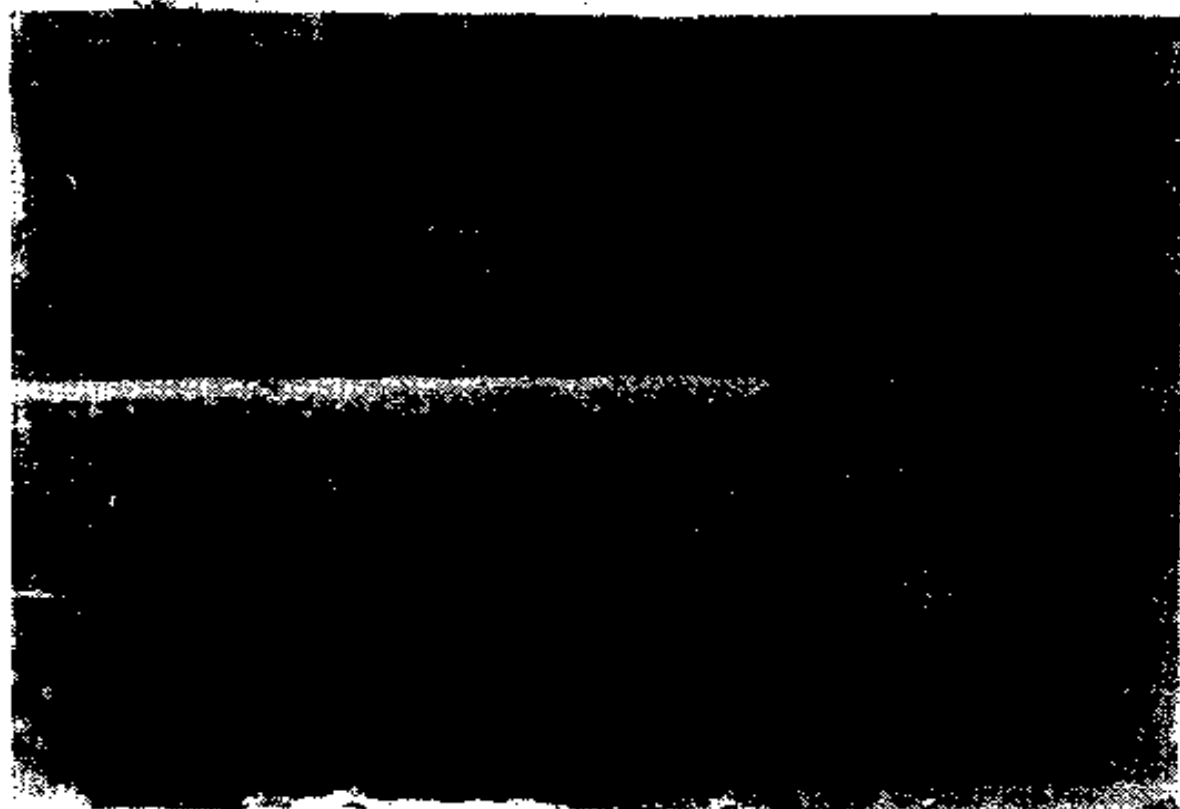


图 7.4 A533B中心裂纹拉伸试件全塑性状态破坏照片(81)  
沿45°有强烈的变形, 沿该方向断裂。试件厚 $B = 50\text{mm}$ ,  
宽度 $2W = 150\text{mm}$ ,  $W - a_0 = 19.6\text{mm}$  (韧带宽度)

建议实现 J 主导的条件为  $\frac{\sigma_0 c}{J} > 200$ , 即

$$c \geq 200 \frac{J}{\sigma_0} \quad (7.7)$$

如果材料的硬化程度不很高, 当  $\frac{\sigma_0 c}{J} < 200$  时, 在  $\theta = 45^\circ$  的射线上应力显著加大, 典型的试件破坏照片见图 7.4。

Shih 与 German<sup>[81]</sup> 的小应变有限元计算也得到在  $\theta = 45^\circ$  的射线上类似的结果, 当  $n = 10$  时

$$R_f \approx 0.01 c \quad (7.8)$$

由 (7.4) 与 (7.8) 式,  $0.01 c > 1.8 \frac{J}{\sigma_0}$ , 所得结果与 (7.7)

式大至相同。将有限元计算结果直接与 HRR 奇异解的结果相比较, 在图 7.5 及图 7.6 中, 在不同的载荷值 (即  $c\sigma_0/J$  值) 下, 对  $n = 3$  及  $n = 10$  两种情形从小范围屈服直至全屈服的有限元计算结果表明, 对弯曲试件, 只要 (7.6) 式满足, 当离裂纹端距离大于  $2 \sim 3J/\sigma_0$  或  $4 \sim 6\delta$  时, HRR 奇异场与有限元结果之间有良好的近似, 而中心裂纹受拉板条则不然。对于低硬化材料,  $n = 10$  的情形, 图 7.6 的结果与 (7.7) 式的尺寸限制要求是相一致的。而对高应变硬化 ( $n = 3$ ) 的情形, (7.7) 式的要求可稍稍放松。图 7.5 与图 7.6 的横坐标中, 均标出对深裂纹弯曲型试件的  $R_f$  估计值 (按 (7.5) 式) 与中心裂纹拉伸的  $R_f$  估算值 (按 (7.8) 式) 的位置, 分别以  $\downarrow$  及  $\downarrow$  号标注在图上。

(7.7) 式的限制条件, 严重地限制了 J 的应用 (作为大范围屈服情况下, 与其它类型试件相比较的断裂参数而言)。

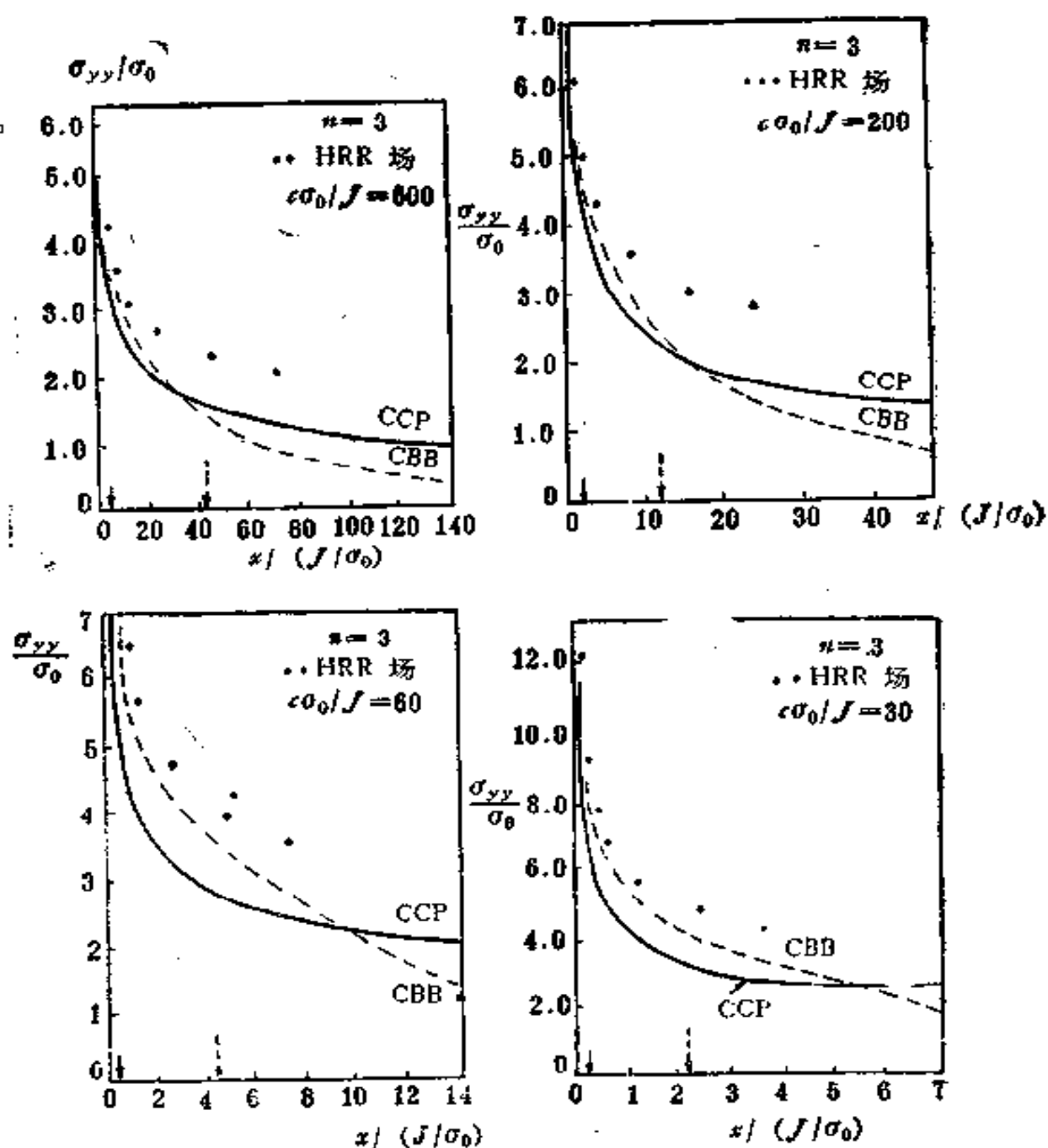


图 7.5  $n=3$ ,  $\sigma_0/E=0.002$ ,  $a/b=0.75$   
CBB...深裂纹弯曲试件 CCP...中心裂纹板条拉伸试件

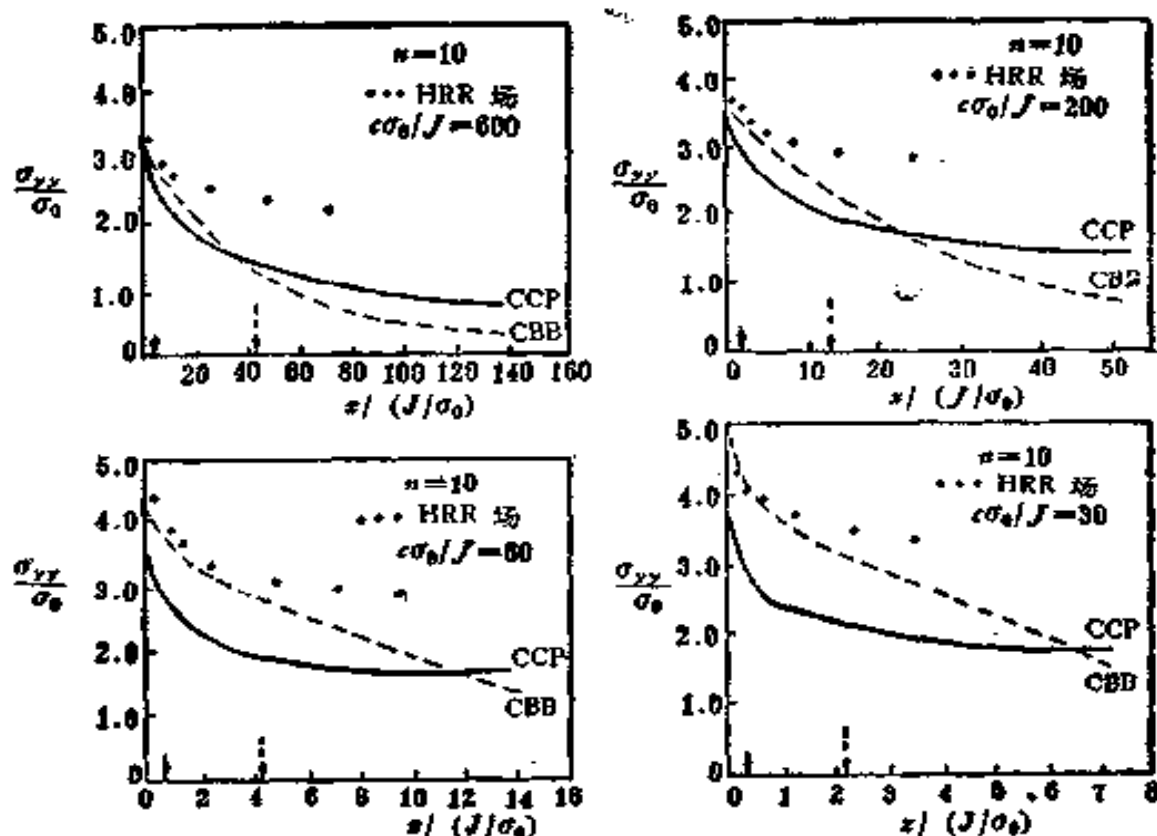


图 7.6  $n=10$ ,  $\sigma_0/E=0.002$ ,  $a/b=0.75$   
(试件类型同图7.5)

Shih, Delorenzi 与 Andrews 等<sup>[83]</sup>, 通过试验证实: 对于韧带主要承受弯曲的弯曲型试件 (即前述第一类试件), 只要符合 (7.6) 式的要求,  $J_{Ic}$  的数值 (类似断裂准则 (2.18) 式) 与下列因素无关: 塑性区大小, 裂纹长度与试件宽度的比值。

对于拉伸型试件 (即韧带主要承受拉伸的情形), 即前述第二类试件, (7.6) 式的尺寸要求是不足的, 出现沿  $45^\circ$  方向破坏的情况, 且起裂时的  $J_{Ic}$  值, 比之紧凑拉伸试件 (属于韧带主要承受弯曲) 相应的值大很多。

弯曲型试件, 即前述第一类试件的特点是: 裂纹尖端附近, 三轴应力水平高。而对于拉伸型试件, 裂纹尖端附近,

三轴应力水平低。

有的研究者建议：采用两个参数来描述裂纹尖端场的状态，一个参数为  $J$  积分；还有一个反映裂纹尖端附近三轴应力水平的参数，但后一参数究竟是什么，迄今尚不清楚。

迄今为止，大多数的研究工作集中在选择对能够保证  $J$  主导条件的裂纹尖端附近三轴应力水平高的试件进行试验。当然，对于一定的材料来说，这种类型试件测出的起裂与扩展的  $J$  值更低。

以上的有限元研究是对平面应变的情形进行的。而对平面应力的情形甚少研究，因为对于后者，构形的影响较少，这可以从理想塑性情形下的应力分布反映出来。

## § 8 $J$ 主导条件下裂纹张开位移 $\delta_i$ 与 $J$ 的关系

Rice 建议了图 8.1 所示的两条  $45^\circ$  的射线与裂纹表面交点处之张开位移，定义为  $\delta_i$ 。

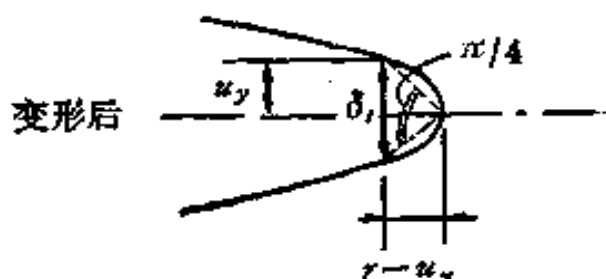
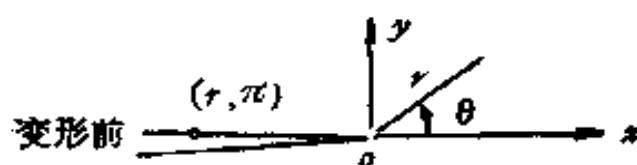


图 8.1  $\delta_i$  的定义

根据这一  $\delta_i$  的定义，

Shih[78]采用 HRR 奇异解与有限元法作了计算。讨论的是 I 型平面应变、平面应力问题。

1. 根据 HRR 奇异场解计算

由 (6.21) 式的 HRR 局部解，取  $u_1 = u_x$ ， $u_2 = u_y$ 。变形前与变形后裂纹示

意于图8.1。令 $\theta = \pi$ ，有

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\alpha\sigma_0}{E} \left( \frac{E}{\alpha\sigma_0^2 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_x(\pi, n) \\ u_y &= \frac{\alpha\sigma_0}{E} \left( \frac{E}{\alpha\sigma_0^2 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_y(\pi, n) \end{aligned} \quad (8.1)$$

由变形后的情形及 $\delta_t$ 的定义，

$$r - u_x = u_y \quad (8.2)$$

将(8.1)式代入(8.2)式，并记 $\tilde{u}_x(\pi, n) = \tilde{u}_x(n)$ ；  
 $\tilde{u}_y(\pi, n) = \tilde{u}_y(n)$ 。

$$r = \frac{\alpha\sigma_0}{E} \left( \frac{E}{\alpha\sigma_0^2 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}} r^{\frac{1}{n+1}} \left[ \tilde{u}_x(n) + \tilde{u}_y(n) \right]$$

求得

$$r = \left( \frac{\alpha\sigma_0}{E} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left( \frac{E}{\alpha\sigma_0^2 I_n} \right) \left[ \tilde{u}_x(n) + \tilde{u}_y(n) \right]^{\frac{n+1}{n}} \quad (8.3)$$

将上述 $r$ 值代入(8.1)式的 $u_y$ 式中，其中

$$r^{\frac{1}{n+1}} = \left( \frac{\alpha\sigma_0}{E} \right)^{\frac{1}{n}} \left( \frac{E}{\alpha\sigma_0^2 I_n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left[ \tilde{u}_x(n) + \tilde{u}_y(n) \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{得} \quad \delta_t = 2u_y = d_n \frac{J}{\sigma_0} \quad (8.4)$$

上式中

$$\begin{aligned} d_n &= d_n \left( \frac{\alpha\sigma_0}{E}, n \right) = 2 \left( \frac{\alpha\sigma_0}{E} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{I_n} \tilde{u}_y(n) \\ &\quad \times \left[ \tilde{u}_x(n) + \tilde{u}_y(n) \right]^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (8.5)$$

(8.4)、(8.5)式适用于平面应力与平面应变两种情形，但其相应的 $d_n$ 值不同。对于平面应变及平面应力，按(8.5)式计算结果，表示于图8.2，8.3。

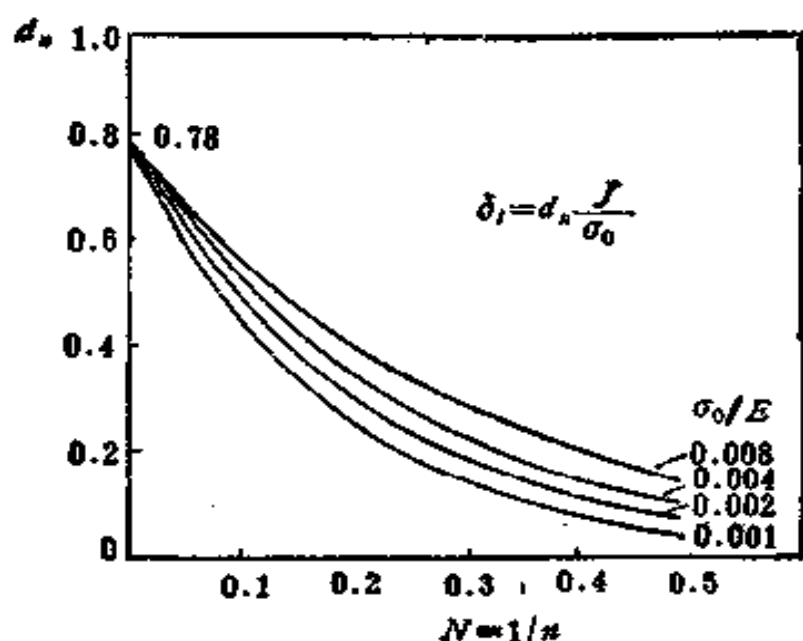


图 8.2  $d_n$  与  $N$ ,  $\sigma_0/E$  的关系 (平面应变)

图 8.2 对应于平面应变的情况, 当  $\alpha = 1$  时  $d_n$  与  $n$  和  $\sigma_0/E$  的关系曲线, 当  $\alpha \neq 1$  时, 有  $d_n(\alpha \neq 1) = \alpha^{1/n} d_n(\alpha = 1)$ 。由 Rice 与 Johnson<sup>[71]</sup> 的计算 (设  $\nu = 0.3$ ), 当小范围屈服时,

$$J = \frac{K^2(1-\nu^2)}{E} = 0.91 \frac{K^2}{E}$$

$$\delta_I = 0.717 \frac{K^2}{E\sigma_0} = 0.788 \frac{J}{\sigma_0}$$

与理想塑性情况下的  $d_n$  值相符。图中  $N = 0$  的值由  $n = 25, 50, 100$  外插而得。注意  $N = 1/n$ 。

图 8.3 是对应于平面应力情形, 当  $\alpha = 1$  时,  $d_n$  与  $n$  及  $\sigma_0/E$  的关系曲线, 当  $\alpha \neq 1$  时,  $d_n(\alpha \neq 1) = \alpha^{1/n} d_n(\alpha = 1)$ 。 $N = 0$  的  $d_n$  值是由计算结果外插得到, 与理想塑性情形下  $\delta_I = J/\sigma_0$  的 Dugdale 模型的结果一致。

## 2. 理想塑性



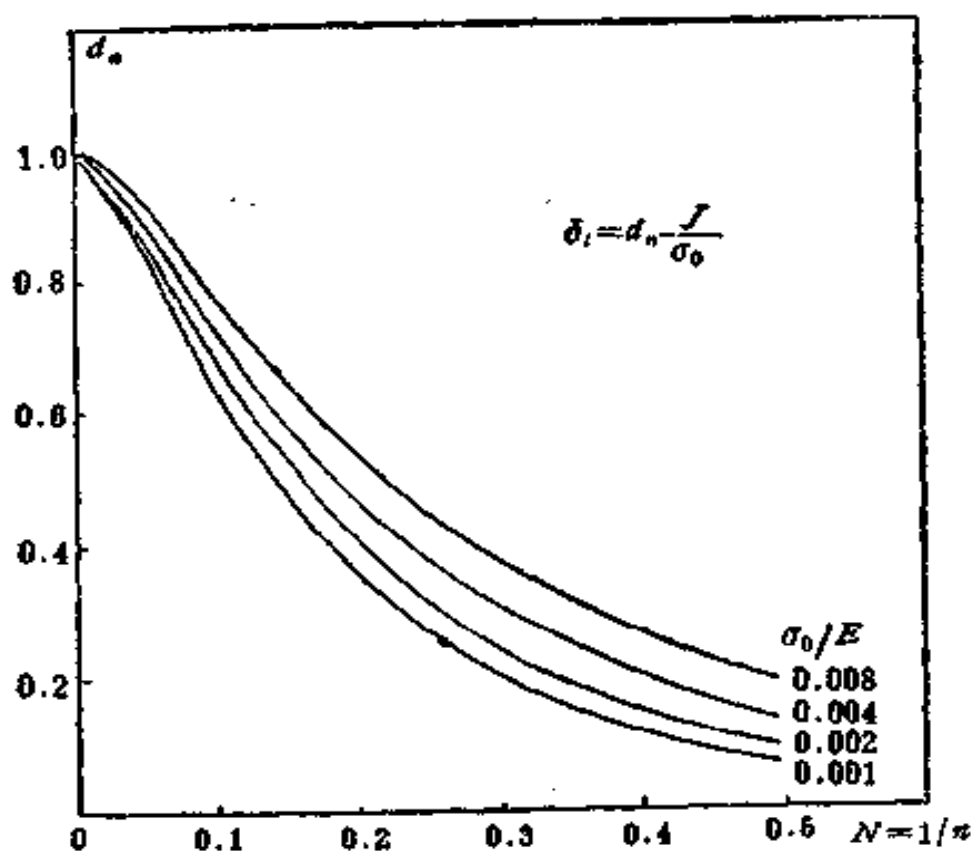


图 8.3  $d_n$  与  $N$ ,  $\sigma_0/E$  的关系 (平面应力)

介绍平面应变情形下，刚塑性解的结果。

(1) 双边切口的平板拉伸

如图 8.4 所示，极限载荷为 (6.8) 式

$$P = (2 + \pi)\tau_0 2c$$

由本章 (1.7) 式

$$J = - \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_\Delta$$

$$= - \int_0^\Delta \frac{\partial P}{\partial a} (\tilde{\Delta}, a) d\tilde{\Delta}$$

故

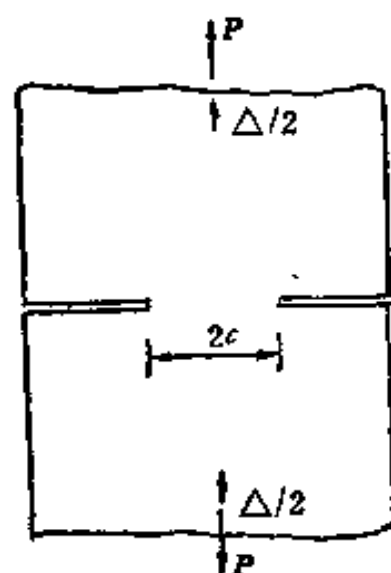


图 8.4

$$2J = - \int_0^{\Delta} \left( - \frac{\partial P}{\partial c} \right) d\tilde{\Delta} = 2(2+\pi)\tau_0\Delta$$

由 (6.8)' 式

$$\delta_i = 2\Delta = \frac{2J}{(2+\pi)\tau_0} = 0.67 \frac{J}{\sigma_0} \quad (8.6)$$

(2) 单边裂纹或中心裂纹板条拉伸, 如图8.5 (a)。

由本章图6.4及其解可知:  $P = 2\tau_0 c$

$$J = - \int_0^{\Delta} \left( - \frac{\partial P}{\partial c} \right) d\tilde{\Delta} = 2\tau_0\Delta$$

$$\delta_i = \Delta = \frac{J}{2\tau_0} = 0.87 \frac{J}{\sigma_0} \quad (8.7)$$

(3) 深裂纹弯曲试件, 如图8.5 (b) 所示。

用本章图6.6相应的应力变形场公式

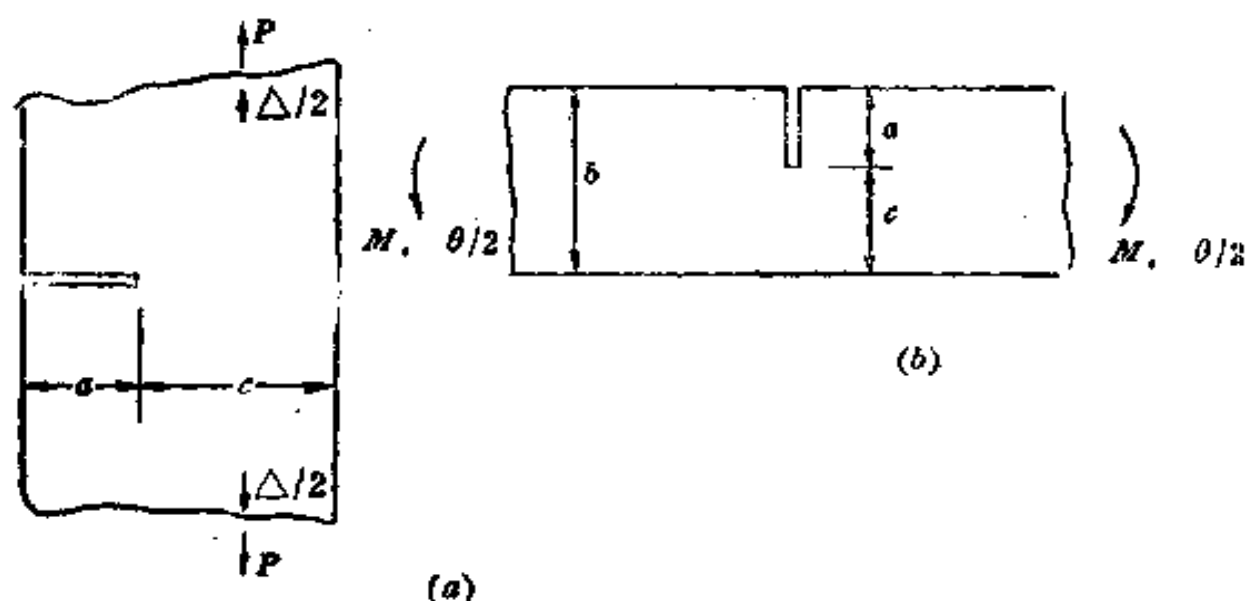


图 8.5

$$M = 1.261 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\tau_0 c^2 \approx 0.63\tau_0 c^2$$

$$J = - \int_0^\theta \left( - \frac{\partial M}{\partial c} \right) d\tilde{\theta} = \frac{2}{c} M\theta = 1.261\tau_0 c\theta$$

$$\delta_t = 0.37c\theta$$

$$\text{故} \quad \delta_t = 0.37 \frac{J}{1.261\tau_0} = 0.51 \frac{J}{\sigma_0} \quad (8.8)$$

对于平面应力情况，仿照上述的方法，读者不难用本章图6.10至图6.12相应的应力变形场公式自行推导。

3.  $\delta_t = d_n J / \sigma_0$  公式中  $d_n$  值的有限元计算结果

表8.1, 8.2给出了 Shih<sup>[78]</sup>关于平面应变和平面应力情形下的计算结果，Shih 文中取  $\nu = 0.3$ ,  $\sigma_0/E = 0.002$ 。大范围屈服条件下弯曲试件与中心裂纹试件  $d_n$  与  $J/\sigma_0 c$  的关系见图8.6 (a)(b)。

$J$  主导区的范围随不同类型试件，硬化指数  $n$  及屈服范围大小的变化趋势示意于图8.7。

表 8-1  $d_n$  值 (平面应变情形)

		$\sigma_0/E$	$n=3$	$n=5$	$n=10$	$n=\infty$
HRR 奇异性理论 (按 (8.5) 式)		0.002	0.17	0.31	0.50	0.78
有 小 范 围 屈 服	流动理论	0.002	0.18	0.29	0.48	0.63~0.66
	形变理论 (128)	0.002	0.20	0.32	0.52	0.70
	Tracey-Parks	0.001	—	0.30	0.47	0.65
	Sorensen <sup>[85]</sup>	0.001	—	0.27	0.47	0.66
	McMeeking <sup>[79]</sup>	0.003	—	0.27~0.30	0.43~0.44	0.65~0.67
服 大 范 围 屈 服	深裂纹弯曲试件 (全屈服)	0.002	0.19	—	0.49	0.58~0.65
	中心裂纹拉伸 (全屈服)	0.002	0.22	—	0.64	0.82~0.87

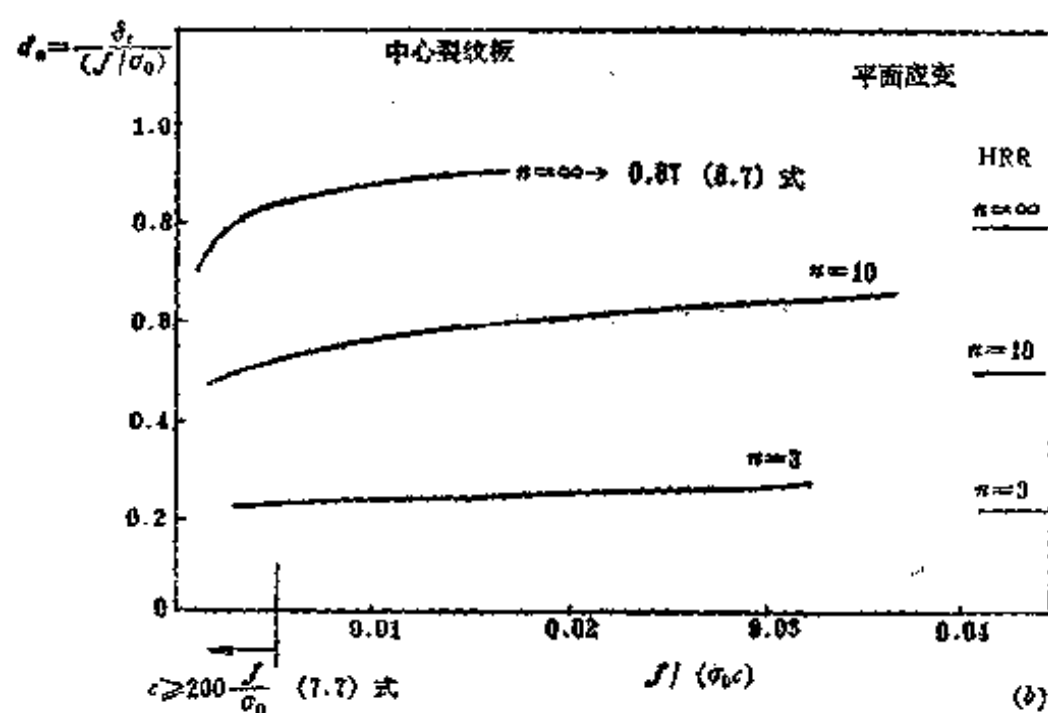
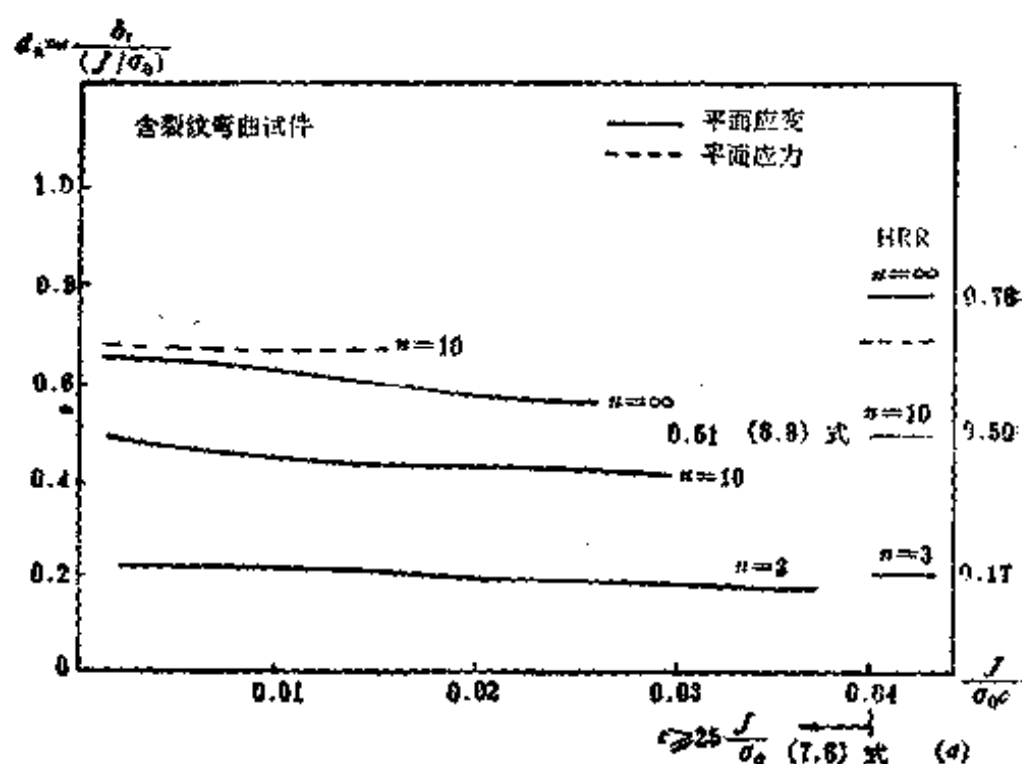


图 8.6 两类试件  $d_n$  与  $J/(\sigma_0 c)$  的关系图

表 8-2  $d_n$  值(平面应力情形)

	$\sigma_0/E$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 25$
HRR 奇异性理论	0.002	0.22	0.41	0.68	0.89
小范围屈服, 有限元	0.002	0.19	0.38	0.67	0.86
Hutchinson与Shih <sup>[86]</sup>					

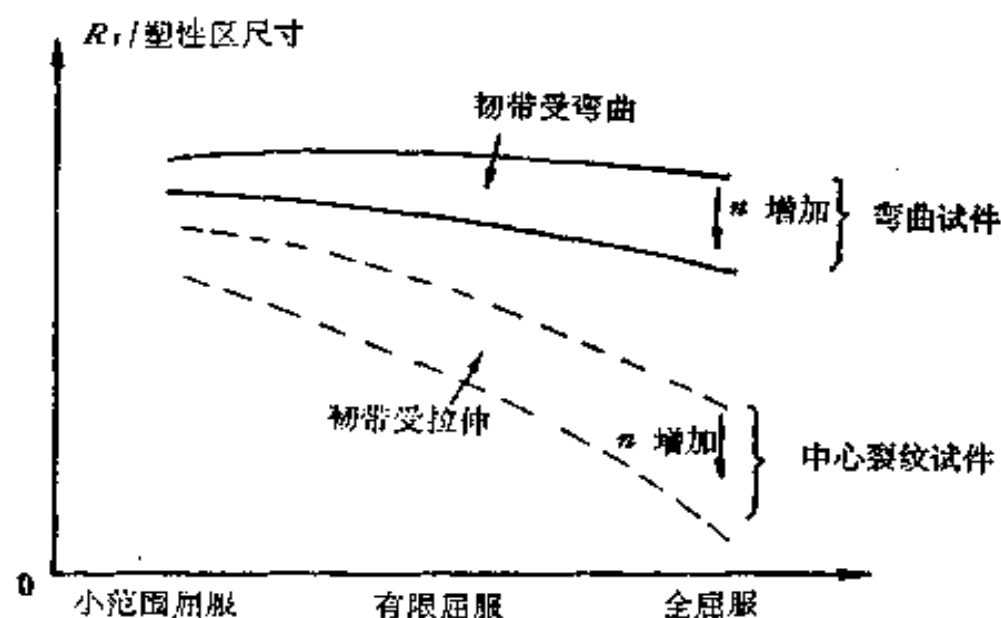


图 8.7 J 主导区尺寸随不同条件的变化示意图

## § 9 J 积 分 计 算

只要J主导区存在, J就是表征或控制断裂的参数, 利用 J 积分断裂准则讨论结构或材料的起裂

$$J = J_{1c}$$

在今后的有关章节中, 以及断裂韧度  $J_{1c}$  的测定中, 均需作 J 积分的计算。目前已发展了许多方便、有效的 J 积分计算方法。

1. 扩大小范围屈服公式的适用范围——调整裂纹长度

根据线弹性断裂力学, 记  $P$  为外载荷, 则有  $K = f(a)P$ ;  $J = K^2/E'$ 。将  $a$  改为有效裂纹半长度  $a_e$ 。

$$a_e = a + r_y \quad (9.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{故} \\ \text{式中} \end{array} \right\} \begin{array}{l} J = K_e^2/E' \\ K_e = f(a_e)P \end{array} \quad (9.2)$$

工程习惯上, 常以  $r_p$  表示塑性区尺寸, 其公式见第一章 (3.1) 至 (3.3) 式。

对于  $r_y$  的计算公式如下:

I 型、平面应变

$$r_y = \frac{1}{2} r_p = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \quad (9.3)$$

I 型、平面应力 (扩散型)

$$r_y = \frac{1}{2} r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \quad (9.4)$$

I 型、平面应力, 带状屈服区, 由 Dugdale 模型 (见本章 (2.16) 式)

$$r_y = \frac{1}{3} r_p = \frac{\pi}{24} \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \quad (9.5)$$

III 型、理想塑性材料, 由 (3.12) 式

$$r_y = \frac{1}{2} r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_{II}}{\tau_0} \right)^2$$

III 型, 幂硬化材料 (当  $n \rightarrow \infty$  时退化为理想塑性情形), 由 (3.40) 式

$$r_y = \frac{\beta}{1+\beta} r_p = \beta R_0 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{n-1}{n+1} \right) \left( \frac{K}{\tau_0} \right)^2 \quad (9.6)$$

$$\beta = \frac{n-1}{n+1}$$

Edmunds与Willis<sup>(87)(88)</sup>用匹配展开的摄动方法,求得:

I 型, Dugdale 模型的  $r_y$  同 (9.5) 式;

III 型, 幂硬化材料的  $r_y$  同 (9.6) 式;

I 型, 平面应变情形, 理想弹塑性材料

$$r_y = 0.019 \left( \frac{K}{\sigma_0} \right)^2 \quad (9.7)$$

该值仅为工程通用的 (9.3) 式的 1/3。但 (9.7) 式仅为按  $K$  展开的第一次修正, 高次修正则将与试件构形和载荷有关。

平面应力的公式尚未求得, 但一般认为平面应力与 III 型类似。

Edmunds 与 Wills 证明: 对于无限大平板的 Dugdale 模型, 若允许  $J$  的计算误差达 10%, 修正之后, 可将 (9.2) 式的适用范围从  $\sigma^\infty/\sigma_0 \approx 0.5$  提高到  $\sigma^\infty/\sigma_0 \approx 0.7$ 。

## 2. 深裂纹弯曲试件 $J$ 积分的简单公式

Rice, Paris 与 Merkle<sup>(89)</sup> 讨论了非线性弹性材料的深裂纹弯曲试件  $J$  积分的计算公式。如图 9.1 所示深裂纹弯曲试件, 由本章 (1.7)、(1.9) 式,  $M$  为加在试件单位厚度上的弯矩。

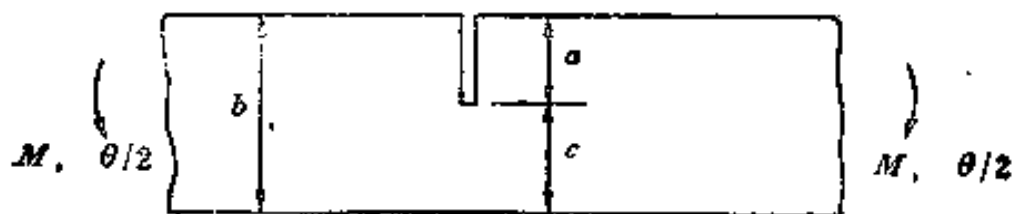


图 9.1 深裂纹弯曲试件

$$J = - \int_0^\theta \frac{\partial M}{\partial a} (\tilde{\theta}, a) d\tilde{\theta}$$

$$= \int_0^M \frac{\partial \theta}{\partial a} (\tilde{M}, a) d\tilde{M} \quad (9.8)$$

将  $\theta$  分为两部分

$$\theta = \theta_{nc} + \theta_c \quad (9.9)$$

$\theta_{nc}$  表示  $a = 0$  的无裂纹试件的加载点的相对转角, 此时, 材料可能已进入塑性阶段。 $\theta_c$  为裂纹对转角的贡献。(9.9) 式可看作是  $\theta_c$  的定义式。

设讨论的是深裂纹试件:  $a \gg c$ ,  $b \gg c$ , 则可认为试件的唯一尺度为  $c$ , 由量纲分析

$$\theta_c = f\left(-\frac{M}{\sigma_0 c^2}\right) \quad (9.10)$$

当然, 函数  $f$  中还应出现材料参数, 例如  $\sigma_0/E$ ,  $n$  (对幂硬化材料) 等。如果不是深裂纹的话, 则函数  $f$  中还应出现  $c/b$  (或  $c/a$ ), 则

$$\theta_c = f\left(-\frac{M}{\sigma_0 c^2}, c/b\right) \quad (9.11)$$

但现在, 讨论深裂纹  $c/b \rightarrow 0$ , 故  $c/b$  参数不出现。对于线弹性材料, 由第一章 (4.21 式)

$$\theta_c = \frac{16}{E' c^2} M, \text{ 当 } \frac{c}{b} \rightarrow 0 \quad (9.12)$$

回到一般的弹塑性情形, 利用 (9.8) 式, 计算  $J$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \theta}{\partial a}\right)_M &= \frac{\partial \theta_{nc}}{\partial a} + \frac{\partial \theta_c}{\partial a} = -\left(\frac{\partial \theta_c}{\partial c}\right)_M \\ &= -f'\left(-\frac{M}{\sigma_0 c^2}\right) \left(-\frac{2M}{\sigma_0 c^3}\right) \end{aligned} \quad (9.13)$$

因为  $\theta_c$  通过  $M$  与  $c$  的组合  $\frac{M}{\sigma_0 c^2}$  而依赖于  $M$  与  $c$ , 故



$$\left(\frac{\partial \theta_c}{\partial M}\right)_a = f'\left(\frac{M}{\sigma_0 c^2}\right) \frac{1}{\sigma_0 c^2} \quad (9.14)$$

(9.13) 或 (9.14) 表示  $\theta_c$  的两个偏导数之间存在着关系:

$$\left(\frac{\partial \theta_c}{\partial a}\right)_M = \left(\frac{\partial \theta_c}{\partial M}\right)_a \sigma_0 c^2 \frac{2M}{\sigma_0 c^3} = \left(\frac{\partial \theta_c}{\partial M}\right)_a \frac{2M}{c} \quad (9.15)$$

于是由 (9.8) 式

$$J = \int_0^M \left(\frac{\partial \theta_c}{\partial M}\right)_a \frac{2M}{c} dM = \frac{2}{c} \int_0^{\theta_c} M d\theta_c \quad (9.16)$$

上式右端即是  $M-\theta_c$  图中面积乘以  $2/c$ , 见图 9.2。所以,

(9.16) 式可用于试验测定  $J$  值, 如果已知  $M(\theta_c)$  的关系, 可以用来计算  $J$  值。

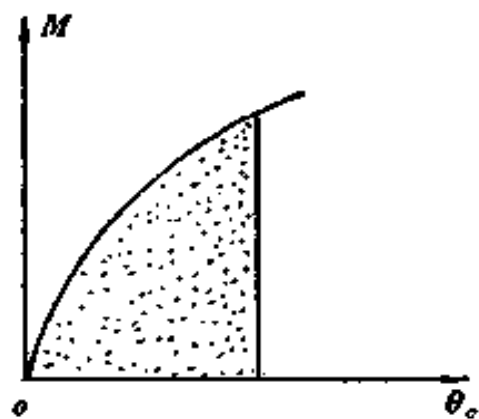


图 9.2  $M-\theta_c$  图

对于紧凑拉伸试件或承受跨度中点作用集中力 (单位厚度上)  $P$  的三点弯曲试件, 若含裂纹试件在施力点处广义位移为  $\Delta_c$ , 仿上述纯弯含裂纹试件的推导方法, 可得下列近似公式:

$$J = \frac{2}{c} \int_0^{\Delta_c} P d\Delta_c \quad (9.16)$$

若裂纹不够深, 对受纯弯试件, 则应该用 (9.11) 式, 此时得到

$$J = \frac{2}{c} \int_0^{\theta_c} M d\theta_c - \frac{1}{b} \int_0^M \frac{\partial f}{\partial \left(-\frac{c}{b}\right)} dM \quad (9.17)$$

右端第二项为对 (9.16) 式的修正。通常计算的经验表明,

大体上当  $\frac{c}{b} \leq \frac{1}{2}$  时, 可以应用 (9.16) 式作计算。

对图 9.3 所示的中心长裂纹拉伸试件的 J 积分计算公式

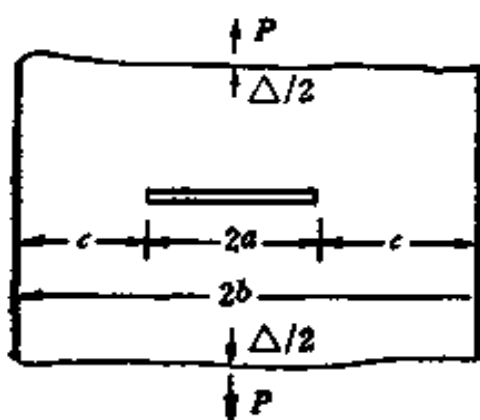


图 9.3 长裂纹拉伸试件

概述如下:

设  $\Delta = \Delta_{nc} + \Delta_c$

其中  $\Delta_{nc}$  为无裂纹板的位移,  $\Delta_c$  是由于有裂纹所引起的增大的位移。

由于  $c$  是唯一尺度, 故

$$\Delta_c = c f\left(\frac{P}{c}\right) \text{ 则仿}$$

(9.16) 式的推导方法得

$$J = \frac{1}{c} \left[ \int_0^{\Delta_c} P d\Delta_c - \frac{1}{2} P \Delta_c \right] \quad (9.18)$$

现转向讨论另一种位移的分解方法, 即将位移分为弹性与塑性分量  $\Delta_e$  和  $\Delta_p$ 。

$$\Delta = \Delta_e + \Delta_p \quad (9.19)$$

也可以得到 J 积分的有关计算公式, 若  $P$  为作用于试件单位厚度上的载荷。对于  $c/b \ll 1$ , 图 9.3 所示深裂纹试件, 由量纲分析

$$\Delta_p = c f(P/c)$$

记  $J_e$  为载荷  $P$  时弹性试件的 J 值, 则因  $J_e = \int_0^P \left( \frac{\partial \Delta_e}{\partial a} \right)_P dP$

$$J = \int_0^P \left( \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_P dP = J_e + \int_0^P \left( \frac{\partial \Delta_p}{\partial a} \right)_P dP \quad (9.20)$$

其中仿 (9.18) 式

$$J = J_e + \frac{1}{c} \left\{ \int_0^{\Delta_p} P d(\Delta_p) - \frac{1}{2} P \Delta_p \right\}$$

有时, 为方便, 记  $J_p = \int_0^P \left( \frac{\partial \Delta_p}{\partial a} \right)_P dP$ , 则 (9.20) 式成为

$$J = J_e + J_p \quad (9.20)'$$

对于 (9.16) 与 (9.16)' 式, 由于  $\Delta_c = \Delta - \Delta_{nc}$

$$J = \frac{2}{c} \int_0^P P d(\Delta - \Delta_{nc})$$

如图 9.4 所示, 实验测量得到的是  $P-\Delta$  曲线, 若将  $P(\Delta)$  曲线下所包围的面积记为形变功  $U$ , 则 (9.16)' 式相当于

$$J = \frac{2}{c} (U - U_0) \quad (9.21)$$

(9.21) 式第二项  $U_0$  相当于无裂纹试件  $P-\Delta_{nc}$  曲线下的面积所对应的形变功。

Begley 与 Landes<sup>[90]</sup> 使用了另一种由试验曲线计算  $J$  积分的公式

$$J = \frac{2U}{c} \quad (9.22)$$

陈簏<sup>[91]</sup>利用三点弯曲试件滑移场<sup>[92]</sup>的近似分析, 也提出了利用 (9.22) 式标定  $J$  积分。

Keller 与 Munz<sup>[93]</sup> 及文<sup>[94], [95]</sup>均讨论与比较了 (9.21)、(9.22) 式的适用范围, 注意到当试件裂纹较深 (即韧带宽度相对较小), 塑性变形占全变形一定的比例时, 两式

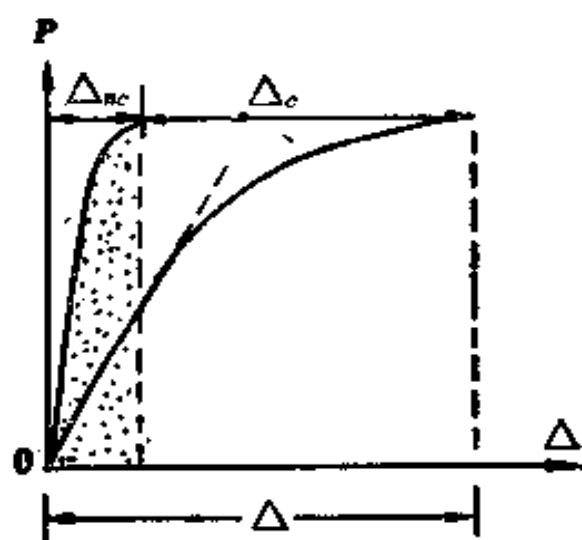


图 9.4  $P-\Delta$  曲线

的差别已在工程误差的范围之内。为简便计算，常常采用 (9.22) 式作 J 积分标定计算。该式也为我国与美国的 J 积分测试标准所接受，这一点在下节中还要介绍。这里要指出的是，这一式子是对试件几何形状作了限制（深裂纹，长跨距）之后作为工程标定的方法提出的。

对于紧凑拉伸试件，以受弯为主，可以近似地利用 (9.16)' 式。Merkle 与 Corten<sup>[96]</sup> 考虑了紧凑拉伸试件轴向拉伸的影响，所得的计算式国外常常采用。以后，Hutchinson 与 Paris 等<sup>[97]</sup> 又有所发展。

### 3. 全塑性解与大范围屈服情况的 J 积分估算公式

Shih<sup>[98]</sup> 讨论小应变全塑性问题，略去弹性应变，材料的拉伸性能用下式描述

$$e/e_0 = \alpha (\sigma/\sigma_0)^n \quad (9.23)$$

即略去弹性变形，故设  $\nu = 1/2$ 。用  $J_2$  形变理论，等效应力  $\sigma_e^2 = (3/2)s_{ij}s_{ij}$

$$e_{ij}/e_0 = \frac{3}{2} \alpha (\sigma_e/\sigma_0)^{n-1} s_{ij}/\sigma_0 \quad (9.24)$$

如同 Ильюшин<sup>[99]</sup> 多年前所曾指出的：对含有单个载荷或位移参数的边值问题的解，当该单参数单调增加时，有下列重要的性质。若  $P$  为载荷参数，则应力与  $P$  成比例增加，应变随  $P^n$  而增加。因为每点是比例加载的，则基于 (9.23) 的解也是对应于流动理论的该问题的精确解。并且将  $e_{ij}$  换为应变率，则其解也可作为稳态蠕变率的解。对于许多试件与结构，可按此作一劳永逸的计算。

由于讨论纯幂硬化的材料，此时  $J$  与  $P^{n+1}$  成比例。为简单计，讨论如图 9.1 所示的受弯曲板条的平面应变或平面应力的情形。 $\theta_{cr}$  的定义同前，设  $L$  足够长（例如  $L \geq 4b$ ），

则  $\theta_c$  与  $L$  近似地无关。可写出

$$J = \alpha \sigma_0 \varepsilon_0 c h_1(a/b, n) (M/M_0)^{n+1} \quad (9.25)$$

$$\theta_c = \alpha \varepsilon_0 h_2(a/b, n) (M/M_0)^n \quad (9.26)$$

$M_0$  是单位厚度的参考弯矩,  $c = b - a$  为剩余韧带宽度, 最方便的办法是选  $M_0$  为理想塑性 ( $n \rightarrow \infty$ ) 时的极限弯矩。设  $\sigma$  并不太小时,

$$M_0 = A \sigma_0 c^2 \quad (9.27)$$

对平面应变,  $A = 1.261/2\sqrt{3} = 0.364$ , 对平面应力  $A$  为 0.268。对于给定的  $a/b$  和  $n$  值,  $h_1, h_2$  可以用有限元法计算得到。Hutchinson 等人<sup>[100]</sup> 给出了板条弯曲问题 (当  $a/b = 1/2$  时) 的结果, 列于表 9.1。

表 9-1

$a/b = 1/2$		$n$	1	2	3	5	7	10
平面应变	$h_1$		1.49	1.33	1.21	1.04	0.906	0.742
	$h_2$		2.68	2.51	2.26	1.82	1.51	1.20
平面应力	$h_1$		1.10	0.97	0.85	0.72	0.65	0.55
	$h_2$		2.75	2.36	2.03	1.59	1.37	1.12

现在可以用弹性解和上述的全塑性解从小范围屈服到大范围屈服作内插, 设金属材料的拉伸性能服从 Ramberg-Osgood 关系

$$\varepsilon/\varepsilon_0 = \sigma/\sigma_0 + \alpha(\sigma/\sigma_0)^n \quad (9.28)$$

$\sigma_0 = E\varepsilon_0$ , 考察受弯曲的边裂纹板条, 在小范围屈服时,  $J$  及  $\theta_c$  由弹性解给出,  $K = f_1(a)M$ , 则有以下式

$$J = K^2/E' = f_1^2(a)M^2/E'$$

$$\theta_c = f_2(a)M \quad (9.29)$$

$f_1, f_2$  是已知的函数, 例如可由 Tada 等人<sup>[9]</sup> 的手册中查

到。对于大范围屈服的情形，当 $M$ 增加时， $J$ 和 $\theta_c$ 可按全塑性解（9.25）、（9.26）式计算之。Shih 和 Hutchinson 建议了用线弹性解与全塑性解相加的内插方法<sup>[98]</sup>

$$J = f_1^2(a_s)M^2/E' + \alpha\sigma_0\varepsilon_0ch_1\left(\frac{a}{b}, n\right)\left(\frac{M}{M_0}\right)^{n+1} \quad (9.30)$$

$$\theta_c = f_2(a_s)M + \alpha\varepsilon_0h_2\left(\frac{a}{b}, n\right)\left(\frac{M}{M_0}\right)^n \quad (9.31)$$

当 $M$ 值小时，以第一项为主；当 $M$ 值大时，以第二项塑性解为主。对于第一项即线弹性项，需进行塑性修正。取等效裂纹长度

$$a_e = a + r_y\varphi \quad (9.32)$$

将本章 § 3 中Ⅲ型幂硬化材料计算 $r_y$ 的公式： $r_y = \beta K_0$ （见（3.38）式）推广到考虑材料硬化的Ⅰ型情形。对于平面应力

$$r_y = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)(K/\sigma_0)^2 & M \leq M_0 \\ (r_y)_{M-M_0} & M > M_0 \end{cases} \quad (9.33)$$

对于平面应变，上式第一式改为

$$r_y = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)(K/\sigma_0)^2 \quad M \leq M_0 \quad (9.34)$$

Shih 与 Hutchinson 取  $\varphi = 1$ ，Kumar, German 与 Shih 等<sup>[101]</sup>取

$$\varphi = \frac{1}{1 + (M/M_0)^2} \quad (9.35)$$

如为拉伸，则 $M/M_0$ 改为 $P/P_0$ 。在（9.33）、（9.34）式中， $K$ 值可由 $K = f_1(a)M$ 的弹性解公式给出。很明显，对（9.30）、（9.31）式中的弹性部分作塑性修正是必要的。因为，如果不作修正，则对于 $n \rightarrow \infty$ 的理想弹塑性极限情形时， $J$ 将只

由  $M \leq M_0$  的第一项纯弹性的结果计算得到，误差太大。

将 (9.30)、(9.31) 式与由考虑弹性与塑性变形分量的有限元计算结果作比较，见图 9.5。该图对应于  $a/b = 1/2$ ， $\alpha = 3/7$  的情况。 $h_1$  和  $h_2$  的值由表 9.1 中查出，实线是按 (9.30)、(9.31) 式的计算值，虚线是有限元的计算结果。

$n = 1$  的线弹性结果，是在 (9.30)、(9.31) 式中，取  $a_s = a$ ， $\alpha = 0$  得到的。 $n \rightarrow \infty$  的理想弹塑性的结果取自 Bucci[149] 的极限分析的计算结果。对于受拉伸的含中心裂纹的板条，也得到如同图 9.5 一样良好的结果。

Kumar, German 与 Shih[101] 根据上述弹性解与全塑性解叠加的基本思想，在大量计算工作的基础上，编制了弹塑性断裂分析的手册，提出了弹塑性断裂力学分析的工程方法。该手册的全塑性解一览表包括了试验所用的试件的几何构形与许多常用的构件构形。试件构形有中心裂纹平板、双边裂纹板、单边裂纹板(受拉伸和受弯曲的)以及紧凑拉伸试件等。对于平面应力与平面应变两种情况，均用图表表示了这些解。常用结构的构形包括含轴向和周向裂纹的圆筒以及接管角裂纹的二维模型。表面裂纹和深埋裂纹的图表正在编制之中。

可将 (9.30)、(9.31) 的方法推广到上述的各种试件与结构构形的一般情形。Marston[150] 介绍了推广的由 Shih 提出的弹塑性断裂力学分析的一般工程方法：

$$\left. \begin{aligned} J^{e,p} &= a_1 J^e + a_2 J^p \\ \delta_i^{e,p} &= \beta_1 \delta_i^e + \beta_2 \delta_i^p \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

$J^{e,p}$ 、 $\delta_i^{e,p}$  为弹-塑性工程分析方法所估算的 J 积分与裂纹张开位移； $J^e$ 、 $\delta_i^e$ ； $J^p$ 、 $\delta_i^p$  为相应于 (9.30)、(9.31) 式第一、二项的各量。将这些项作内插得到弹塑性解  $J^{e,p}$ 、 $\delta_i^{e,p}$ 。

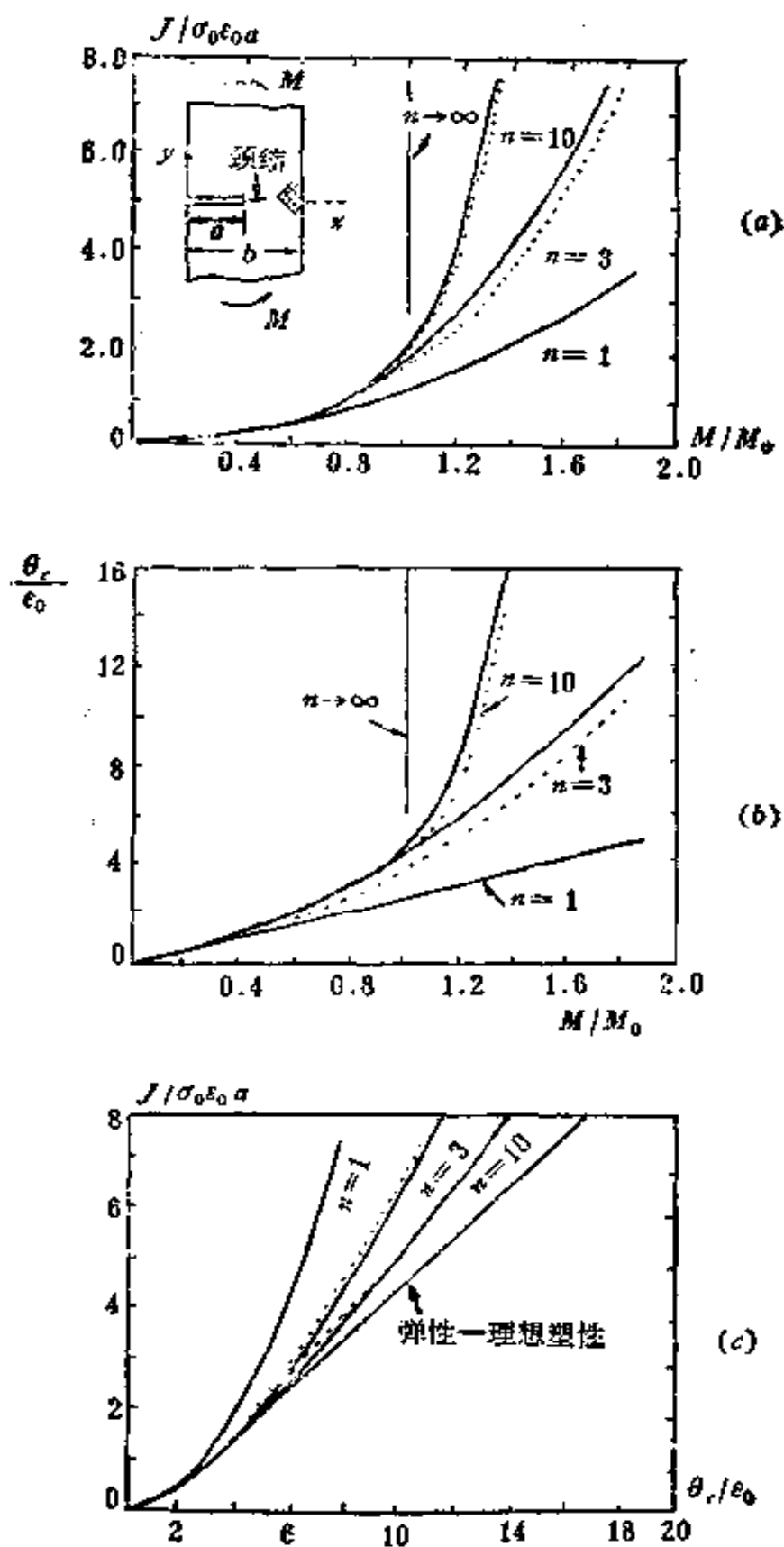


图 9.5 弹塑性工程估算方法的计算例



当将经过塑性修正的弹性解与第二项全塑性解作简单叠加，作为一种估算方法时，则  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i=1, 2$ ) 均取为“1”。

用上述方法曾成功地处理了试件。容器、管道和核反应堆的弹塑性断裂分析。它使得工程师在进行结构的完整性分析时，并不需要都依赖计算机对每个结构作大型的数值计算，使得弹塑性断裂力学的工程应用取得了进展。

## § 10 J 积分测定方法

J 积分的试验测定，其基本原理乃是根据本章 (1.7) 和 (1.9) 式，重新将它们写出于下：

$$J = - \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \right]_{\Delta} = - \int_0^{\Delta} \frac{\partial P}{\partial a} (\tilde{\Delta}, a) d\tilde{\Delta} \quad (10.1)$$

$$J = - \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial a} \right]_P = \int_0^P \frac{\partial \Delta}{\partial a} (\tilde{P}, a) d\tilde{P} \quad (10.2)$$

当从实验中测得外加载荷  $P$  与施力点位移  $\Delta$  的关系曲线的信息后便可由上式计算 J 积分值。

由于中、低强材料或高韧性材料的应用，测定它们的断裂韧度值时，如果要求得到有效的  $K_{Ic}$  值，将需要采用巨型试件，例如某材料的屈服强度  $\sigma_0 = 70 \text{ kgf/mm}^2$ ， $K_{Ic} = 600 \text{ kgf/mm}^{3/2}$  时，用三点弯曲试件，按  $K_{Ic}$  测试标准的尺寸要求，其尺寸将大于  $180 \times 360 \times 1500 \text{ mm}^3$ ，甚至 200 吨的试验机尚不足以完成断裂试验。不但工作量巨大，耗资费时，有时甚至无法取样。而新工艺与新材料研究，辐照效应影响的研究等也都不能选用大试件，因此必须用小试件来测定材料的断裂韧度，但用小试件进行断裂试验，裂纹尖端附近将

处于大范围屈服甚至全面屈服的状态。这时,  $J$  积分由于可以应用于大范围屈服与全面屈服, 便可以用它来测定材料的断裂韧度。

$J$  积分的形变功率定义的式子 (10.2) 表明: 在 I 型加载条件下对两个几何形状与尺寸完全相同, 仅裂纹长度略有差异的同种材料试样进行试验, 当加载到相同的施力点位移量  $\Delta$  时, 外载对单位厚度试样作的功对裂纹长度的变化率, 在数值上即等于  $J$  积分。这就是  $J$  积分试验测定的依据。

Pegley 和 Landes<sup>[43]</sup> 根据实验, 最早提出了  $J$  积分断裂准则, 认为当

$$J \geq J_{Ic} \quad (10.3)$$

时, 裂纹体将发生失稳断裂, 并认为  $J_{Ic}$  是材料的特性参数, 可以用来度量材料在平面应变 I 型加载条件下的断裂韧性, 称为起 (启) 裂韧度。

$J$  积分定义本身要求必需是单调加载的, 而裂纹一旦出现了检测手段可以觉察到的真实扩展, 则在新增加的裂纹尖端附近便必然存在卸载区, 而卸载区的存在便破坏了  $J$  积分赖以成立的单调加载的条件。此外, 对于大多数延性断裂的结构材料, 裂纹在起裂后并不立即或随即失稳断裂, 而发生一定数量的稳定裂纹扩展。在裂纹扩展期间, 材料的承载能力还能有不同程度的增加, 即裂纹的扩展表现出一定的阻力特性。但试验表明, 只要扩展量不太大, 即对扩展量加以一定的限制 (这些限制在下章将着重加以讨论) 之后, 仍然可以借用  $J$  积分作为材料的断裂韧性参数。

因此  $J$  积分的测试方法大体上有二种做法: (1) 测定  $J$  积分的起裂值  $J_{Ic}$ ; (2) 测定能反映在一定裂纹扩展量下的条件  $J$  积分值。

前一种测试的起裂韧度  $J_{Ic}$  是一个很重要的断裂韧性参数值。但它的测定很困难，它需要利用各种检测起裂的手段，而用物理监测的方法测定起裂又常常和仪器的灵敏度有关，而且  $J_{Ic}$  值本身也未能反映许多实际的延性材料抵抗裂纹继续扩展的阻力特性。

第二种测定条件  $J$  积分值的方法，需要探明材料在不同的稳定裂纹扩展量  $\Delta a$  与材料阻止裂纹扩展能力的  $J$  积分值（记作  $J_R$ ）之间的关系，而且认为  $J_R$  与  $\Delta a$  的关系是材料的特性曲线，而与其它因素无关。因此只要测得  $J_R \sim \Delta a$  关系的阻力曲线，即易于确定一定  $\Delta a$  的相应的  $J$  积分条件值。在一定条件下，用它来表征材料韧性的好坏，称为断裂韧度的  $J$  积分值。

$J$  积分的测试方法近年来获得较快的发展。美国材料试验学会（ASTM）1981年发表了测量  $J_{Ic}$  断裂韧性的试验标准 ASTM E813-81〔102〕。我国在1980年颁布了《利用  $J_R$  阻力曲线确定金属材料延性断裂韧度的试验方法》的国家标准，编号GB2038-80〔103〕<sup>1)</sup>，它是根据我国  $J$  积分的理论和试验研究成果，在对于23种材料的100多组近千根试件的大量试验基础上制订的。

延性断裂韧度  $J$  积分值的测定是对一组试样进行的，一般不少于五个，它们具有相同的冶金状态、取样部位和裂纹取向，试样形状规定为直三点弯曲试件，试样经加工切口后预制疲劳裂纹，试件简图见图10.1。疲劳裂纹使  $a/W$  达到0.4~0.6。然后在  $S/W = 4$  情形下，进行缓慢加载断裂试验，记录载荷-施力点位移  $P-\Delta$  曲线。用控制不同的施力点位移量或载荷量的方法，使各试件产生不同的稳定裂纹扩展量而停机

1) 与 § 9 不同，本节所用符号，均按GB2038-80。〔103〕

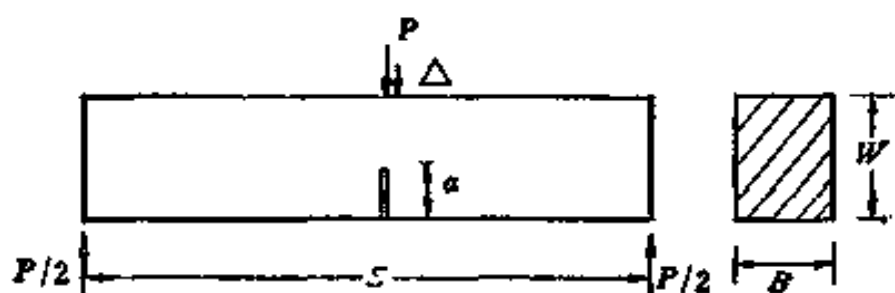


图 10.1 三点弯曲试件

卸载。再用氧化着色或二次疲劳技术使裂纹前缘留下痕迹，然后压断试件，测量停机卸载时相应的裂纹长度  $a$  和稳定裂纹扩展量  $\Delta a$  后，计算相应的  $J_R$  阻力值，在进行试验的有效性判断后作线性回归，在  $J_R \sim \Delta a$  图上得到  $J_R$  阻力曲线，然后由该图可确定断裂韧性  $J$  积分值。

关于试样制备、疲劳预制裂纹、试验装置、断裂试验的进行、 $a$  和  $\Delta a$  的测量……等可参阅 GB2038-80 的具体规定<sup>[103]</sup>。在  $P-\Delta$  图上计算  $J_R$  的步骤如下：在  $P-\Delta$  图上（见图 10.2），过停机点（相应于  $T$  点），引与曲线初始线性段平行的直线  $TB$ ，将  $P-\Delta$  曲线下方的面积分为两部分如图 10.2 所示。 $U_e$  为形变功中的弹性部分； $U_p$  为形变功中的塑性部分，则沿用上节 (9.20)' 式

$$J_R = J_e + J_p \quad (10.4)$$

由线弹性断裂力学知  $J_e = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2$ ，故按三点弯曲试件  $K_I$  计算式<sup>[21]</sup>，由第一章 (1.20) 式，令  $Y(a/W) = (s/W) \cdot f_2(a/W)$ ，并记  $P_T$  为停机点载荷。

$$J_e = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{P_T}{BW^{1/2}} Y\left(\frac{a}{W}\right) \right]^2 \quad (10.5)$$

由上节 (9.22) 式，按图 10.2 将形变功  $U$  分解为  $U = U_e + U_p$ ，则：

$$J_p = 2U_p / B(W - a) \quad (10.6)$$

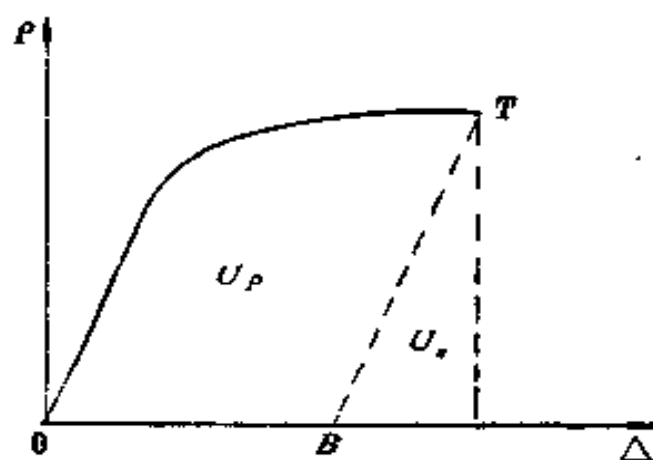


图 10.2  $U = U_e + U_p$  的分解

标准中规定  $J_R$  也可按下式 (即 (9.22)) 计算

$$J_R = \frac{2U}{B(W - a)} \quad (10.7)$$

式中  $U = U_0 - U_s$ ,  $U_0$  是加载到  $P_T$  时所记录的  $P-\Delta$  曲线下所包围的面积,  $U_s$  是加载到  $P_T$  时试验系统所吸收的能量, 如图 10.3 所示。为了求  $U_s$  可用一已压断的半截试件放在试验

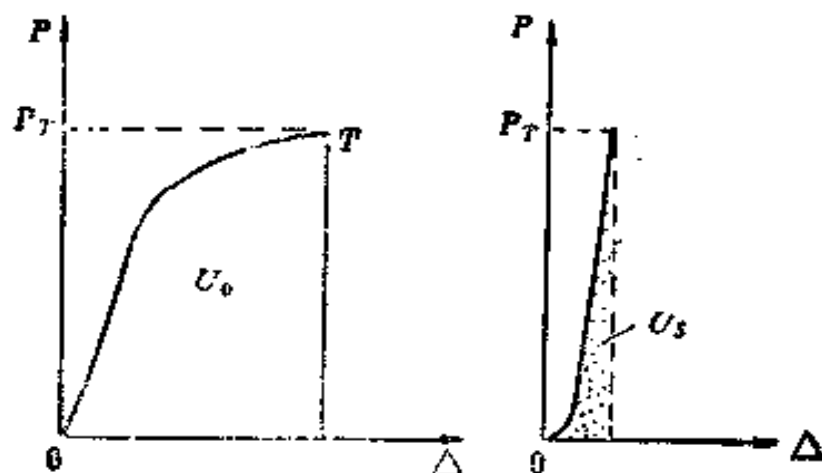


图 10.3  $U = U_0 - U_s$  示意图

加载装置上，以尽可能小的加载跨距加载到超过该组试验的最大停机载荷并记录相应的  $P-\Delta$  曲线。每一试样的停机载荷  $P_T$  值在此曲线下相应的面积所代表的形变功，即为该试件的  $U_i$  值。式 (10.5) 中的  $Y(a/W)$  可查表 [21] 得到。

对一组试样的每个试件计算出其  $J_R$  阻力值后，即可以得到一组  $J_R-\Delta a$  的试验点，如图 10.4。由原点作一条斜率为  $1.5(\sigma_0 + \sigma_b)$  的直线  $OT$ ，称为钝化线 ( $\sigma_b$  为材料的强度极限)。目的是要扣除裂纹尖端由于塑性大变形相应的钝化而

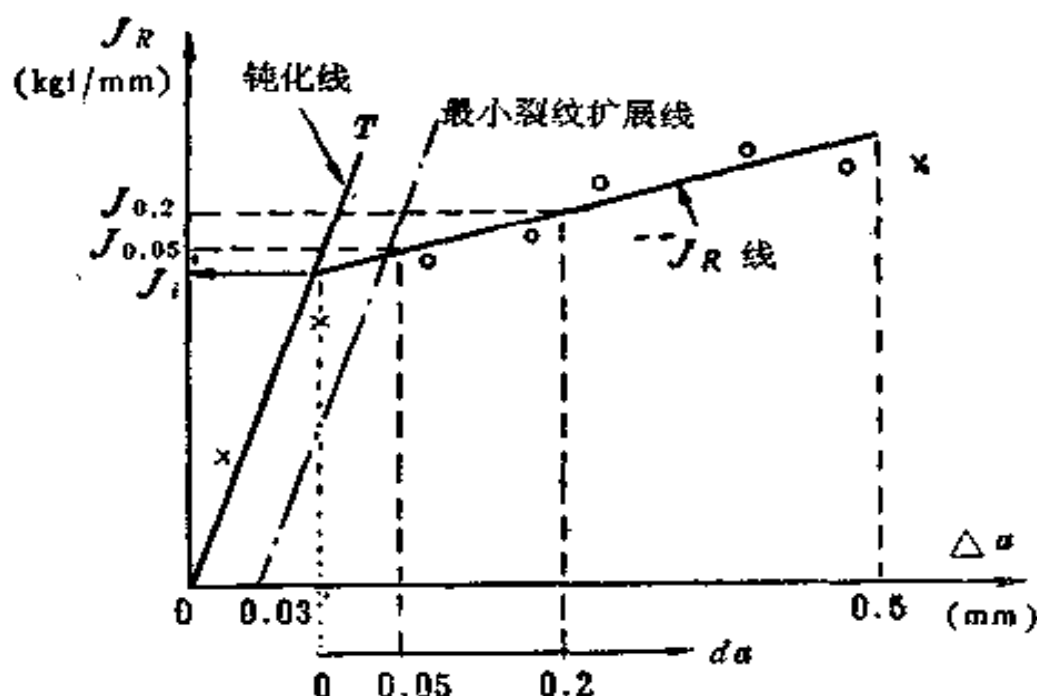


图 10.4  $J_R$  阻力曲线

形成的延伸区 (即裂纹未起裂，而引起的由原裂纹尖端起算的裂纹长度的增量)。在 ASTM 的 J 积分测试标准中 [102]，钝化线斜率取为  $(\sigma_0 + \sigma_b)$ 。再过  $\Delta a = 0.03 \text{ mm}^1$  的点作钝化线的平行线，称为最小裂纹扩展线。当试验点满足如下三个要求时，即为有效试验点 (在图 10.4 中标记为“o”)：

$$(i) \text{ 钢材试样的 } J_R \leq \frac{W-a}{25} \sigma_0 \text{ (参看本章 (7.6))}$$

1) 文 [102] 取  $0.15 \text{ mm}$

式,  $c = W - a$ );

(ii) 最大的裂纹扩展量  $\Delta a \geq 0.50\text{mm}^1$ ;

(iii) 位于最小裂纹扩展线以右。

否则, 试验点应视为无效(如图中“×”标记点)。通过判断后的一组试样中, 有效试验点不少于五个, 然后作线性回归处理, 按  $J_R = \alpha + \beta \Delta a$  回归方程绘出  $J_R$  曲线如图所示, 其中  $\alpha$ 、 $\beta$  为回归系数。

得到图10.4所示的  $J_R$  阻力曲线后, 能提供较为完善的断裂特征: 不仅可以得到外推的表观起裂值  $J_i$ , 还可确定必要的与一定的稳定裂纹扩展量  $\Delta a$  相应的条件  $J$  积分值如  $J_{0.05}$ ,  $J_{0.2}$  等等。当然, 在作  $J$  积分试验时, 若裂纹起裂后即发生失稳断裂, 即测得  $J_{Ic}$  起裂韧度, 它可直接由失稳载荷点计算得到, 而勿需用  $J_R$  阻力曲线。但大多数的延性材料, 并不具有这种特性。

因此, 基于  $J_R$  阻力曲线的  $J$  积分测试方法, 可以确定多种  $J$  积分的特征值, 以适应材料试验和应用的不同需要。同时测得的  $J_i$  值数据也比较稳定。当然, 在实际应用时应明确标出  $J_i$ ,  $J_{0.05}$ ,  $J_{Ic}$ ,  $J_{0.2}$ , 它们通常可统称为“延性断裂韧度  $J$  积分值”或“断裂韧度  $J$  积分值”。

在测量材料的起裂  $J$  积分值  $J_{Ic}$  时, 需应用各种物理监测手段确定起裂点, 得到相应的起裂载荷  $P_c$ , 并计算相应于  $P_c$  的形变功  $U_c$ , 由  $J_{Ic} = 2U_c / B(W - a)$  计算起裂  $J$  积分值, 这只要单个试件就可测得。但由于不同的监测起裂点的方法灵敏度不同, 在多数情况下难于准确地确定发生起裂的点。这些监测方法可以列举如: (1) 直流电位法, (2) 交流电位法, (3) 声发射法, (4) 电阻法等。

1) 文[102]取  $\Delta a \geq 1.5\text{mm}$

当然，用  $J_R$  阻力曲线也可外推确定表观起裂韧度  $J_i$ ，但这是用多个试样，经过外推法确定的。

在  $J_R$  阻力曲线的测定方法中还需注意到以下几点：在美国 ASTM 的  $J_{Ic}$  标准<sup>[102]</sup> 中只承认  $J_i$  作为材料参数。在 GB2038-80<sup>[103]</sup> 中，将断裂看成是一个过程，不区分局部起裂或是裂纹前缘的全面起裂，将外推得到的  $J_i$  称作表观断裂韧度，将取  $\Delta a = 0.05\text{mm}$  的统计结果对应的  $J_{0.05}$  作为条件起裂  $J$  积分，而如果测得  $J_{0.2}$ ，实际上也给出了相应的线性回归  $J = \alpha + \beta \Delta a$  的直线斜率  $\beta$  值，该值的意义在下文讨论撕裂模量时还将讨论到。在  $J_R$  有效性条件中，取  $(W - a) = c \geq kJ/\sigma_s$ 。对钢材，按 Paris 等人<sup>[82]</sup> 所指出（见本章（7.6）式  $J$  主导条件式）：对于弯曲型试件，要求厚度  $B$  和韧带宽度  $c = W - a$  均大于或等于  $25 J/\sigma_s$ 。即对钢材，取  $k = 25$ 。国内试验表明，对铝合金和钛合金， $k$  值应取得更大。例如对铝合金， $k = 120$ 。而 GB2038-80 中限制  $\Delta a < 0.5\text{mm}$ ，是认为当扩展量  $\Delta a$  较小时，即小量扩展条件下， $J$  积分仍然可作为裂纹尖端状态的表征参数，这一点在下一章中，研究裂纹稳定扩展时将再回过头来讨论。

自从 Begley 和 Landes<sup>[43]</sup> 发表了他们的试验结果以后，国内、外许多研究者致力于研究  $K_{Ic}$  和  $J_{Ic}$  这两个材料断裂韧度的关系问题，特别对于中、低强钢材，测量  $K_{Ic}$  是很困难的，有时甚至是不可能的。人们就想通过对试件尺寸要求较松的  $J_{Ic}$  的小试件测定值，通过一定的换算关系求得材料的平面应变断裂韧性值  $K_{Ic}$ 。在小范围屈服条件下，显然存在关系式：

$$J_{Ic} = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{Ic}^2 \quad (10.8)$$

于是如果测得  $J$  积分试件（小试件）的起裂  $J_{Ic}$ ，则认为平



## 面应变断裂韧度

$$K_{Ic} = [EJ_{Ic}/(1-\nu^2)]^{1/2} \quad (10.9)$$

但是由于：（1）测量  $J_{Ic}$  时起裂载荷判断困难， $K_{Ic}$  测量中，按测试标准并未区分起裂点、失稳点和条件裂纹扩展点。而国家标准〔103〕中，是通过  $J_R$  阻力曲线来推定起裂  $J$  积分  $J_i$  值的；（2）由于大试件与小试件之间，存在“尺寸效应”，所以，为了指出按照式（10.9）作换算的不确定性又能适应工程应用中需要引入换算的要求，GB2038-80〔103〕提出下列换算式

$$K_{JR} = [EJ_R/(1-\nu^2)]^{1/2} \quad (10.10)$$

即以  $K_{JR}$  标记由  $J_R$  换算的值，以区别于有效的平面应变断裂韧度值。例如  $J_R = J_{0.05}$ ，则换算值记为  $K_{J_{0.05}}$ ； $J_R = J_{Ic}$ ，则相应  $K_{JR}$  记为  $K_{J_{Ic}}$ 。

Underwood〔104〕对非弯曲型的  $J$  积分试件作了试验，同时也做了满足  $K_{Ic}$  有效性限制要求的试验。并按（10.9）式将  $J_{Ic}$  的试验结果换算成  $K_{Ic}$  值。图10.5绘出了  $K_{Ic} \sim c\sigma_0^{1/2}/2.5(K_{Ic})^2$  实验结果（式中  $c$  为韧带宽度）实心点表示有效  $K_{Ic}$  实验点，空心圆点表示由  $J_{Ic}$  值换算的点。比较两者之后，发现由  $J_{Ic}$  实验的换算值与  $K_{Ic}$  有效值相当一致，〔102〕的美国 ASTM 标准中已明确规定可用（10.9）从  $J_{Ic}$  值换算材料的  $K_{Ic}$  值。

但按此作进一步研究的许多研究结果指出， $J$  积分给出的换算值并不常常与有效  $K_{Ic}$  值相一致。多数的研究比较是用弯曲型试件或紧凑拉伸试件进行的。Begley和Landes〔105〕用中心裂纹的受拉试件和弯曲型试件，用外插法测得的  $J_{Ic}$  值，对于不同型式的试件都有近乎相同的结果，但  $J_R \sim \Delta a$  曲线的斜率却有明显的不同，而且受拉伸试件的裂纹沿裂纹初始平面成  $45^\circ$  扩展（这一点在 § 7 图7.4已指出）；而弯曲型试件，裂纹却沿自身平面扩展。另外的一些试验结果却发现受

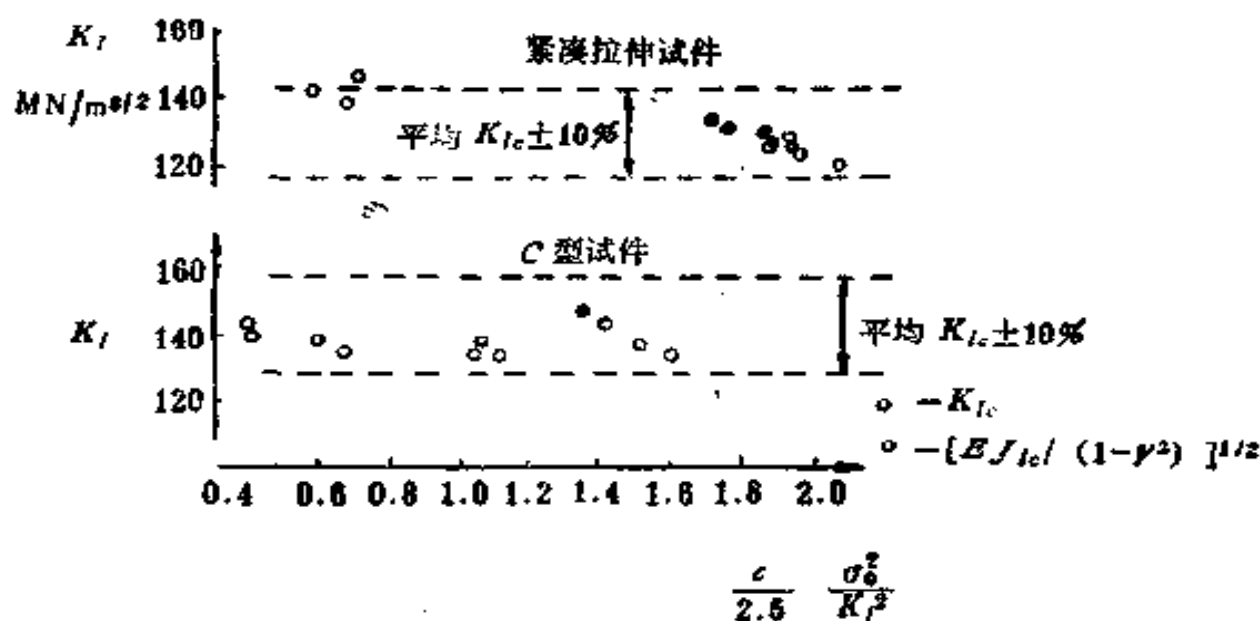


图 10.5 Ni-Cr-Mo钢的由 $J_{Ic}$ 试验结果换算的 $K_{Ic}$ 值[104]

拉伸的中心裂纹试件测得的  $J_{Ic}$  和  $\sigma_{Ic}$  值却有时两倍于弯曲型试件所测得的值，而韧带宽度满足  $c \geq 25J/\sigma_0$  的限制要求。发生这些现象的原因已在 § 7 中作过较详尽的讨论。它实质上与不同构形试件的J主导区尺寸  $R_J$  有关。

试验中要求试件有足够的厚度，以保证在试件内部的塑性区内的平面应变条件。开有边槽的紧凑拉伸试件常常可降低发生在试件侧面的剪切唇效应。如同 C.F.Shih 等 [83] 所曾讨论的那样，还要求试件所有其余的几何尺寸比之固有几何非线性影响的范围要大得多。这影响区域的大小是裂纹张开位移的量级，也即是  $J/\sigma_0$  的量级。

某典型的压力容器用钢 A533-B，在 93℃ 条件下紧凑拉伸试件的  $J \sim \Delta a$  的测量结果见图 10.6。对于具有边槽的紧凑拉伸试件的载荷-加载线位移的试验测定结果及有限元计算结果见图 10.7，这些结果取自 Shih 等 [83] 的研究结果。

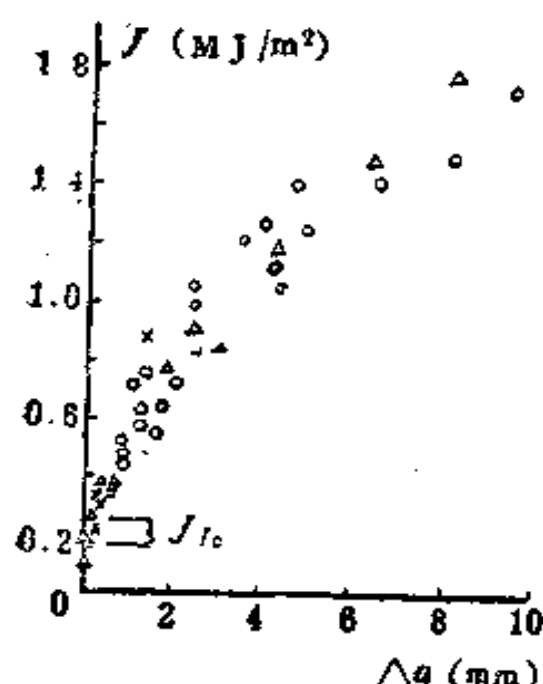


图 10.6 A533B钢紧凑拉伸试件  $J \sim \Delta a$  图

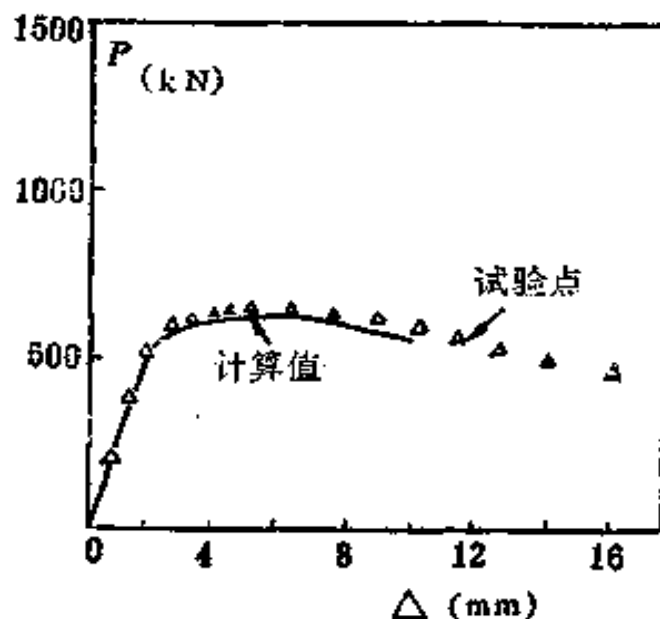


图 10.7 试验测定与有限元计算结果比较

## § 11 裂纹张开位移

裂纹张开位移 (COD) 或裂纹尖端张开位移 (CTOD) 的概念, 在本章 § 2 讨论 D-B 模型时已经讲到过, 并且叙述了裂纹张开位移起裂准则<sup>[106]</sup>,

$$\delta = \delta_c \quad (11.1)$$

认为裂纹张开位移  $\delta$  值达到材料的裂纹张开位移临界值  $\delta_c$  后即起裂, 而 (11.1) 式不管是否属于小范围屈服, 都认为可以使用。对于理想塑性材料的含  $2a$  长裂纹的无限大平板, 可选取 D-B 模型的  $\delta$  计算值 (2.7)

$$\delta = \frac{8\sigma_0 a}{\pi E} \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi \sigma^\infty}{2\sigma_0} \right) \right] \quad (11.2)$$

在  $\sigma \ll \sigma_0$  的小范围屈服条件下

$$\delta = \frac{\pi(\sigma^w)^2 a}{E\sigma_0} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{24} (\sigma/\sigma_0)^2 + \dots \right] \quad (11.3)$$

而对线弹性情况下，取

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{E} = \sigma^2 \pi a / E \quad (11.4)$$

于是有  $\mathcal{G} = \sigma_0 \delta$ 。那么由 (11.1) 式， $\delta_c$  可以作为韧性材料的断裂韧度的一种表征。而且看来， $\delta_c$  的测量不必如同  $K_{Ic}$  测量时对塑性变形区域的大小加以限制，而可望同较小的试件测量材料的断裂韧性值。

早先 Wells<sup>[106]</sup> 是在小范围屈服和平面应力的条件下引入 COD 的定义的。迄今为止，有多种关于 COD 的定义，如图 11.1 (a)–(d) 所示。

图 11.1 (a) 根据 D-B 模型，将 COD 定义为裂纹弹塑性区交界处的裂纹面的张开位移。当然用数字计算的方法，可以从含裂纹物体的弹塑性分析得到弹塑性区交界处的 COD 值，但是要在实验测量时确定弹塑性区交界处的 COD 值则是颇费事的，因为随着载荷的增加和变形的发展，交界点是沿着裂纹表面移动的。由于测量上的困难，这一定义较少应用。

第二种定义如图 11.1 (b) 所示。对于弯曲型加载的试件（例如三点弯曲试件）裂纹张开时，距尖端稍远处裂纹的两表面是平面的，在试验中可观察到这种现象，而在裂纹尖端附近存在钝化区域，则定义  $\delta$  为钝化区与平直的裂纹面相切处的张开位移。但对于拉伸的情形（例如含中心裂纹的平板）裂纹张开后与上述弯曲情形不同，所以这一张开位移的定义已被放弃或很少采用。

第三种  $\delta$  的定义见图 11.1 (c)。它是原始裂纹尖端处

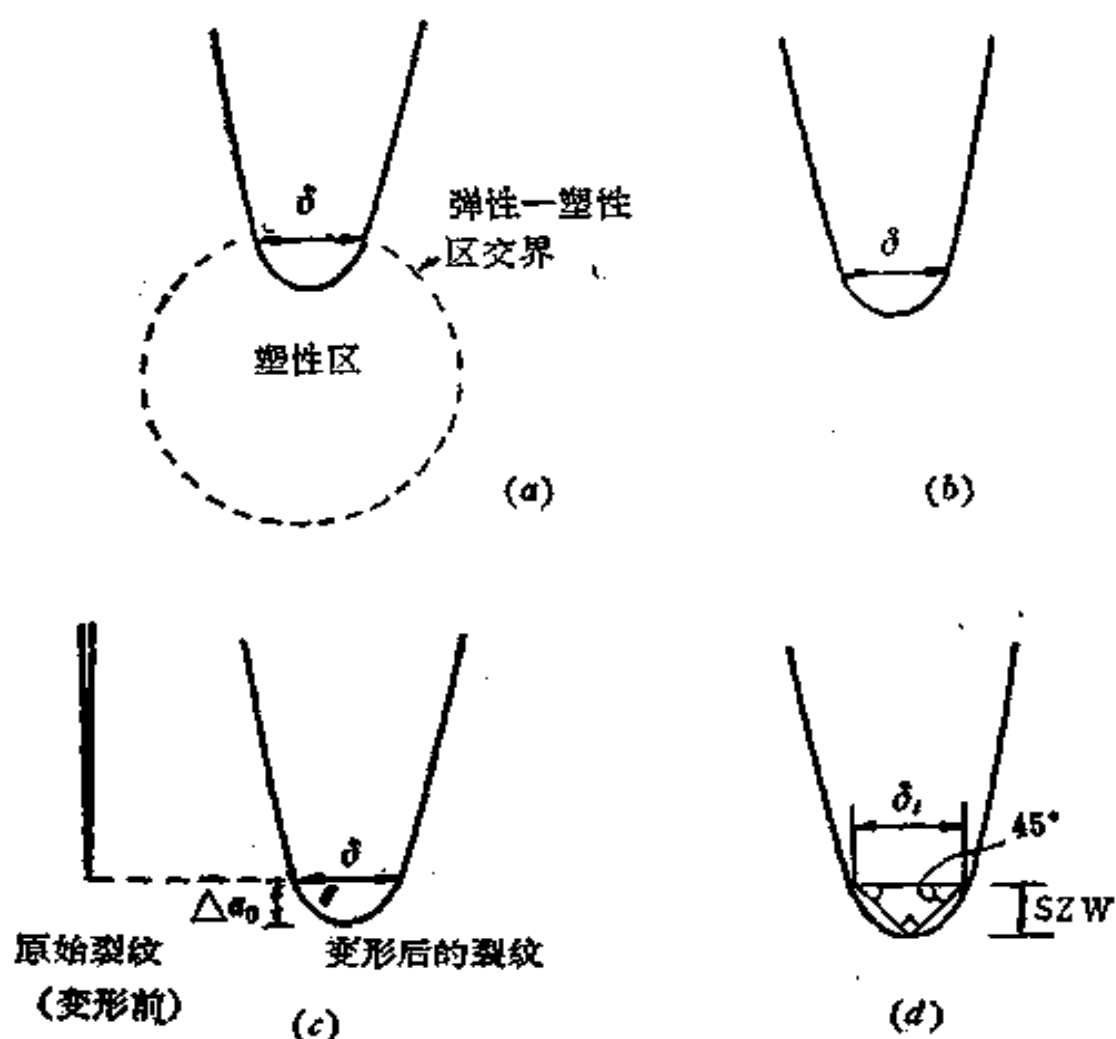


图 11.1 不同的裂纹张开位移的定义示意图

的张开位移，由于裂纹尖端的钝化的塑性区内材料的收缩，变形后的裂纹前缘前进了一段距离  $\Delta a_0$ ，对于韧性较好的材料，在试验中能观察到  $\Delta a_0$ 。但是用变形前状态的一个物质点（原裂纹尖端）与变形后的状态的另一个物质点（并非变形后的对应原裂纹尖端的点）的比较，来定义的张开位移，一般与刚体位移有关，这就违背了连续介质力学的客观性原理<sup>1)</sup>，因而具有严重的缺陷。但工程上还常常沿用这种定义。

1) 按这个定义，单边裂纹的张开位移不能唯一确定，双边裂纹只能确定两尖端张开位移之和，而不能唯一确定每一尖端的张开位移。

第四种  $\delta$  的定义见图 11.1 (d)。它是在变形后的裂纹尖端顶点处作一等边直角三角形，它与裂纹两表面交点处的位移，定义为张开位移  $\delta_i$ 。这一定义是 Rice 所建议的，这就是 § 8 的图 8.1 所定义的张开位移。

Turner<sup>[107]</sup> 引述的有限元计算结果表明，对于不同的 COD 定义，计算结果有成倍的差别。即使在小范围屈服条件下，其差别也很明显。但是，实际上裂纹尖端发生塑性变形的同时，伴随着裂纹尖端的有限变形。对于小变形情况下的理想弹塑性材料，承受拉伸的含裂纹平板在平面应变条件下，其裂纹尖端附近具有以裂纹尖端为汇交中心的滑移线场，而在

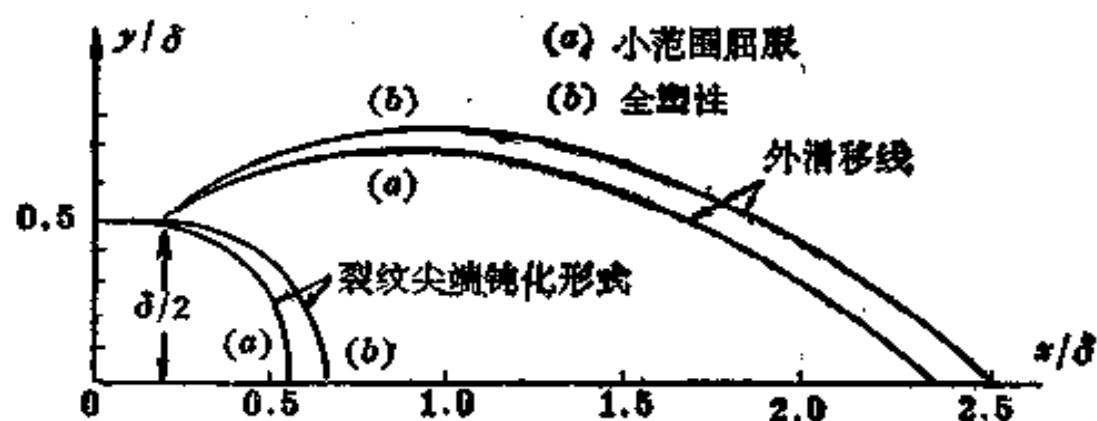


图 11.2 考虑有限变形的裂纹尖端的钝化及滑移线场

有限变形条件下<sup>[71]</sup>，由图 11.2 横坐标可见在裂纹前缘距裂纹尖端约  $2\delta$  范围内，是具有强烈应变集中的非中心扇形场（对数螺旋线滑移场）<sup>[71]</sup>。所以在 COD 的测量中，也需注意由于钝化而形成的延伸区，它是由于钝化引起的裂纹尖端向前移动，而不是裂纹的真实扩展。

为了使 COD 理论能够用于评价材料的断裂韧度，发展了张开位移的测试方法。最早有英国代号为 DD-19<sup>[108]</sup> 的文件，嗣后有 BS5762: 1979<sup>[109]</sup> 及我国的裂纹张开位移试

验方法 GB2358-80〔110〕都规定了用三点弯曲试件，测试材料的临界 COD 值  $\delta_c$ ；其具体的测试规定与方法，可参阅文〔108〕-〔110〕。测试原理如图 11.3 所示。

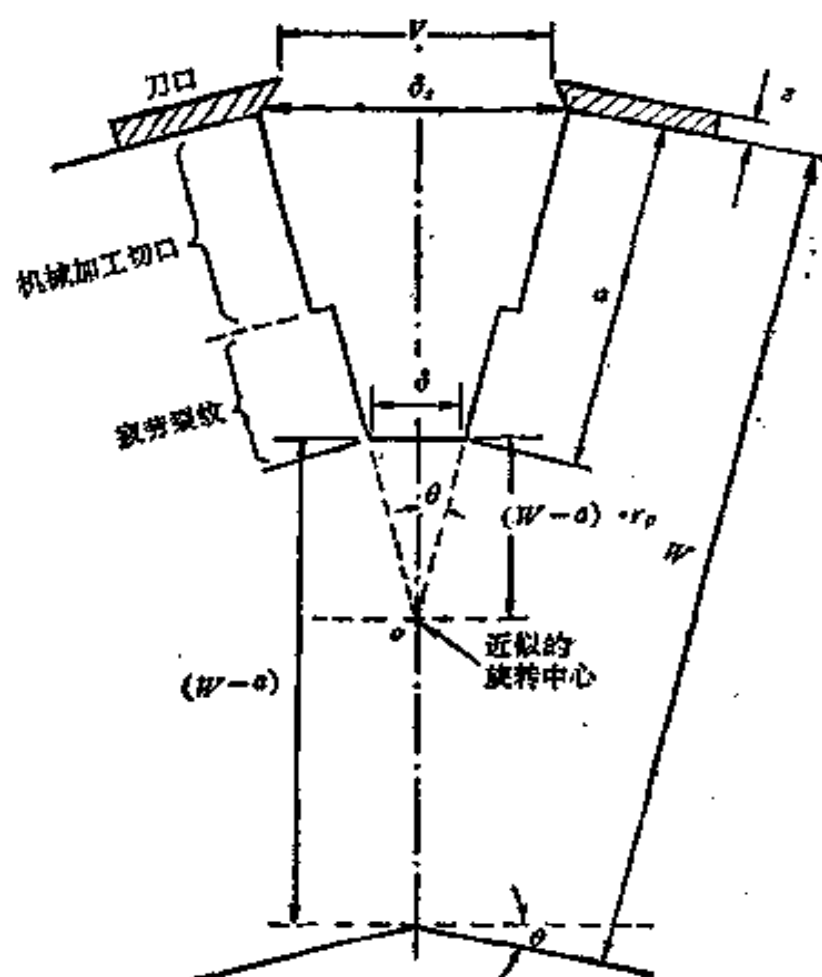


图 11.3 用三点弯曲试件测量COD的原理图

图中  $W$  为三点弯曲试件的高度， $a$  为裂纹长度， $W-a$  为韧带宽度， $z$  为刀口的厚度， $V$  为刀口端的张开位移。假设在塑性变形的过程中，在裂纹两个表面延长线的交点  $o$  是近似的旋转中心，变形过程中，裂纹表面绕  $o$  点作刚体转动，则原裂纹顶点处由于塑性变形而积累的张开位移记为  $\delta$ 。在试验机上，对试件以三点弯曲形式加载，记录外载荷  $P$  与刀

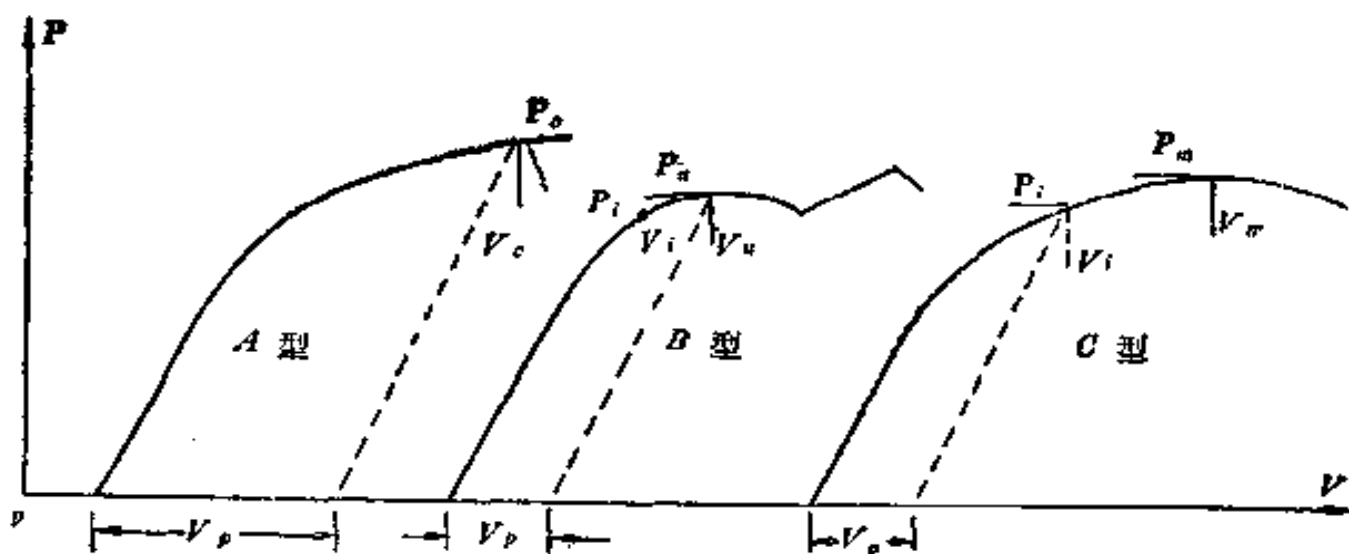


图 11.4 几种典型的 $P \sim V$ 曲线

口张开位移曲线。一般有如图 11.4 的几种形式，记  $V_p$  为刀口张开位移的塑性部分，如图所示。则由图 11.4 的相似三角形可得裂纹张开位移的塑性部分  $\delta_p$  与刀口张开位移的塑性部分  $V_p$  之间有以下关系：

$$\delta_p = \frac{r_p(W-a)}{r_p(W-a) + (a+z)} \cdot V_p \quad (11.5)$$

上式中  $r_p$  一般取 0.45 或实际值。由 (11.4) 式， $\delta_e = \mathcal{E} / \sigma_0$ ，或记  $\delta_e = \mathcal{E} / m\sigma_0$ ，其中  $\sigma_0$  为材料简单拉伸条件下的屈服应力， $m$  称为 COD 的折减因子。对三点弯曲试件，取  $m=2$ ，则张开位移的弹性部分  $\delta_e$  便可表示为

$$\delta_e = K_I^2 / 2\sigma_0 E' \quad (11.6)$$

对于平面应变  $E' = E / (1 - \nu^2)$ ，对平面应力取  $E' = E$ 。则对三点弯曲试件，取下式计算 COD 值，近似取  $r_p = 0.45$

$$\delta = \delta_e + \delta_p = \frac{K_I^2}{2\sigma_0 E'} + \frac{r_p(W-a)V_p}{r_p(W-a) + a + z} \quad (11.7)$$



对三点弯曲试件，按第一章(1.20)式  $K_1 = \frac{P}{BW^{1/2}} \frac{S}{W}$   
 $\times f_2(a/W)$  或记  $Y(a/W) = \frac{S}{W} f_2(a/W)$ ，则

$$K_1 = \frac{P}{BW^{1/2}} Y(a/W)$$

其中  $Y(a/W)$  可以查表〔21〕得到。

自从 1972 年英国标准学会颁发了 COD 试验标准试行草案 DD19 以来，COD 在压力容器用钢的韧性评定及压力容器的断裂安全分析中，得到相当广泛应用。1979 年英国对 DD-19 进行修订后，正式颁布了“COD 试验方法”标准 BS5762。我国于 1980 年制订了“裂纹张开位移 (COD) 试验方法”的国家标准，编号 GB2358-80。后二者都规定以 COD 阻力曲线确定 COD 值的特征点：即由四个以上的试件构成一组，如同 § 10 所述的测定  $J_R$  阻力曲线相同的原理，控制试验在不同的阶段停机、卸载后，用氧化着色或二次疲劳法留印，然后压断试件，测量裂纹扩展量  $\Delta a$ 。然后利用试验中记录的  $P-V$  曲线，按 (11.7) 式计算裂纹张开位移值，作出如图 11.5 所示的  $\delta(\text{COD})-\Delta a$  阻力曲线。从而确定  $\delta_i$ ， $\delta_m$ ， $\delta_c$ ， $\delta_u$ ，和  $\delta_{0.05}$ 。

其中  $\delta_i$ ——裂纹稳定扩展开始点的张开位移；

$\delta_m$ ——最大载荷  $P_m$  时相应的张开位移；

$\delta_c$ ——脆性起裂、突进点或失稳断裂时对应的张开位移 ( $\Delta a \leq 0.05\text{mm}$ )；

$\delta_u$ ——裂纹获得  $\Delta a > 0.05\text{mm}$  的扩展后的失稳断裂点对应的张开位移；

$\delta_{0.05}$ —— $\delta_R$  阻力曲线上相应  $\Delta a = 0.05\text{mm}$  的  $\delta_R$  值，即

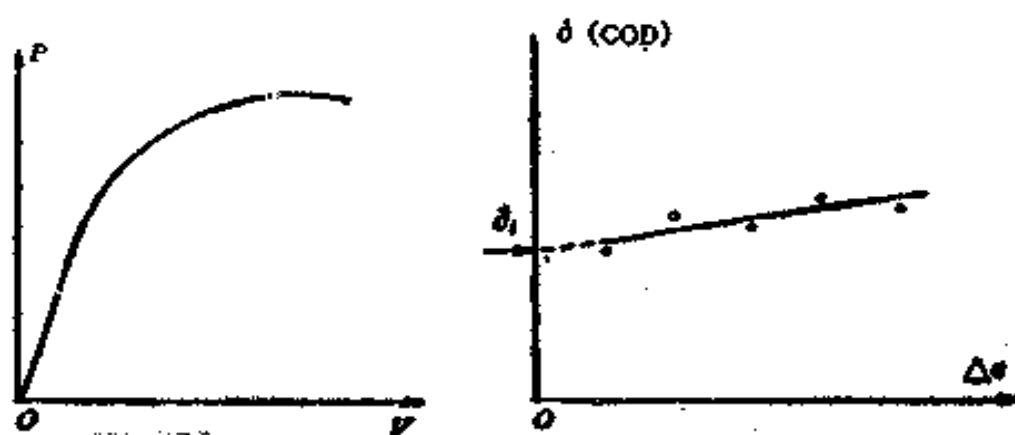


图 11.5 裂纹张开位移阻力曲线

为条件起裂 COD 值。

在国家标准 GB2308-80[103] 中的附录 A 还规定了由图 10.1 由施加载荷  $P$  和施力点位移  $\Delta$  的记录曲线估算 COD 值的计算公式; 由图 10.1 与图 11.3, 有  $\theta \approx \frac{2\Delta_p}{S}$ ,  $\delta_p \approx \theta \cdot 2r_p(W-a)$

$$\delta_R = \delta_s + \delta_p = \frac{K_I^2}{2\sigma_0 E'} + \frac{4r_p(W-a)\Delta_p}{S} \quad (11.8)$$

式中  $K_I$  计算同式(11.7),  $r_p = 0.45$  (当  $P/P_L \geq 0.9$  时,  $P_L$  为极限载荷),  $S$  为跨距,  $\Delta_p$  是  $P-\Delta$  曲线中施力点位移的塑性部分。

测得了上述张开位移的诸特征值后, 一是在选材时, 用它来判别与选择具有合适断裂韧度值的材料; 二是可用于压力容器、焊接结构的缺陷的安全评定。用于产品验收中, 当传统的质量控制验收不合格时, 再用断裂力学的方法, 对结构的缺陷加以安全评定。Burdekin 等[111] 在 Wells[106] 工作的基础上, 统计了含中心裂纹的宽板拉伸试验的试验数据, 建议了简单然而保守的公式, 记  $\phi = \delta/2\pi\epsilon_0\bar{a}$  为无量。

网裂纹张开位移，取设计曲线为：（ $e$ 表示工作应变）

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (\varepsilon/\varepsilon_0)^2 & \varepsilon/\varepsilon_0 \leq 0.5 \\ \phi &= (\varepsilon/\varepsilon_0) - 0.25 & \varepsilon/\varepsilon_0 > 0.5 \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

上述建议的设计曲线与初期试验数据的比较见图11.6。应用（11.9）式时，需将实际结构中起始存在的缺陷等效为贯穿

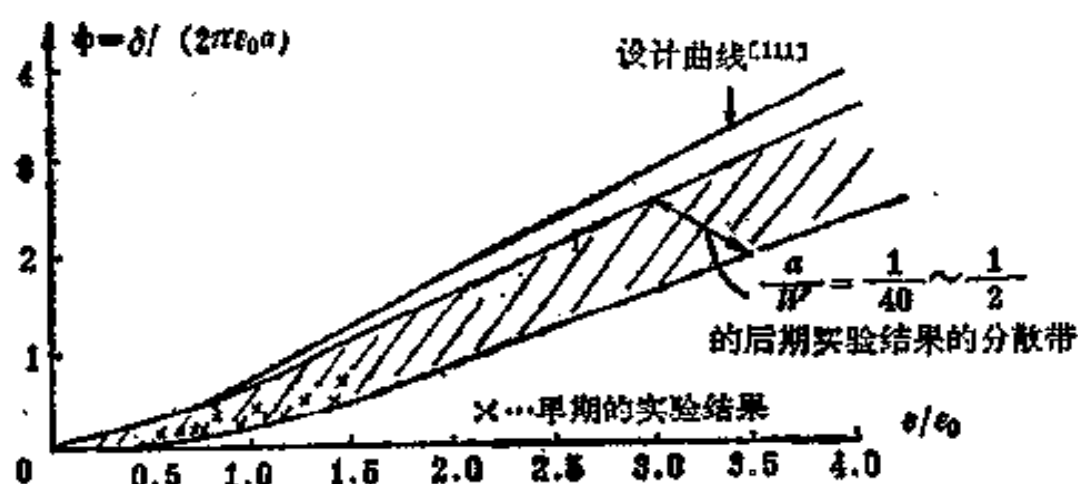


图 11.6 Burdekin设计曲线与实验结果分散带

裂纹，其长度为 $2\bar{a}$ ，然后进行安全评定。此时，可利用裂纹张开位移断裂准则（11.1）。

经验公式（11.9）是应用D-B模型和在宽板拉伸试验结果基础上提出的，在缺陷评定的有关资料[112]中常常引用。但仍有许多值得进一步研究的问题。诸如：与部件试验研究相配合，分析（11.9）式的合理性；选择何种断裂韧度的特征值作为（11.1）式中的 $\delta_0$ 值；对焊接结构及残余应力考虑等等。而在力学分析上，尚应考虑与 $\sigma_R$ 阻力曲线相应的裂纹稳定扩展情况下，如何选择合理的弹塑性断裂准则，如何考虑材料加工硬化的影响，这些问题将在第三章中加以讨论。

## 第三章 裂纹扩展

实验研究和实际结构的破坏均表明：韧性材料的断裂过程，往往是在起裂以后，经过裂纹的稳定扩展过程而最后导致失稳断裂的。因此，对裂纹稳定扩展过程的研究成为目前弹塑性断裂力学的中心课题之一。

### § 1 在 J 控制条件下的 裂纹扩展与稳定性

#### 1. J 控制扩展的条件

裂纹的扩展引起在尖端附近某些部分材料的卸载及明显的非比例塑性变形。J 积分的理论（第二章 § 1）是建立在塑性形变理论及无卸载的假定的基础上的，而塑性形变理论不能用于描述上述的变形现象。因此，J 积分本来只能用于静止裂纹（即起裂以前）的分析。但是 Hutchinson 和 Paris<sup>(114)</sup> 证明：在某些条件之下，J 积分也可用于分析裂纹的扩展与稳定性。此种情况称为 J 控制扩展。这些条件也就是为了保证使非比例塑性变形与卸载只局限在裂纹尖端附近的一个小的局部，而在此局部以外有一个 J 主导区，其中塑性变形是近似成比例的，因而塑性形变理论可近似适用。

在小范围屈服情况下，J 与  $K$  之间有关系  $J = K^2/E'$ ，可以采用  $K_R$  阻力曲线（第一章 § 4）来分析稳定扩展。这

当然要求裂纹扩展量  $\Delta a$  很小，即比试件或结构的其他有关尺寸都小得多。此时，在平面应变或平面应力条件下  $K$ （或  $J$ ）与裂纹扩展量  $\Delta a$  各有一个函数关系。试件的构形，加载的方式及荷载大小都只通过  $K$ （或  $J$ ）起作用，因为在裂纹尖端外部的场唯一地取决于  $K$ （或  $J$ ）。

本节主要讨论的是大范围屈服（包括全屈服）的情况。为了要使得  $J$  成为对于扩展裂纹的一个有意义的参数，而且存在  $J$  与  $\Delta a$  之间的函数关系，可适用于各种构形与各种荷载作用下的试件或构件，就必须满足一些进一步的条件。实际上，本节的  $J_R$  阻力曲线分析方法就是小范围屈服条件下

$K_R$  阻力曲线分析方法的推广。

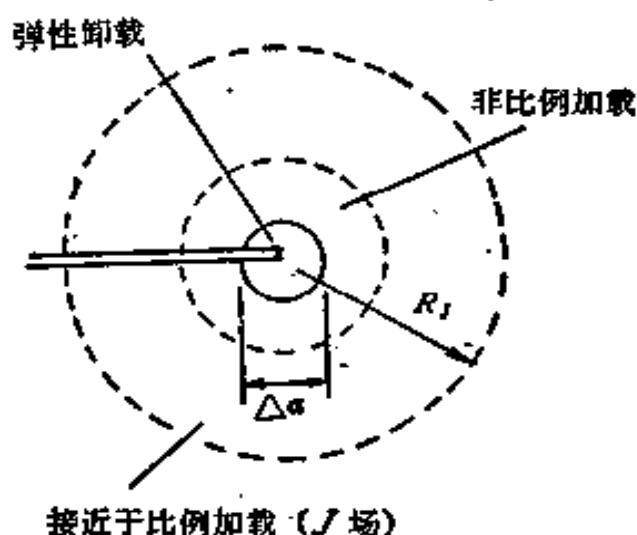


图 1.1 J控制裂纹扩展时的尖端附近情况

图1.1 假定在裂纹尖端附近的卸载变形与非比例塑性变形区以外，有一个  $J$  主导区，其中的应力应变场就是  $J$  场，以  $R_J$  表示  $J$  场的特征尺寸。 $J$  场中的应变在 I 型情况下由第三章 (6.21) 式表示：

$$\varepsilon_{ij} = k_n J^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} \sim \varepsilon_{ij}(\theta, n) \quad (1.1)$$

式中

$$k_n = \frac{a\sigma_0}{E} \left( \frac{E}{a\sigma_0^2 I_n} \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

在小范围屈服情况，裂纹尖端的外部场为  $K$  场，其特征

尺寸以  $R_K$  表示,  $K$  场比塑性区大得多, 而  $J$  场只占塑性区大小的若干分之一。在本节所讨论的大范围屈服甚至全屈服情况, 则不要求有  $K$  场存在,  $R_J$  只是韧带尺寸的很小一部分。

因为卸载区和明显的非比例塑性变形区的尺寸与  $\Delta a$  同量级, 所以  $J$  控制扩展的第一个条件为

$$\Delta a < R_J \quad (1.2)$$

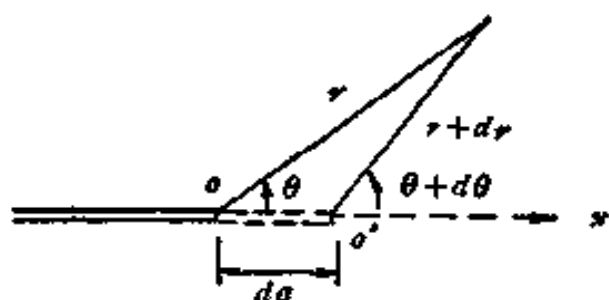


图 1.2 裂纹扩展时  $r, \theta$  的变化

现在我们来研究当  $J$  随着裂纹扩展而增长时应变的变化情况。由图1.2, 当裂纹扩展  $da$  时, 对于一定质点, 极坐标 (以尖端为极点) 值也相应地改变, 其改

变量为

$$\left. \begin{aligned} dr &= -\frac{\partial r}{\partial x} da = -\cos\theta da \\ d\theta &= -\frac{\partial \theta}{\partial x} da = \frac{\sin\theta}{r} da \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

故由 (1.1) 式, 由于  $J$  的变化  $dJ$  与裂纹扩展  $da$  (引起  $r$  与  $\theta$  的变化  $dr$  与  $d\theta$ ) 所引起的应变增量为

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ij} &= k_n \left( \frac{n}{n+1} J^{\frac{n}{n+1}-1} dJ \right) r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta, n) \\ &\quad - k_n J^{\frac{n}{n+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ r^{-\frac{n}{n+1}} \tilde{\epsilon}_{ij}(\theta, n) \right] da \end{aligned}$$

式中

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

化简后, 得到

$$de_{ij} = k_n J^{\frac{n}{n+1}} r^{-\frac{n}{n+1}} \left\{ \frac{n}{n+1} \frac{dJ}{J} \tilde{\varepsilon}_{ij} + \right. \\ \left. + \frac{da}{r} \tilde{\beta}_{ij} \right\} \quad (1.4)$$

式中

$$\tilde{\beta}_{ij}(\theta, n) = \frac{n}{n+1} \cos\theta \tilde{\varepsilon}_{ij} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\varepsilon}_{ij}$$

在 (1.4) 式中右端的第一项 (含  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ ) 表示比例变形 ( $de_{ij} \sim \varepsilon_{ij}$ ), 而第二项 (含  $\tilde{\beta}_{ij}$ ) 则表示非比例变形。 $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  与  $\tilde{\beta}_{ij}$  是属于同一量级的。当  $r$  很小时, 第二项显然比第一项大得多, 这表示在扩展裂纹尖端的邻近存在着明显的非比例变形。但如果在  $J$  主导区内离尖端稍远处有些部位的  $r$  值满足

$$\frac{da}{r} \ll \frac{dJ}{J} \quad (1.5)$$

则在这些部位处, 第二项与第一项相比属于次要, 因而变形是近似地成比例的。

定义一具有长度量纲的材料常数  $D$ :

$$\frac{1}{D} = \left( \frac{dJ}{da} \right)_c \frac{1}{J_c} \quad (1.6)$$

即

$$D = J_c / \left( \frac{dJ}{da} \right)_c$$

式中下标  $c$  表示起裂时的值,  $D$  的物理意义示于图 1.3。假定裂纹扩展量  $\Delta a$  很小, 因而扩展段曲线可用起裂点的切线

代替， $D$ 表示沿此切线使 $J$ 值加倍（从起裂时的 $J_c$ 增至 $2J_c$ ）所需的裂纹扩展量。对于通常的中等强度钢，只要裂纹扩展一两个毫米， $J$ 就可以增至数倍于 $J_c$ 的值。由于小范围屈服情况下 $J \sim K^2$ ，把（1.6）式与第一章§4的图4.6相比，可知材料常数 $D$ 是 $l$ 的一半： $D = l/2$ 。

（1.5）式要求

$$\frac{1}{r} \ll \frac{1}{D}, \text{ 即 } D \ll r \quad (1.7)$$

因此，欲要 $J$ 主导区内有变形近似成比例的部位，必须满足

$$D < R_J \quad (1.8)$$

这就是 $J$ 控制扩展的第二个条件。因为 $J$ 主导区尺寸 $R_J$ 只是韧带尺寸的很小一部分，这个条件也可写作

$$\omega \gg 1 \quad (1.9)$$

式中 $\omega$ 为韧带尺寸 $c$ 与材料常数 $D$ 之比值：

$$\omega = \frac{c}{D} = \frac{c}{J_c} \left( \frac{dJ}{da} \right)_c \quad (1.10)$$

例如第二章（7.5）式所述，对弯曲型试件：

$$R_J \approx 0.07c$$

$J$ 控制扩展的两个条件（1.2）和（1.8）可写作：

$$\Delta a < 0.07c$$

$$\omega > 14$$

而对于拉伸型试件：

$$R_J \approx 0.01c$$

$J$ 控制扩展的两个条件成为

$$\Delta a < 0.01c$$

$$\omega > 100$$

因此， $J$ 控制扩展条件要求裂纹扩展量 $\Delta a$ 小，材料的



阻力曲线斜率大，即材料的  $J$  随裂纹扩展而急剧加大（ $D$  小）。

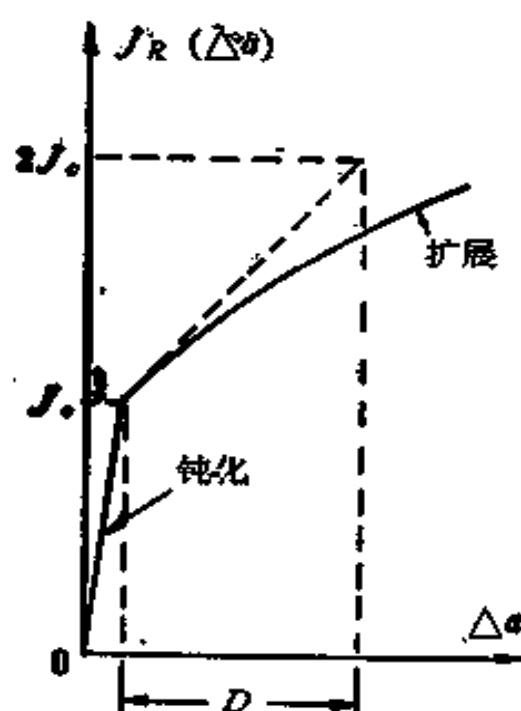


图 1.3  $J$  阻力曲线

## 2. $J$ 控制扩展的稳定分析

当外加的荷载为已知，因而  $J$  为已知时，由  $J$  与  $\Delta a$  的关系，即  $J$  阻力曲线：

$$J = J_R(\Delta a) \quad (1.11)$$

可求出裂纹扩展量  $\Delta a$ 。仿第一章 § 4，此时裂纹为稳定的条件是：

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta_T} < \frac{dJ_R}{da} \quad (1.12)$$

式中  $\Delta_T$  为试件与串联弹簧的总位移（见第二章图1.1）。

反之，如

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta_T} > \frac{dJ_R}{da} \quad (1.13)$$

则裂纹是不稳定的，将出现失稳断裂。

Paris等人<sup>[116]</sup>引入一个无量纲的参数:

$$T = \frac{E}{\sigma_0^2} \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta T} \quad (1.14)$$

$T$  的值与加载方式及荷载值 (或位移值) 有关, 同时还引入一个无量纲的材料常数:

$$T_R = \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{dJ_R}{da} \quad (1.15)$$

对于通常的中等强度钢  $J$  控制扩展条件要求裂纹扩展量  $\Delta a$  很小, (1.15) 式中的  $dJ_R/da$  可以用  $J$  阻力曲线在起裂点 (图1.3) 处的斜率来代替。  $T_R$  值称为材料的撕裂模量。对于通常用的钢材,  $T_R$  值的范围约为

$$0.1 < T_R < 500$$

式中下限0.1对应于高屈服限与低韧性的钢, 而上限500则对应于低屈服限与高韧性的钢。这样, 稳定条件 (1.12) 就可写成无量纲的形式:

$$T < T_R \quad (1.16)$$

当等号成立, 即  $T = T_R$  时, 裂纹开始失稳。

为了分析裂纹的稳定性, 必须计算  $(\partial J / \partial a)_{\Delta T}$ 。由于  $J$  本身是建立在塑性形变理论且无卸载 (相当于非线性弹性) 的假定基础上的, 所以在计算时也采用这个假定。按此假定,  $J$  应是荷载  $P$  与裂纹长度  $a$  的函数, 且  $J$  只与当时的状态, 即当时的  $P$  与  $a$  值有关, 而与到达此状态的过程 (即历史) 无关。也就是说, 如果裂纹初始长度为  $a_0$ , 扩展  $\Delta a$  后裂纹长为  $a = a_0 + \Delta a$ , 则此时试件 (或结构) 的状态与另一个尺寸相同且初始裂纹为同一  $a$  的原始试件 (或结构) 在相同荷载作用下的状态相同。这意味着: 一切的量 (应力、位移、应变等) 都只依赖于荷载  $P$  与裂纹长度  $a$ , 如果是场 (应力

场、位移场、应变场等)的话,当然还与坐标  $x_i$  有关。因此加载点的位移(即试件与串联弹簧的总位移)可写作

$$\Delta = \Delta(a, P) + C_M P \quad (1.17)$$

式中  $C_M$  表示串联弹簧的柔度。取 (1.17) 式的微分,得到当总位移  $\Delta_T$  保持不变时荷载增量  $dP$  与裂纹扩展量  $da$  之间的关系:

$$d\Delta_T = \left( \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_P da + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial P} \right)_a dP + C_M dP = 0$$

$$\text{即} \quad dP = -da \left( \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_P \left[ C_M + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial P} \right)_a \right]^{-1} \quad (1.19)$$

(1.19) 式中右端出现的两个偏导数均为正值,故当总位移  $\Delta_T$  保持一定时,随着裂纹的扩展 ( $da > 0$ ), 载荷  $P$  减小 ( $dP < 0$ )。

为了计算  $(\partial J / \partial a)_{\Delta_T}$ , 先计算  $dJ$ :

$$dJ = \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_P da + \left( \frac{\partial J}{\partial P} \right)_a dP \quad (1.20)$$

将当  $\Delta_T$  保持一定时  $dP$  与  $da$  的关系 (1.19) 式代入 (1.20) 式, 可得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta_T} &= \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_P - \left( \frac{\partial J}{\partial P} \right)_a \left( \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_P \\ &\quad \cdot \left[ C_M + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial P} \right)_a \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.21)$$

对于试验机为刚性的情况(即试验条件为控制位移),  $C_M = 0$ , (1.21) 式成为

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta T} &= \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_P - \left( \frac{\partial J}{\partial P} \right)_a \left( \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_P \\
&\quad \times \left( \frac{\partial \Delta}{\partial P} \right)_a \\
&= \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_P + \left( \frac{\partial J}{\partial P} \right)_a \left( \frac{\partial P}{\partial a} \right)_\Delta \\
&= \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_\Delta
\end{aligned}$$

而对于试验机为柔性的情况（即试验条件为控制载荷）， $C_M = \infty$ ，（1.21）式则简化为

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta T} = \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_P$$

### 3. 深裂纹弯曲试件

对于弯曲试件，由第二章 § 1（1.9）式，计算  $J$  的公式为

$$J = \int_0^M \left( \frac{\partial \theta}{\partial a} \right)_{(a)} dM \quad (1.22)$$

这里及下文中用积分号下的符号  $(a)$  表示在积分时保持裂纹长度  $a$  不变。和第二章 § 9 类似，对于深裂纹弯曲试件， $J$  的计算可以得到简化。

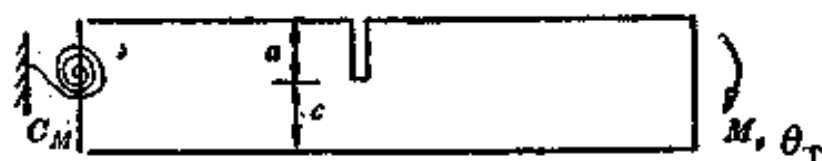


图 1.4 深裂纹弯曲试件

图1.4表示一深裂纹弯曲试件，与一旋转弹簧串联，弹簧柔度为  $C_M$ 。仿第二章（9.9），把试件在弯矩  $M$  作用下的

转角 $\theta$ 写成 $\theta_{nc}$ 与 $\theta_c$ 两部分之和:

$$\theta = \theta_{nc} + \theta_c \quad (1.23)$$

式中  $\theta_{nc}$  为相应的无裂纹试件在同一弯矩 $M$ 作用下的转角, 因而  $\theta_c$  为由于存在裂纹而引起转角的增加值。在深裂纹情况下, 仿第二章 (9.10) 式, 根据量纲分析, 有

$$\theta_c = f\left(\frac{M}{\sigma_0 c^2}\right) \quad (1.24a)$$

其逆函数为

$$M = \sigma_0 c^2 F(\theta_c) \quad (1.24b)$$

仿第二章 (9.16) 式的推导:

$$J = \frac{2}{c} \int_0^{\theta_c} M d\theta_c \quad (1.25)$$

式中被积函数 $M$ 表示当裂纹长度保持不变 (静止裂纹) 时的弯矩, 它是随 $\theta_c$ 而变化的函数, 将 (1.24b) 式代入 (1.25), 得

$$J = 2\sigma_0 c \int_0^{\theta_c} F(\tilde{\theta}_c) d\tilde{\theta}_c \quad (1.26)$$

式中 $\tilde{\theta}_c$ 表示积分变量。

但是在实际的试验过程中, 裂纹是在扩展着, 裂纹长度 $a$ , 因而韧带尺寸 $c$ 不是保持不变而是在变化着的。因此无法按 (1.26) 式计算 $J$ 。Hutchinson 和 Paris<sup>[114]</sup>建议采用以下的方法来计算 $J$ 。

根据塑性形变理论及无卸载的假定,  $J$ 仅取决于当时的 $a$ 与 $M$ 值, 而与历史无关, 即 $J = J(a, M)$ 。为了方便起见, 可以把自变量转换为 $a, \theta_c$ , 因为 $\theta_c$ 也是 $a$ 与 $M$ 的函数 $\theta_c(a, M)$ 。这样就得到

$$J = J(a, M) = J(a, \theta_c) \quad (1.27)$$

式中右端出现的两个函数不是同一个函数，但为简单起见仍用同一函数记号  $J$  表示。(1.26) 式的积分路径 ( $a = \text{定值}$ ) 在  $(a, \theta_c)$  平面上可用直线  $AB$  表示。在  $(a, \theta_c)$  平面上，一个点代表着试件的一个状态。

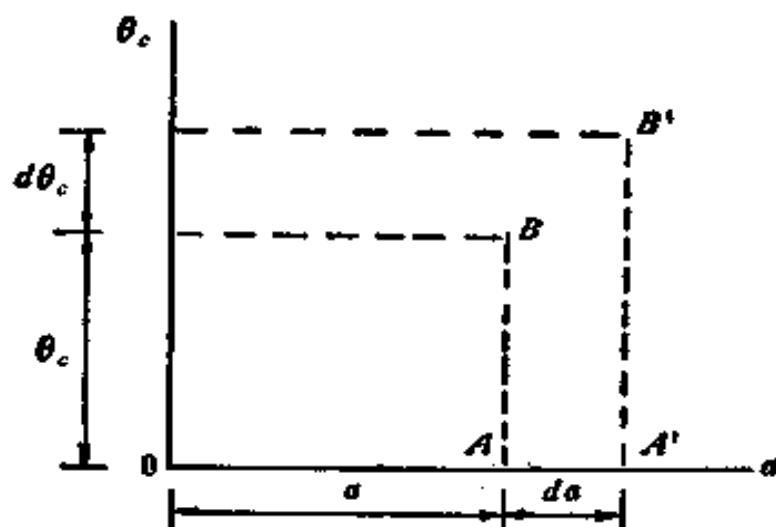


图 1.5  $(a, \theta_c)$  平面

按 (1.26) 式可沿图 1.5 的  $(a, \theta_c)$  平面上直线  $A'B'$  积分以计算对应于  $B'$  点  $(a + da, \theta_c + d\theta_c)$  的  $J$  值：

$$J + dJ = 2\sigma_0(c + dc) \int_0^{\theta_c + d\theta_c} F(\tilde{\theta}_c) d\tilde{\theta}_c \quad (1.28)$$

将 (1.28) 与 (1.26) 两式相减，可得  $B'$  点与  $B$  点所对应的  $J$  值之差：

$$dJ = 2\sigma_0 c F(\theta_c) d\theta_c + 2\sigma_0 dc \int_0^{\theta_c} F(\tilde{\theta}_c) d\tilde{\theta}_c$$

式中  $dc = -da$ 。利用 (1.24b) 与 (1.26)，上式可写作：

$$dJ = \frac{2M}{c} d\theta_c - \frac{J}{c} da \quad (1.28)'$$

这就是深裂纹弯曲试件以  $a$  与  $\theta_c$  为自变量时  $J$  的微分公式。

在无载荷作用时,  $M=0$ , 必有  $\theta_c=0$ ,  $J=0$ , 故对应于  $(a, \theta_c)$  平面上  $a$  轴的各点 ( $\theta_c=0$ ),  $J=0$ 。因为 (1.27) 式  $J$  为  $a$  与  $\theta_c$  的函数, 与加载历史无关, 故为了求  $J$ , 可以从  $(a, \theta_c)$  平面上  $a$  轴上任何一点沿任何路径积分到我们所要计算的  $(a, \theta_c)$ 。作为特例, 我们可以取实际试验过程的路径 (图1.6) 进行积分, 得到

$$J = 2 \int_0^{\theta_c} \frac{M}{c} d\theta_c - \int_{a_0}^a \frac{J}{c} da \quad (1.29)$$

式中右端第二项是比第二章静止裂纹的 (9.16) 式 (Rice, Paris 与 Merkle<sup>[89]</sup>) 多出的项。Hutchinson 和 Paris 指出 Begley 与 Landes<sup>[90]</sup> 未考虑 (1.29) 式中的右端第二项是会引起误差的。如果裂纹

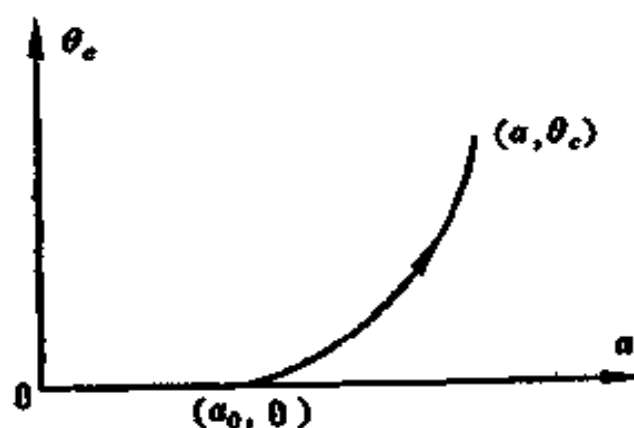


图 1.6  $(a, \theta_c)$  平面上的积分路径

扩展量小, 此第二项通常较小, 但不能忽略。此外, 必须注意在计算 (1.29) 式右端第一项积分时, 被积函数中的韧带尺寸  $c$  是变化着的, 应取即时的韧带尺寸。

现在来讨论为稳定分析所必需的  $(\partial J / \partial a)_{\theta_T}$  的计算。对于弯曲情况, (1.21) 式成为

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\theta_T} &= \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_M - \left( \frac{\partial J}{\partial M} \right)_a \left( \frac{\partial \theta}{\partial a} \right)_M \\ &\quad \times \left[ C_M + \left( \frac{\partial \theta}{\partial M} \right)_a \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.30)$$

现在分别计算此式右端的各项。右端第一项可利用 (1.22) 式

计算。

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_M = \int_{(a)}^M \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 a} \right)_M dM \quad (1.31)$$

式中右端的被积函数可利用 (1.23)、(1.24a) 式表示为

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial a^2} \right)_M &= \left( \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial a^2} \right)_M = \left( \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial c^2} \right)_M \\ &= \frac{\partial^2}{\partial c^2} f \left( -\frac{M}{\sigma_0 c^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial c} \left[ \left( -\frac{2M}{\sigma_0 c^3} \right) f' \left( -\frac{M}{\sigma_0 c^2} \right) \right] \\ &= \frac{6M}{\sigma_0 c^4} f' \left( -\frac{M}{\sigma_0 c^2} \right) + \frac{4M^2}{\sigma_0^2 c^6} f'' \left( -\frac{M}{\sigma_0 c^2} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

仿照第二章 (9.14) 式的推导过程, 利用

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a &= \frac{1}{\sigma_0 c^2} f' \left( -\frac{M}{\sigma_0 c^2} \right) \\ \left( \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial M^2} \right)_a &= \frac{1}{\sigma_0^2 c^4} f'' \left( -\frac{M}{\sigma_0 c^2} \right) \end{aligned}$$

可将 (1.32) 式表示成

$$\left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial a^2} \right)_M = \frac{6M}{c^2} \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a + \frac{4M^2}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial M^2} \right)_a$$

将上式代入 (1.31) 式, 得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_M &= \int_{(a)}^M \left[ \frac{6M}{c^2} \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4M^2}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial M^2} \right)_a \right] dM \end{aligned}$$



$$= -\frac{6}{c^2} \int_{(a)}^M M d\theta_c + \frac{4}{c^2} \int_{(a)}^M M^2 \left( \frac{\partial^2 \theta_c}{\partial M^2} \right)_a dM$$

右端第一项可利用 (1.25) 式以  $J$  表示, 第二项可以分部积分, 得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_M &= -\frac{3}{c} J + \frac{4}{c^2} \left\{ M^2 \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a - \right. \\ &\quad \left. - \int_{(a)}^M \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a \cdot 2M dM \right\} \\ &= -\frac{3}{c} J + \frac{4}{c^2} \left\{ M^2 \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{(a)}^M M d\theta_c \right\} \end{aligned}$$

再次利用 (1.25) 式, 最后得

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_M = -\frac{J}{c} + \frac{4M^2}{c^2} \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a \quad (1.33)$$

现计算 (1.30) 右端的其他偏导数。由 (1.22)、(1.23) 式得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial J}{\partial M} \right)_a &= \left( \frac{\partial \theta}{\partial a} \right)_M = \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial a} \right)_M \\ &= \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a \frac{2M}{c} \end{aligned} \quad (1.34)$$

式中最后一个等式是利用 (1.24a) 导出的。还有

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \theta}{\partial M} \right)_a &= -\frac{d\theta_{nc}}{dM} + \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a \\ &= C_{nc} + \left( \frac{\partial \theta_c}{\partial M} \right)_a \end{aligned} \quad (1.35)$$

式中  $C_{nc}$  表示无裂纹试件的柔度。一般说来,  $C_{nc}$  为  $M$  的函数, 但对于深裂纹试件通常  $C_{nc}$  为弹性柔度 (等于常数), 因为  $M$  很少会超过无裂纹试件的屈服限。将 (1.33) — (1.35) 式代入 (1.30) 式, 并化简后, 得到

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\theta_r} = -\frac{J}{c} + \frac{4M^2}{c^2} \cdot \frac{C}{C \left( \frac{\partial M}{\partial \theta_c} \right)_c + 1} \quad (1.36)$$

式中  $C$  表示串联弹簧柔度  $C_M$  与无裂纹试件柔度  $C_{nc}$  之和

$$C = C_M + C_{nc} \quad (1.37)$$

$$C_{nc} = \frac{12L}{Eb^3} \quad (\text{弹性情况}) \quad (b = a + c)$$

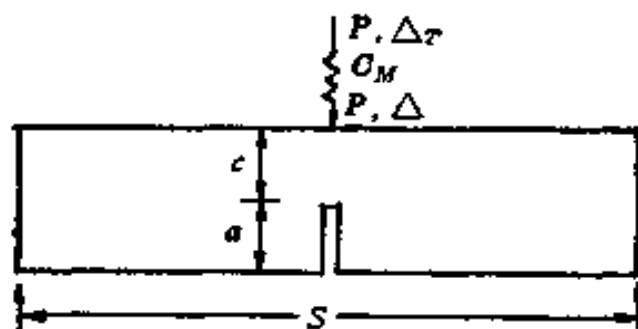


图 1.7 三点弯曲试件 ( $b = a + c$ )

对于具有深裂纹的三点弯曲试件也可以仿照上述方法进行分析。所得结果与上述图1.4的纯弯试件结果类似, 只需把弯矩  $M$  改为力  $P$ , 转用  $\theta$  改为沿力作用线的位移  $\Delta$ , (1.29) 式成为

$$J = 2 \int_a^c \frac{P}{c} d\Delta_c - \int_{a_0}^a \frac{J}{c} da \quad (1.38)$$

此式可用于计算裂纹扩展试验过程中的  $J$  值。(1.33) 与 (1.36) 式则变为

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_P = -\frac{J}{c} + \frac{4P^2}{c^2} \left( \frac{\partial \Delta_c}{\partial P} \right)_a \quad (1.39)$$

与

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta_T} = -\frac{J}{c} + \frac{4P^2}{c^2} \cdot \frac{C}{C \left( \frac{\partial P}{\partial \Delta_c} \right)_a + 1} \quad (1.40)$$

式中

$$C = C_M + C_{nc} \quad (1.41)$$

$$C_{nc} = \frac{L^3}{4Eb^3} \quad (\text{弹性情况})$$

对于试验机为柔性（即控制荷载）的情况， $C_M \rightarrow \infty$ ，(1.40)式变成(1.39)式。

在起裂以前（ $a = a_0$  保持不变），(1.36)与(1.40)式右端的量都可以用单试件试验过程中测得的数据算出。由于右端的量在起裂前后是连续的，故(1.36)与(1.40)式可用于分析裂纹在起裂点时的稳定性。至于在起裂以后，为了计算(1.36)与(1.40)式右端的 $(\partial M / \partial \theta_c)_a$ 与 $(\partial P / \partial \Delta_c)_a$ ，则需要多试件试验过程中的数据。<sup>1)</sup>

但是，对于理想塑性材料的全屈服极限状态，情况则更为简单。例如，对于三点弯曲试件，

$$P = P_{\text{limit}} \quad (\text{极限荷载}) = \frac{4A}{L} \sigma_0 c^2 \quad (1.42)$$

式中，由第二章(6.9)'，(6.24)式

$$\begin{aligned} A &= 0.364 \quad (\text{平面应变}) \\ &= 0.268 \quad (\text{平面应力}) \end{aligned}$$

1) Hutchinson与Paris<sup>[114]</sup>建议用两个试件。

此时  $(\partial P / \partial \Delta_c)_a = 0$ ，故 (1.40) 式简化为

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta_T} = - \frac{J}{c} + \frac{4P^2 C}{c^2} \quad (1.43)$$

将 (1.42) 式的  $P$  与 (1.41) 式的  $C$  代入 (1.43) 式，并设取  $C_{nc}$  的弹性值，得

$$\left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta_T} = - \frac{J}{c} + 16A^2 \frac{c^2 L \sigma_0^2}{Eb^3} \left( \frac{C_M}{C_{nc}} + 1 \right)$$

故

$$T = \frac{E}{\sigma_0^2} \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta_T} = - \frac{EJ}{\sigma_0^2 c} + 16A^2 \frac{c^2 L}{b^3} \left( \frac{C_M}{C_{nc}} + 1 \right) \quad (1.44)$$

若试验机为刚性 ( $C_M = 0$ )，则有

$$T = - \frac{EJ}{\sigma_0^2 c} + 16A^2 \frac{c^2 L}{b^3}$$

但若试验机为柔性，则  $C_M \rightarrow \infty$ ， $T \rightarrow \infty$ 。故理想塑性材料到达极限状态以后，若试验机为柔性（即控制载荷），则一旦起裂必定同时失稳。这再次说明加载系统的柔度  $C_M$  对于裂纹稳定性的重要性。

#### 4. 试验验证

Paris, Tada, Zahoor 与 Ernst<sup>[116]</sup> 等人对三点弯曲试件的稳定条件  $T < T_R$  ((1.16) 式) 进行了试验验证。试验用的材料为 ASTM-A471 转子钢 Ni-Cr-Mo-V，试验温度为 130℃ 与 230℃，取  $\sigma_0$  为材料的屈服极限与强度极限的平均值，材料的撕裂模量为

$$T_R = \frac{E}{\sigma_0^2} \left( \frac{dJ_R}{da} \right)_c \approx 36$$

试件的几何尺寸为

$$L = 8 \text{ 英寸} \approx 203 \text{ mm}, \quad c = 1 \text{ 英寸} \approx 25.4 \text{ mm}$$

$$B \text{ (宽度)} = \frac{1}{2} \text{ 英寸} \approx 12.7 \text{ mm}$$

无量纲参数

$$\omega = \frac{c}{J_{1c}} \left( \frac{dJ_R}{da} \right)_c \approx 15$$

试验的装置如图1.8, 用线性可变差动变压器 (LVDT) 测量位移, 试验机本身的刚度很大, 将试件与一弹簧梁串联, 通过改变弹簧梁的尺寸来调节  $C_M$  值, 从而改变 (1.44) 式的  $T$  值。一共试验了15个试件, 它们按下式定义的等效长度范围为

$$L_{eq} = L \left( \frac{C_M}{C_{nc}} + 1 \right) = 203 \sim 1930 \text{ mm}$$

试验结果见图1.9, 图中横坐标表示按 (1.44) 式计算的  $T$  值, 纵坐标表示材料的撕裂模量  $T_R$ , “●” 点表示按试验判断为稳定, “○” 点表示按试验判断为不稳定。判断的原则如图1.10所示。图1.10 (a) 所示的情况, 随着总位移

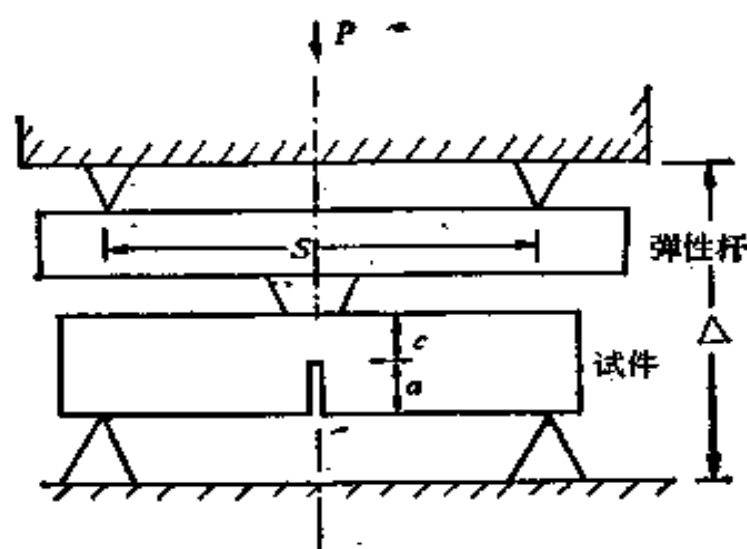


图 1.8 稳定性试验装置[116]

$\Delta_T$  的增长, 尽管在起裂以后荷载  $P$  值逐渐减小, 这种情况仍判断为稳定 (因为试验过程中控制的是位移  $\Delta_T$ , 而不是荷载  $P$ )。图1.10 (b) 所示的情况则判断为不稳定, 因为当总位移到达某值时, 由于裂纹长度突然急剧增加而引起荷载  $P$  突然减少 (反映在图中平行于  $P$  轴的竖线段)。由图1.9

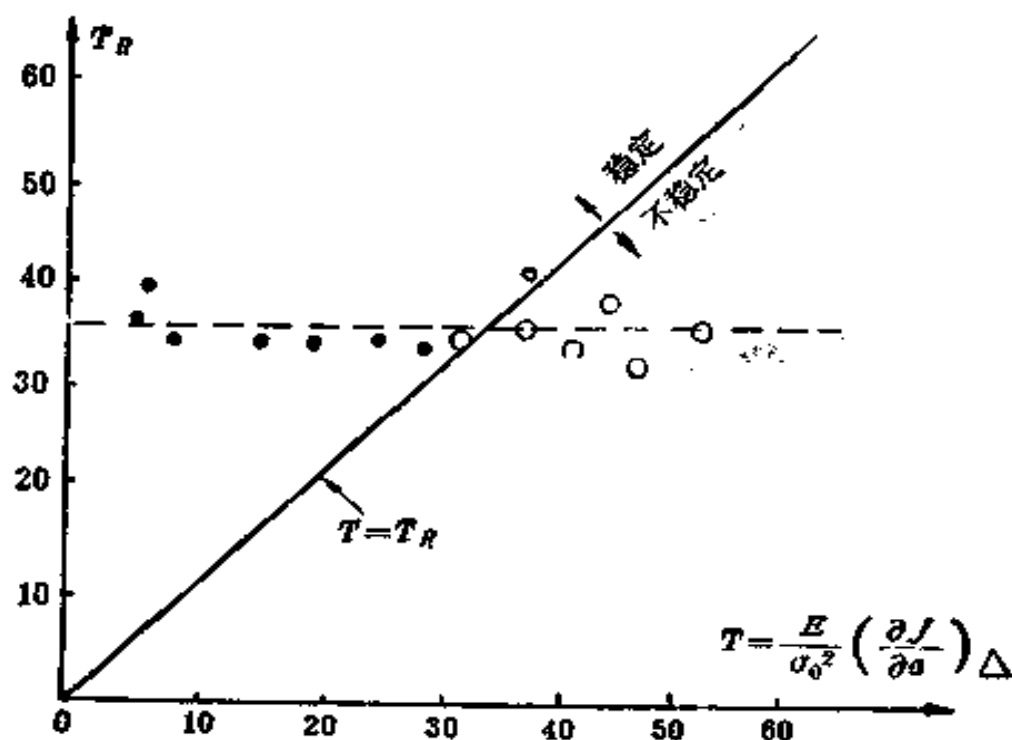


图 1.9 稳定性试验结果[116]

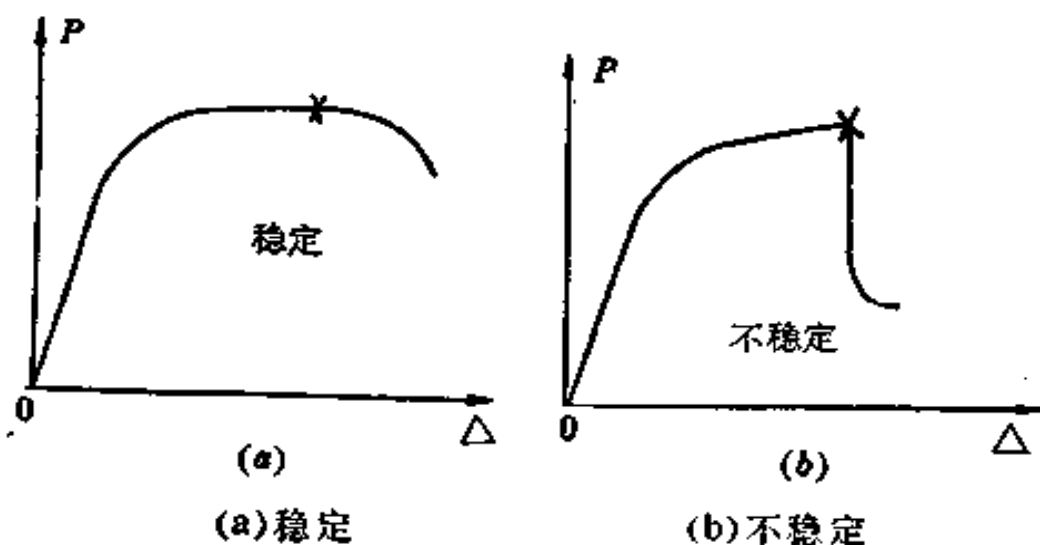


图 1.10 稳定与不稳定

可见试验判断的稳定性与按 (1.16) 式的理论判断 ( $T < T_R$  时稳定) 相符。此外 Wilkowski, Zahoor 与 Kanninen<sup>[117; 118]</sup> 用 304 不锈钢管子的四点弯曲试验也进行了类似的  $J_R$  阻力曲线判断稳定的试验验证。

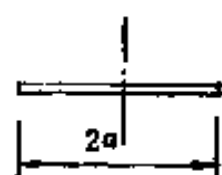


图 1.11

## 5. 算例

例一、具有一长为  $2a$  裂纹的无穷大板，在远处受有垂直于裂纹方向的应力  $\sigma^\infty$  (图 1.11)。

假设小范围屈服，故

$$J = \frac{K^2}{E} = \frac{\pi a}{E} (\sigma^\infty)^2$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{E}{\sigma_0^2} \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\Delta T} = \frac{E}{\sigma_0^2} \left( \frac{\partial J}{\partial a} \right)_{\sigma^\infty} \\ &= \pi \left( \frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right)^2 < 1 \end{aligned}$$

对于中等强度钢，通常撕裂模量  $T_R \geq 30$ ，故裂纹为稳定性的，这与第一章 § 4 算例的结论是一致的。

例二、设图 1.11 的无穷大板为幂硬化材料，其单向拉伸的应力应变关系为

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = a \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad a = 1$$

设板的宽度为  $2b$ ，韧带尺寸  $c = b - a$ 。由 Kumar 等人编的弹塑性断裂力学分析工程方法<sup>[101]</sup>，对于中心裂纹板

$$J = \sigma_0 \varepsilon_0 a \frac{c}{b} h_1 \left( \frac{a}{b}, n \right) \left( \frac{\sigma^\infty}{\sigma_0} \right)^{n+1}$$

设  $n = 10$ ，取 [101] 中平面应力情况的表 3-4，最小的  $a/b$

值:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{8}, \quad \frac{c}{b} = \frac{7}{8}$$

$$h_1\left(\frac{a}{b}, n\right) = 4.62$$

故

$$J \approx 4\sigma_0 \varepsilon_0 a \left( \frac{\varepsilon^\infty}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{n+1}{n}}$$

稳定条件为

$$T = 4 \left( \frac{\varepsilon^\infty}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} < T_R \approx 30 \quad (\text{假设})$$

即

$$\frac{\varepsilon^\infty}{\varepsilon_0} < 8$$

在实际问题中, 由于 $T$ 值过大(超过 $T_R$ )而失稳可能出现在荷载 $P$ 大或韧带尺寸 $c$ 小(见(1.40)式), 或者试验机过于柔性即 $C_M$ 大(见(1.44)式)的情况。

## § 2 对裂纹稳定扩展现象的宏观解释

韧性材料在起裂以后还要经过一个稳定扩展过程, 不断增加荷载或位移, 才能最后到达失稳断裂。这一现象的原因是由于裂纹一旦开始扩展以后, 其尖端附近的应力应变场奇异性比起裂以前的奇异性要弱得多。因此要裂纹在起裂以后持续扩展, 就必须继续增加荷载(或位移)。

那么静止裂纹与扩展裂纹尖端场奇异性为何有强弱的差



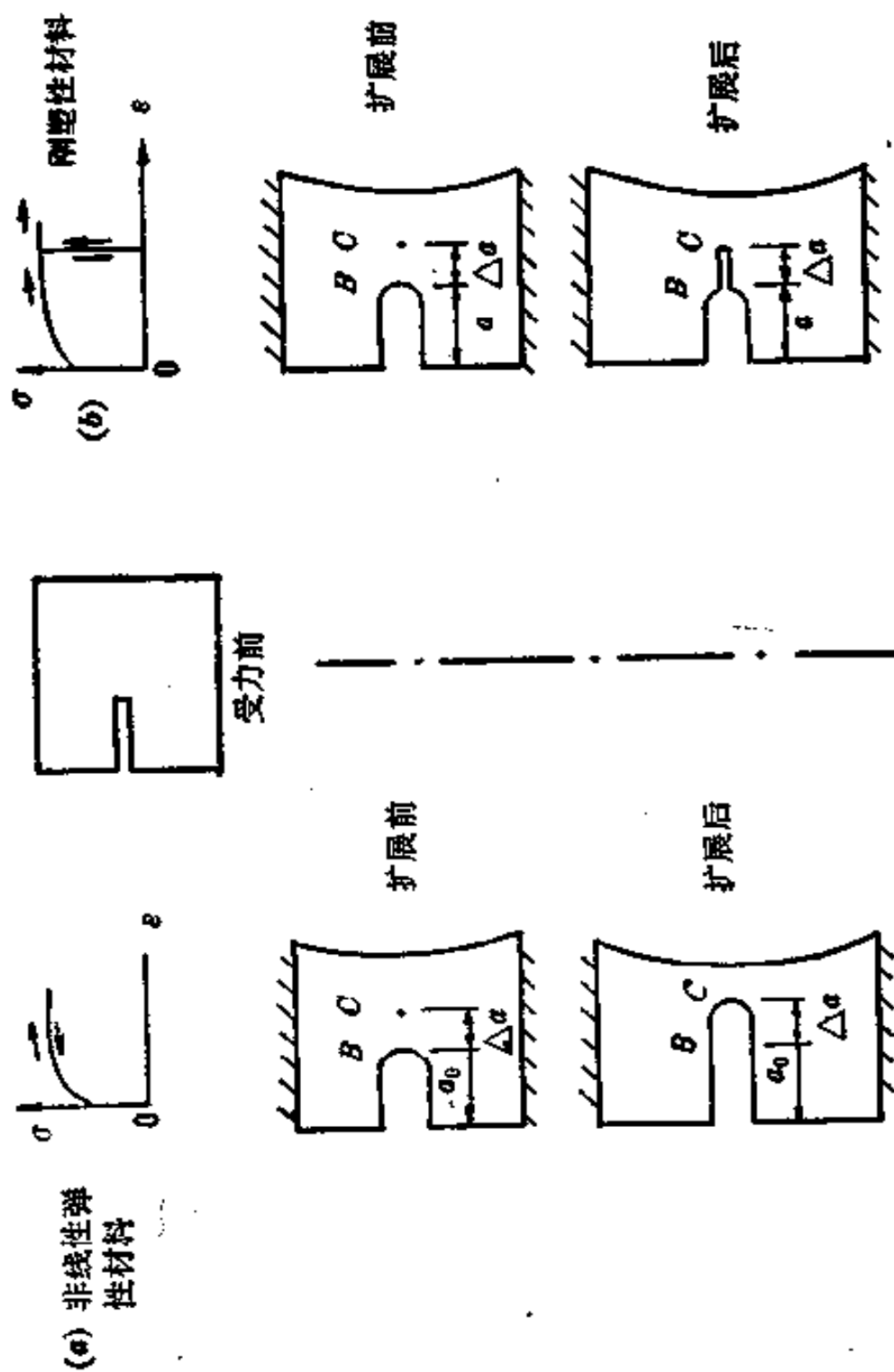


图 2.1 非线性弹性材料与刚性材料比较

别呢？Drucker 与 Rice<sup>[119]</sup> 以下面的例子来说明造成这种奇异性差别的原因是塑性变形的不可逆性。

假想有两种材料在单向拉伸时有相同的应力应变曲线，但其中一种材料为非线性弹性（图2.1(a)），而另一种材料为弹塑性（图2.1(b)）。以两种材料制成完全相同的两个带裂纹试件（裂纹长度为 $a_0$ ），以控制试验机夹头位移的方式加载（相当于 $G_M = 0$ ）。此时两试件的裂纹尖端变形场应是相同的（因为无卸载）。现在假定用刀片把图中裂纹延长线上的BC段（长度为 $\Delta a$ ）切开，同时保持夹头位移不变。那么非线性弹性材料的试件将对它内部的应变分布进行调整，到达与原裂纹长度为 $a_0 + \Delta a$ 的试件受载后的状态相同的状态。应变的高度集中将从裂纹尖端B点转移到扩展后的新的尖端C点。但是弹塑性材料的试件则不然，将刀片切开BC段以后，在新的尖端C点所产生的新的应变集中甚微。我们可以想象刚塑性材料这一极限情况来加以说明。对于刚塑性材料，我们可以先把夹头完全放松（即卸载），但并无应变恢复（因 $E = \infty$ ）。然后用刀片把卸载后的试件BC段切开；此时也不引起任何附加应变。因此，对于刚塑性材料，将刀片切开BC段（即裂纹扩展 $\Delta a$ ）将不引起应变集中于新的尖端C点。要维持在新尖端的应变集中，必须随着裂纹的扩展而不断增加夹头位移。对于弹塑性材料， $E$ 不是无穷大而是有限值，在裂纹扩展后新的尖端C处虽然有应变集中，但比非线性弹性材料（加载与卸载具有相同的切向模量 $E_t \ll E$ ）的应变集中弱得多。

这个例子说明弹塑性材料中裂纹稳定扩展的主要原因在于：裂纹尖端区域的塑性变形已经与试件边界（夹头）的位移及周围弹性区的变形相适应，裂纹向这塑性变形区扩展时应

变集中将比裂纹长度固定不变的情况集中于尖端的应变小得多。因此, Rice[120] 认为可逆的或弹性的变形起着破坏稳定性的作用, 而不可逆的或塑性的变形起着增加稳定性的作用。

### § 3 在理想弹塑性介质 中Ⅱ型裂纹的稳定扩展

在这一章中我们只研究裂纹的准静态扩展, 即假定扩展是缓慢的, 因而惯性力可以略去, 此时应力满足静平衡方程。

#### 1. 主塑性区中的应力应变场

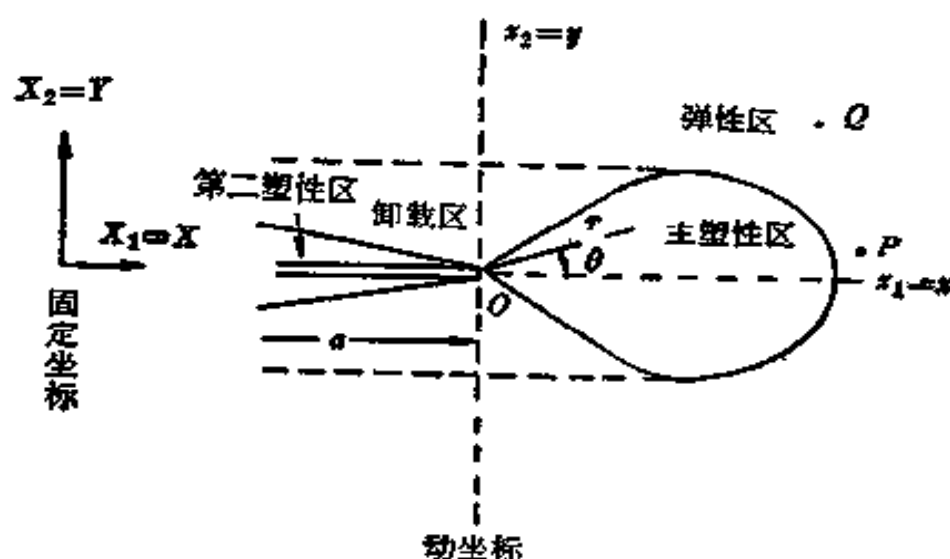


图 3.1 Ⅱ型扩展裂纹

如图3.1所示, 以  $X_1 = X$ ,  $X_2 = Y$  表示固定坐标, 而  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  表示以裂纹尖端为原点的动坐标。动坐标的原点随着裂纹的扩展而与尖端一起向前移动。动坐标与固定坐标的关系为

$$x = X - a(t), \quad y = Y \quad (3.1)$$

式中  $t$  表示, “时间”,  $a(t)$  的变化就等于裂纹扩展量。这里应注意, 对于无时间效应 (即无粘性) 的材料, 在研究稳定扩展过程时我们可以选择任意的随时间递增的参数作为 “时间” (例如可以取裂纹的长度当作时间, 此时  $\dot{a}(t) = da/dt = 1$ )。

图3.1中分为弹性区, 主塑性区, 卸载区与第二塑性区。一定的材料质点在平面上的位置是固定不变的。当裂纹扩展时, 各个区域向右推移, 同时区域 (和区域边界) 的形状与大小也不断地变化。设裂纹为水平的 (沿  $x$  轴), 当材料质点的部位很高 (或很低) 时, 例如图3.1中的  $Q$  点, 它有可能在整个稳定扩展过程中处于弹性。当材料质点的部位不很高 (或不很低) 时, 例如图3.1中的  $P$  点, 则从最初处于弹性, 经过塑性变形 (进入主塑性区), 卸载 (进入卸载区), 最后再次塑性变形 (进入第二塑性区)。

前已指出, 对于Ⅲ型静止裂纹, 第二章 § 5 (5.2) 式的塑性区应力解

$$\tau_r = 0, \quad \tau_\theta = \tau_0 \quad (3.2)$$

不仅适用于尖端附近的局部, 而且适用于全部塑性区。事实上, 第二章 § 3 的小范围屈服解与 § 4 的大范围屈服解都证明这一结论。它们的差别只在于塑性区的形状有所不同而已。

(3.2) 式的推导过程 (见第二章 § 3) 中只用到平衡条件与屈服条件。所以它也适用于裂纹准静态扩展情

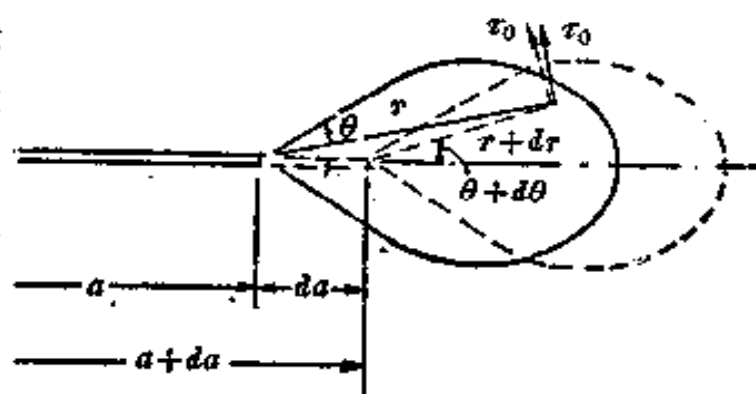


图 3.2 Ⅲ型裂纹扩展时主塑性区内应力变化

况。不仅适用于尖端附近的局部，而且也适用于全部的主塑性区。但应注意，对于一定的材料质点，随着裂纹的扩展，剪应力的 $\tau_0$ 虽然不变，但方向却是变化着的。图3.2中实线与虚线各表示裂纹扩展 $da$ 之前与之后的情况。

设

$$a = a(t)$$

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} \quad (3.3)$$

以后以“ $\cdot$ ”表示对时间 $t$ 的物质导数：

$$(\dot{\phantom{x}}) = \frac{\partial(\phantom{x})}{\partial t} \Big|_{x,y} = \frac{d(\phantom{x})}{dt} \quad (3.4)$$

则由(1.3)式

$$\dot{r} = -\dot{a}\cos\theta, \quad \dot{\theta} = \dot{a}\frac{\sin\theta}{r} \quad (3.5)$$

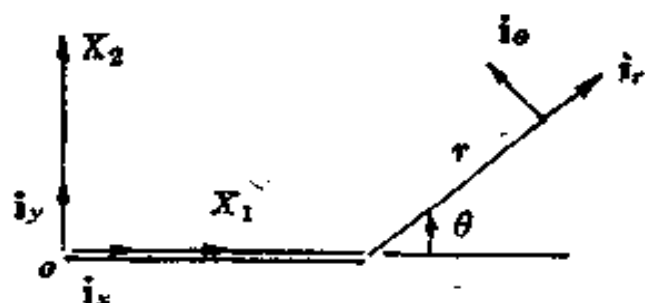


图 3.3 单位矢量

现在计算主塑性区内应力与应变矢量对时间 $t$ 的物质导数。以 $i_x, i_y$ 表示笛卡儿坐标中的单位矢量； $i_r, i_\theta$ 表示极坐标（以扩展裂纹尖端为极点）中的单

位矢量。由图3.3，它们之间的关系为

$$\begin{aligned} i_r &= i_x \cos\theta + i_y \sin\theta \\ i_\theta &= -i_x \sin\theta + i_y \cos\theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

取(3.6)式对时间的物质导数，并利用(3.5)第二式，可得

$$\dot{i}_r = \frac{\sin\theta}{r} \dot{a} i_\theta, \quad \dot{i}_\theta = -\frac{\sin\theta}{r} \dot{a} i_r \quad (3.7)$$

主塑性区内的应力矢量为

$$\tau = \tau_r \mathbf{i}_r + \tau_\theta \mathbf{i}_\theta = \tau_\theta \mathbf{i}_\theta \quad (3.8)$$

记应力率（应力矢量对时间的物质导数）矢量为  $\pi$ ，利用 (3.7) 第二式可得

$$\pi = \dot{\tau} = \dot{\tau}_\theta \mathbf{i}_\theta = -\dot{\tau}_\theta \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{i}_r \quad (3.9)$$

注意：在极坐标中应力率矢量的分量不等于应力分量对时间的变化率（ $\pi_r \neq \dot{\tau}_r$ ， $\pi_\theta \neq \dot{\tau}_\theta$ ）。

以  $w$  表示沿垂直于图3.1—图3.3平面方向的位移。则应变矢量为

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_x \mathbf{i}_x + \gamma_y \mathbf{i}_y = \gamma_r \mathbf{i}_r + \gamma_\theta \mathbf{i}_\theta \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{i}_y = \frac{\partial w}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta = \nabla w \end{aligned} \quad (3.10)$$

以  $\dot{w}$  表示位移率，则应变率矢量为

$$\begin{aligned} \Gamma = \dot{\gamma} &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \mathbf{i}_y = \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \\ &= \nabla \dot{w} \end{aligned}$$

同样也要注意：在极坐标中应变率矢量的分量不等于应变分量的变化率（ $\Gamma_r \neq \dot{\gamma}_r$ ， $\Gamma_\theta \neq \dot{\gamma}_\theta$ ）即

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial r} \neq \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^{\cdot}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} \neq \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^{\cdot}.$$

通常可把应变分为弹性与塑性两部分：

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p \quad (3.12)$$

其中弹性部分满足弹性虎克定律：

$$\gamma^e = \frac{1}{G} \tau \quad (3.13)$$

按塑性流动理论（或称增量理论），变形律为

$$\begin{aligned}\Gamma &= \dot{\gamma} = \dot{\gamma}^e + \dot{\gamma}^p = -\frac{1}{G} \dot{\tau} + a\lambda \tau \\ &= -\frac{a}{G} \frac{\tau_0 \sin \theta}{r} \dot{r} + a\lambda \tau_0 \dot{\theta}\end{aligned}\quad (3.14)$$

式中  $a\lambda$  为塑性流动因子。取 (3.14) 式之分量等式：

$$\begin{aligned}\Gamma_r &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} = -\frac{a}{G} \frac{\tau_0 \sin \theta}{r} \\ \Gamma_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} = a\lambda \tau_0\end{aligned}\quad (3.15)$$

(3.14) 式右端第一项表示弹性应变率，沿  $r$  方向，而第二项表示塑性应变率，沿  $\theta$  方向。故

$$\Gamma_r = \Gamma_r^e = -\gamma_0 a \frac{\sin \theta}{r}, \quad \Gamma_\theta^e = 0 \quad (3.16)$$

式中  $\gamma_0 = \tau_0/G$  及

$$\Gamma_r^p = 0, \quad \Gamma_\theta = \Gamma_\theta^p = a\lambda \tau_0 \quad (3.17)$$

应变率协调条件为

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \Gamma_\theta) = 0 \quad (3.18)$$

由 (3.16) 式可知弹性应变率  $\Gamma_r^e$ ， $\Gamma_\theta^e$  不满足协调条件 (3.18)，因此，为了保证应变率协调，必然出现塑性应变率，而且塑性流动因子  $a\lambda$  必须保证 (3.17) 式的塑性应变率与 (3.16) 式的弹性应变率叠加以后的应变率  $\Gamma_r = \Gamma_r^e + \Gamma_r^p$ ， $\Gamma_\theta = \Gamma_\theta^e + \Gamma_\theta^p$  满足协调条件 (3.18) 式。由此得到  $\lambda$  所必须满足的方程：

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( -\gamma_0 \frac{\sin \theta}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} (r a \lambda \tau_0) = 0$$

化简后成为

$$\frac{\partial}{\partial r} (r\lambda\tau_0) = -\gamma_0 \frac{\cos\theta}{r}$$

其解为

$$r\lambda\tau_0 = -\gamma_0 \cos\theta \ln r + F'(\theta, a)$$

式中  $' = \frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $F(\theta, a)$  是一个待定的函数。由此, 利用

(3.15) — (3.17) 式, 得到应变率

$$\Gamma_r = \Gamma_r^e - a\gamma_0 \frac{\sin\theta}{r} \quad (a) \quad (3.19)$$

$$\Gamma_\theta = \Gamma_\theta^p = a\lambda\tau_0 = -a\gamma_0 \frac{\cos\theta}{r} \ln r + \frac{a}{r} F'(\theta, a) \quad (b)$$

与弹性应变率 (3.19a) 式相比, 可知塑性应变率 (3.19b) 式比弹性应变率的奇异性更强, 因为多出一个  $\ln r$  因子。由 (3.19) 式积分可得位移率:

$$\dot{w} = -a\gamma_0 \sin\theta \ln r + aF(\theta, a) \quad (3.20)$$

根据  $w$  对于  $\theta$  的反对称性,  $\dot{w}|_{\theta=0} = 0$ , 故

$$F(0, a) = 0$$

在上面得到的应变率 (3.19) 式与位移率 (3.20) 式中包含着一个待定函数  $F(\theta, a)$ 。这个函数我们在这里不能确定, 因为: (1) 我们这里只考虑主塑性区, 而没有把其他所有的区以及远离裂纹尖端的外部场一并考虑; 而且,

(2) 我们在这里完全没有涉及到稳定扩展准则 (见下文第 3 小节)。换句话说, 没有涉及到裂纹在起裂以后继续扩展满足什么条件, 因此我们这里不可能定出全部的稳定扩展过程, 因而也不能确定函数  $F(\theta, a)$ 。但是这个函数并不影响它所出现的方程中的主奇异项。例如, 在 (3.19) 的  $\Gamma_\theta$  式中与 (3.20)  $\dot{w}$  式中主奇异项各为



$$-a\gamma_0 \frac{\cos\theta}{r} \ln r \text{ 与 } -a\gamma_0 \sin\theta \ln r$$

而  $F(\theta, a)$  只出现在非主奇异项中。

为了要求位移  $w$ ，我们先要注意到在稳定扩展过程中  $w$  应该是坐标与时间的函数，因为它不仅随位置而且随时间而变化。在动坐标  $(x, y)$  或  $(r, \theta)$  中， $\dot{w}$  可表示为

$$w = w(x, y, a) = w(r, \theta, a) \quad (3.21)$$

式中右端的两个  $w(\dots)$  表示不同的函数。求 (3.21) 式对时间的物质导数，并利用 (3.5) 式，得到位移率  $\dot{w}$  通过  $w$  的表示式：

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{\partial w}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial w}{\partial a} \dot{a} \\ &= -a \cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} + a \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \dot{a} \frac{\partial w}{\partial a} \\ &= -\dot{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \dot{a} \frac{\partial w}{\partial a} \end{aligned} \quad (3.22)$$

代入 (3.20) 式，得

$$\begin{aligned} -\cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial a} &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial a} \\ &= -\gamma_0 \sin\theta \ln r + F(\theta, a) \end{aligned} \quad (3.23)$$

尽管  $F(\theta, a)$  尚未定出，但是我们可以由 (3.23) 式求出位移  $w$  的主奇异项。(3.23) 式右端的主奇异项为

$$-\gamma_0 \sin\theta \ln r, \text{ 而左端的主奇异项为 } -\cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} \text{ 与 } \left( \frac{\sin\theta}{r} \right)$$

$\times \frac{\partial w}{\partial \theta}$ 。因此我们可以看出  $w$  的奇异性至少为  $r \ln r$ 。我们不妨

暂且试设  $w$  的主奇异项为

$$w = -\gamma_0 h(\theta) r \ln r \quad (3.24)$$

代入 (3.23) 式, 取其主奇异项, 得

$$\cos\theta h(\theta) - \sin\theta h'(\theta) = -\sin\theta$$

其解为

$$h(\theta) = C \sin\theta + \sin\theta \ln \tan \frac{\theta}{2}$$

$$h'(\theta) = C \cos\theta + \cos\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + 1$$

当  $\theta \rightarrow 0$  时,  $h'(\theta) \rightarrow \infty$ , 故  $\gamma_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \rightarrow \infty$  (当  $r$  为有限时), 在裂纹延长线上处处  $\gamma_\theta$  均为  $\infty$ , 这是不合理的, 因此 (3.24) 式所假定的主奇异项不正确。正确的解法应该设  $w$  为

$$w = \gamma_0 r \left\{ h_1(\theta) \left( \ln \frac{1}{r} \right)^2 + h_2(\theta) \ln \frac{1}{r} + O(1) \right\} \quad (3.25)$$

式中  $h_1(\theta)$  与  $h_2(\theta)$  均为  $\theta$  的奇函数。因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} = \gamma_0 \left\{ h_1(\theta) \left( \ln \frac{1}{r} \right)^2 + \left[ h_2(\theta) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2h_1(\theta) \right] \ln \frac{1}{r} + O(1) \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \gamma_0 \left\{ h_1'(\theta) \left( \ln \frac{1}{r} \right)^2 + \right. \\ \left. h_2'(\theta) \ln \frac{1}{r} + O(1) \right\} \end{aligned}$$

代入 (3.23) 式, 分别取  $\left( \ln \frac{1}{r} \right)^2$  与  $\ln \frac{1}{r}$  项的系数, 得

$$-\cos\theta h_1(\theta) + \sin\theta h_1'(\theta) = 0 \quad (3.27a)$$

$$-\cos\theta\{h_2(\theta)-2h_1(\theta)\}+\sin\theta h_2'(\theta)=\sin\theta \quad (3.27b)$$

由 (3.27a) 解出 (以  $C_1$  表示积分常数)

$$h_1(\theta)=C_1\sin\theta$$

设  $h_2(\theta)$  在  $\theta=0$  处为正则

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{h_2(\theta)}{\theta} = h_2'(0)$$

则 (3.27b) 式除以  $\theta$  后, 令  $\theta \rightarrow 0$ , 可得  $C_1 = \frac{1}{2}$ , 故

$$h_1(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta \quad (3.28a)$$

代入 (3.27b) 后, 可解出  $h_2(\theta)$ :

$$h_2(\theta) = \sin\theta \left[ C_2 - 2\ln \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (3.28b)$$

将 (3.27), (3.28) 式代入 (3.25) 式, 得

$$\begin{aligned} w = \gamma_0 r \left\{ \frac{1}{2} \sin\theta \left( \ln \frac{1}{r} \right)^2 + \sin\theta \right. \\ \left. \times \left( C_2 - 2\ln \cos \frac{\theta}{2} \right) \ln \frac{1}{r} + O(1) \right\} \quad (3.29) \end{aligned}$$

式中  $C_2$  表示积分常数, (3.29) 式右端第一项为位移  $w$  的主项。只要材料是理想弹塑性, 不论稳定扩展准则为何, 位移  $w$  的主项都是这同一形式。不过这里没有涉及到在扩展裂纹尖端附近 (3.29) 式中主项占主导地位的区域范围大小问题。由于理想弹塑性材料在起裂时尖端附近的  $w \sim O(1)$ , 因此在刚刚开始起裂时这一主项的主导区范围可能很小, 随着裂纹的扩展而逐渐加大。

由 (3.29) 式可求出在主塑性区内的应变分量, 即

(3.26) 式:

$$\begin{aligned}\gamma_r &= \frac{\partial w}{\partial r} = \gamma_0 \left\{ \frac{1}{2} \sin \theta \left( \ln \frac{1}{r} \right)^2 + \sin \theta \right. \\ &\quad \times \left[ C_2 - 1 - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \right] \ln \frac{1}{r} + O(1) \left. \right\} \\ \gamma_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \gamma_0 \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \left( \ln \frac{1}{r} \right)^2 + \right. \\ &\quad + \left[ \cos \theta \left( C_2 - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \right) + 1 - \cos \theta \right] \\ &\quad \times \ln \frac{1}{r} + O(1) \left. \right\} \quad (3.30)\end{aligned}$$

直角坐标中相应的剪应变分量易求出得到:

$$\begin{aligned}\gamma_x &= \gamma_0 \left\{ -\sin \theta \ln \frac{1}{r} + O(1) \right\} \\ \gamma_y &= \gamma_0 \left\{ \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{r} \right)^2 + \left( C_2 - 1 - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \theta \right) \ln \frac{1}{r} + O(1) \right\} \quad (3.30)'\end{aligned}$$

最后指出, 上面所得到的在稳定扩展过程中主塑性区内的应变与位移解是根据塑性流动理论而导出的, 所以扩展裂纹尖端附近的应变场奇异性比静止裂纹尖端场奇异性要弱得多。但是, 如果我们采用塑性形变理论, 且假定无卸载 (当然这是不符合实际情况, 因而是错误的), 那么情况就完全不同, 得到的尖端应变场奇异性与静止裂纹尖端场奇异性相同。按塑性形变理论, 不但弹性应变, 而且塑性应变本身 (而不是塑性应变率) 也与剪应力成正比; 也就是说, 应变只与即时的应力状态有关, 而与应力历史无关。因此, 与第

二章静止裂纹情况的 (3.14) 式推导过程完全相同, 可得到

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p = \gamma_0 \frac{R(\theta, a)}{r} \mathbf{i}_\theta \quad (3.31)$$

式中  $R(\theta, a)$  为主塑性区沿  $\theta$  方向的尺寸 (图3.4)。按弹性虎克定律

$$\gamma^e = \gamma_0 \mathbf{i}_\theta$$

故

$$\gamma^p = \gamma_0 \left( \frac{R(\theta, a)}{r} - 1 \right) \mathbf{i}_\theta$$

由 (3.7) 式  $\dot{\mathbf{i}}_\theta = -\dot{a} \sin \theta \mathbf{i}_r / r = O\left(\frac{1}{r}\right)$ , 故塑性应变  $\gamma^p$  的奇异项为  $1/r$  (同静止裂纹), 而塑性应变率  $\dot{\gamma}^p$  的奇异性则为  $1/r^2$ 。而实际情况, 按照塑性流动理论, 塑性应变  $\gamma^p$  奇异性应为  $[\ln(1/r)]^2$  [见 (3.30) 式], 而塑性应变率  $\dot{\gamma}^p$  奇异性则应为  $(1/r) \ln(1/r)$  [见 (3.19) 式]。Hutchinson<sup>[121]</sup> 认为: 对比例变形, 弹塑性材料的反应与非线性弹性材料的反应相同; 但对非比例变形, 则弹塑性材料抵抗变形的能力高于非线性弹性材料。因此, 扩展裂纹尖端应变水平低于静止裂纹尖端应变水平, 原因就在于扩展裂纹尖端附近的非比例变形。

## 2. 定常扩展状态的主塑性区解

在前面第 1 小节讨论的是非定常稳定扩展的一般情况, 即随着裂纹的扩展, 尖端场 (包括塑性区的大小, 应力、应变、位移场等) 还不断地在变化。有一个重要的特殊情况即定常扩展状态。它的特点是: 对于随着扩展裂纹尖端一起前进的观察者说来, 尖端场 (包括塑性区大小, 应力、应变、位移场等) 是不变化的。以  $f$  代替任何一个物理量 (可以是标量、矢量或张量), 在非定常扩展情况下  $f$  应是动坐标 ( $x$ ,  $y$  或  $r$ ,

θ) 与时间  $t$  (或  $a$ ) 的函数。

$$f = f(x, y, a) \quad (3.32)$$

例如, (3.21) 式的位移  $w$  就是这种形式。而在定常扩展情况下,  $f$  只与  $x, y$  有关, 而与  $a$  无关, 即

$$f = f(x, y) \quad (3.33)$$

利用动坐标与固定坐标的关系 (3.1) 式, 上式又能写作,

$$f = f(X - a, Y) \quad (3.33)'$$

式中  $a = a(t)$ 。也就是说, 对于固定的 (不随扩展裂纹尖端一起前进的) 观察者说来, 尖端场是保持不变地向前平移着的, 任何物理量  $f$  本来应是固定坐标  $X, Y$  与 “时间”  $a$  三个变量的函数, 但是  $X$  与  $a$  总组合为  $X - a$ , 使得  $f$  实际上为  $X - a$  与  $Y$  两个变量的函数, 如 (3.33)' 式。

稳定扩展过程经过一定的裂纹扩展以后, 可能逐渐接近于定常扩展状态。所以定常扩展状态代表着稳定扩展过程的一个终极状态。当然这个终极状态也可能是实际上不能达到的, 因为在达到这个终极状态以前裂纹可能已经失稳了 (这当然与加载条件, 例如试验机的柔性有关系)。但是定常扩展状态的重要意义不仅在于此。下面将可看到, 定常扩展状态与非定常扩展状态下裂纹尖端场的主奇异项是相同的。

由 (3.33) 或 (3.33)' 式, 任一物理量  $f$  对时间的物质导数为

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x, y} = -\dot{a} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.34)$$

式中  $\partial f / \partial x$  表示  $\partial f(x, y) / \partial x$ 。(3.34) 式表示定常扩展状态的重要特征, 以后我们称之为定常条件。由于在定常扩展状态 (假定裂纹向右扩展), 对于任何物质质点说来, 它右侧的质点现在的状态代表它的过去, 而它左侧的质点现在

的状态则代表它的将来。因此，对时间的导数与对空间（即对坐标  $x$ ）的导数二者之间有着必然的联系，如 (3.34) 式。作为例子，主塑性区内的应力场 (3.8) 式属于定常场。见 (3.9) 式，而

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\tau_0 \mathbf{i}_\theta) = \tau_0 \frac{\partial}{\partial x}(-\sin\theta \mathbf{i}_x + \cos\theta \mathbf{i}_y) \\ &= \tau_0(-\cos\theta \mathbf{i}_x - \sin\theta \mathbf{i}_y) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \tau_0 \mathbf{i}_r \frac{\sin\theta}{r}\end{aligned}$$

因为  $\partial\theta/\partial x = -\sin\theta/r$ 。容易验证， $\tau$  满足定常条件 (3.34) 式。但是，我们所指的定常状态，要求不仅应力，而且应变，位移等一切的物理量都满足定常条件 (3.34) 式。

现在我们来求 I 型裂纹定常扩展状态的主塑性区内应变与位移解（应力解已见 (3.8) 式）。对于定常扩展状态，由  $w$  的定常条件

$$\dot{w} = -\dot{a} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.35)$$

利用 (3.35) 式，应变率分量 (3.15) 与 (3.19) 式成为（除以  $-\dot{a}$  后）

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\dot{a}} \Gamma_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \gamma_0 \frac{\sin\theta}{r} \\ -\frac{1}{\dot{a}} \Gamma_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\lambda \tau_0 \\ &= \gamma_0 \frac{\cos\theta}{r} \ln r - \frac{1}{r} F'(\theta)\end{aligned} \quad (3.36)$$

式中由于定常条件， $F'(\theta, a)$  与  $a$  无关，改记作  $F'(\theta)$ 。

(3.20) 式除以  $-\dot{a}$  后，则成为

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_0 \sin \theta \ln r - F(\theta) \quad (3.37)$$

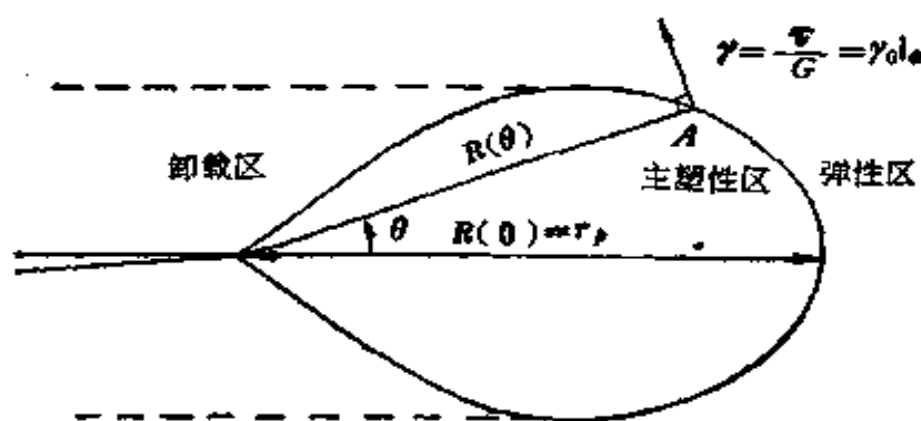


图 3.4 定常扩展状态的主塑性区

设定常扩展状态主塑性区的边界为

$$r = R(\theta) \quad (3.38)$$

在主塑性区与弹性区的交界线上任一点  $A$  处, 应力与应变应连续, 故

$$\gamma_A = \frac{1}{G} \tau|_A = \gamma_0 i_\theta = \gamma_0 [-\sin \theta i_x + \cos \theta i_y]$$

即

$$\gamma_x|_A = -\gamma_0 \sin \theta, \quad \gamma_y|_A = \gamma_0 \cos \theta \quad (3.39)$$

将 (3.37) 式代入 (3.39) 第一式,

$$\gamma_0 \sin \theta \ln R(\theta) - F(\theta) = -\gamma_0 \sin \theta$$

由此可得  $F(\theta)$  通过  $R(\theta)$  表示式:

$$F(\theta) = \gamma_0 \sin \theta [1 + \ln R(\theta)]$$

回代入 (3.37) 式, 得剪应变分量

$$\gamma_x = -\gamma_0 \sin \theta \left\{ 1 + \ln \frac{R(\theta)}{r} \right\} \quad (3.40)$$

利用变形协调方程



$$\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} \quad (3.41)$$

将 (3.40) 式代入后, 可求剪应变分量  $\gamma_y$ 。

现在我们只求定常扩展状态下在裂纹延长线 ( $\theta = 0$ ) 上的  $\gamma_y$ 。此时, 我们有

$$\gamma_x = 0, \quad \gamma_y = \gamma_\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

(3.41) 式成为

$$\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_x}{\partial \theta} \quad (\theta = 0)$$

将 (3.40) 式的  $\gamma_x$  代入, 并令  $r_p$  为沿裂纹延长线上的主塑性区尺寸,  $r_p = R(0)$  (见图 3.4) 得到<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial r} = -\frac{\gamma_\theta}{r} \left[ 1 + \ln \frac{r_p}{r} \right] \quad (\theta = 0) \quad (3.42)$$

将上式沿着裂纹延长线 ( $\theta = 0$ ) 对  $r$  积分, 得到在裂纹延长线上的  $\gamma_\theta$  (即  $\gamma_y$ ) 分布:

$$\gamma_\theta = \gamma_0 \left[ -\ln r + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 \right] + C_1 \quad (\theta = 0) \quad (3.43)$$

式中  $C_1$  为积分常数, 其值可利用在裂纹延长线 ( $\theta = 0$ ) 上弹塑性交界处 ( $r = r_p$ ) 的应变连续条件

$$\gamma_\theta |_{r=r_p; \theta=0} = \gamma_0$$

定出。将 (3.43) 式代入, 得

$$C_1 = \gamma_0 [1 + \ln r_p]$$

因此 (3.43) 式成为

1) 因当  $\theta = 0$ ,  $\gamma_\theta = \tau_0/G$ , 故  $\partial \gamma_\theta / \partial r = \partial \gamma_\theta^p / \partial r$ 。

$$\gamma_\theta = \gamma_0 \left[ 1 + \ln \frac{r_p}{r} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 \right] \quad (\theta = 0) \quad (3.43)'$$

将 (3.40) 式的  $\gamma_x$ , (3.43)' 式的  $\gamma_\theta$  ( $\theta = 0$ ) 同第 1 小节 (3.30)' 式的  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$  (令  $\theta = 0$ ) 比较, 可知定常扩展状态与非定常扩展应变分量的主奇异项相同, 因而奇异性也相同, 比静止裂纹情况应变的  $1/r$  阶奇异性微弱得多。

在本小节中, 上面的分析是建立在裂纹处于定常扩展状态的假定上的。事实上, 裂纹从起裂时的初始状态须经过一定的过渡阶段才能达到这个定常状态 (如前指出, 也可能在达到定常状态之前就已失稳)。而且我们假定物体的边界足够远, 尺寸为  $r_p$  的主塑性区完全被包含在外部的弹性区之内而未触及边界。也就是说, 我们所研究的是“限制塑性” (Contained plasticity) 的情况。

此外, 我们这里完全没有涉及到具体材料的断裂性质 (准则), 例如裂纹何时起裂、何时到达定常扩展状态等问题。我们在这里只明确了以下的问题:

如果裂纹是静止的, 那么塑性区的应变分布如 (3.31) 式 (即第二章 (3.14) 式)。至于塑性区的大小与形状 (塑性区边界  $r = R(\theta)$ ) 则取决于外界的条件。例如, 如果是小范围屈服情况, 则塑性区为一圆, 圆直径大小见第二章 (3.16) 式:

$$\bar{r}_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K}{\tau_0} \right)^2 = \frac{2}{\pi} \frac{J}{\tau_0 \gamma_0} \quad (3.44)$$

式中利用了关系式  $J = K^2/(2G)$ ,  $r_p$  上面的一横表示静止裂纹。

但是, 如果裂纹处于定常扩展状态, 则裂纹延长线上的

应变分布如 (3.43)' 式。至于塑性区的形状与大小也取决于外界条件。但目前即便是最简单的理想塑性材料Ⅱ型定常扩展裂纹的小范围屈服情况，亦无解析解。

Chitale与McClintock<sup>(122)</sup> 用差分数值方法求解了上述问题，得到主塑性区沿裂纹延长线的尺寸  $r_p$  与静止裂纹的 (3.44) 式相差只在5%以内。故可设

$$r_p \approx \bar{r}_p = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K}{\tau_0} \right)^2 = \frac{2}{\pi} \frac{J}{\tau_0 \gamma_0} \quad (3.45)$$

(3.45) 式表示若要维持Ⅱ型裂纹在屈服限为  $\tau_0$  的理想塑性材料中作定常扩展时，就力学的平衡、变形协调与变形律的要求（不涉及到材料的断裂准则和特性）而言，外界的  $K$  场<sup>1)</sup> 与主塑性区大小  $r_p$  的关系。

因此在同一个外部  $K$  场之内，定常扩展状态（以下标 *ss*—*steady state* 表示）的裂纹与静止裂纹（以下标 *stat*—*stationary* 表示）前方同一距离  $r$  处应变的比值为（设  $r_p \approx \bar{r}_p$ ）：

$$\begin{aligned} \frac{(\gamma_\theta)_{ss}}{(\gamma_\theta)_{stat}} &= \frac{\gamma_0 \left[ 1 + \ln \frac{r_p}{r} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 \right]}{\gamma_0 \frac{r_p}{r}} \\ &= \frac{r}{r_p} \left[ 1 + \ln \frac{r_p}{r} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 \right] \quad (3.46) \end{aligned}$$

(3.46) 式表示在图3.5上。

### 3. 稳定扩展准则

对于静止裂纹说来，我们要确定它何时起裂，就需要

1) 小范围屈服情况下，裂纹处于外界的  $K$  场中扩展。

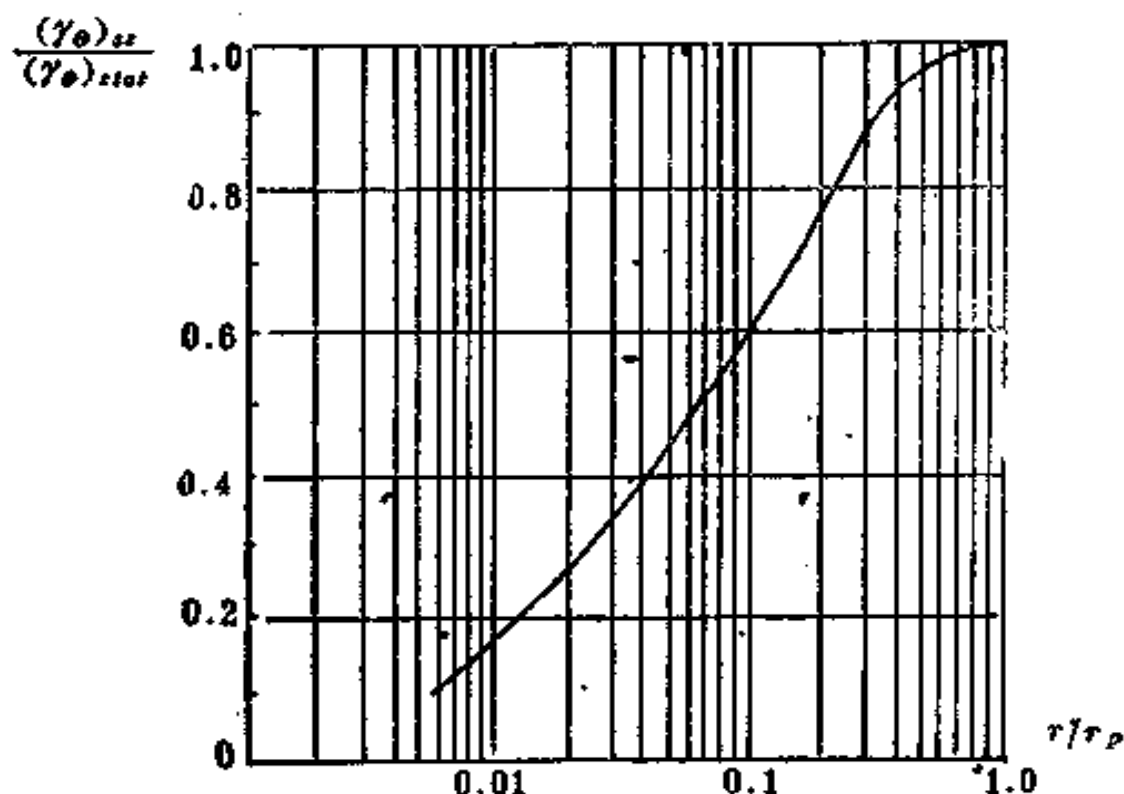


图 3.5 定常扩展状态与静止状态裂纹前方的应变比值

一个断裂准则（起裂）。只要裂纹尖端附近的场是一个单参数场（例如  $K$  场， $J$  场），那么很自然这个单参数（例如  $K$ ， $J$ ）必然同时就是断裂参数。在这个意义下，以适当方式定义的开口位移（COD），或  $J$  作为准则，在本质上是一致的，因为对于一定的材料在 COD 与  $J$  之间有一定的关系（见第二章 § 8），虽然这个关系目前还没有研究得很清楚，因而还不很肯定。最能反映客观实际的断裂准则，要求对于不同的构件构形、不同加载方式（弯曲或拉伸，平面应变或平面应力）与不同的屈服范围（小范围或大范围屈服）的普遍情况下，它应是一个材料常数。当我们还没有找到能满足上述普遍要求的准则时，有时我们不得已对使用条件加以限制，例如对平面应变情况的断裂准则是一个值，而对平面应

力情况则是另一个独立的值。

至于扩展裂纹，则裂纹尖端场从起裂以后到失稳以前是在变化着的，根本不是单参数场。在这个变化过程中，如果尖端附近的某一个物理量始终保持着常数，那么我们就取这个量为稳定扩展准则的参量，它就决定了整个的稳定扩展过程。

McClintock 与 Irwin<sup>[123]</sup>对Ⅲ型裂纹曾建议采用裂纹尖端前方一定距离  $\rho_s$  处的塑性应变值作为稳定扩展准则的参量，即它在裂纹扩展整个过程中保持常数：

$$(\gamma_s^p)_{r=\rho_s} = \gamma_f^p = \beta \gamma_0 \quad (3.47)$$

即

$$(\gamma_s)_{r=\rho_s} = \alpha \gamma_0, \quad \alpha = \beta + 1 \quad (3.47)'$$

式中  $\rho_s$ ,  $\beta$  (或  $\alpha$ ) 均为材料常数。这样我们就可以把起裂时的条件和定常扩展时的条件联系起来。

将 (3.47) 式或 (3.47)' 式用作起裂条件，由第三章 (3.14) 式得到

$$(\gamma_s^p)_{r=\rho_s} = \gamma_0 \left( \frac{\bar{r}_f}{\rho_s} - 1 \right) = \beta \gamma_0$$

假设小范围屈服情况，将式中的塑性区尺寸  $\bar{r}_f$  用 (3.44) 式代入后，得到起裂时的 J 值：

$$J_c = \frac{\pi}{2} (\beta + 1) \gamma_0 \tau_0 \rho_s = \frac{\pi}{2} \alpha \gamma_0 \tau_0 \rho_s \quad (3.48)$$

同样，将 (3.47) 式或 (3.47)' 式作定常扩展条件，由 (3.43)' 式得到

$$(\gamma_0^p)_{r=r_s} = \gamma_0 \left[ \ln \frac{r_p}{\rho_s} + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p}{\rho_s} \right)^2 \right] = \beta \gamma_0$$

假设小范围屈服情况，以(3.45)式的 $r_p$ 代入后，可解出定常扩展状态的 $J$ 值

$$J_{ss} = \frac{\pi}{2} \tau_0 \gamma_0 \rho_s \exp[\sqrt{2\beta+1} - 1] \quad (3.49)$$

由(3.49)式与(3.48)式得到维持裂纹定常扩展所需 $J_{ss}$ 值与起裂的 $J_c$ 值之比：

$$\begin{aligned} \frac{J_{ss}}{J_c} &= \frac{1}{\beta+1} \exp[\sqrt{2\beta+1} - 1] \\ &= \frac{1}{\alpha} \exp[\sqrt{2\alpha-1} - 1] \end{aligned} \quad (3.50)$$

此比值只与材料常数 $\alpha$ 有关， $\alpha$ 值也是材料韧性的一个标志。比值 $J_{ss}/J_c$ 随 $\alpha$ 的变化示于图3.6。

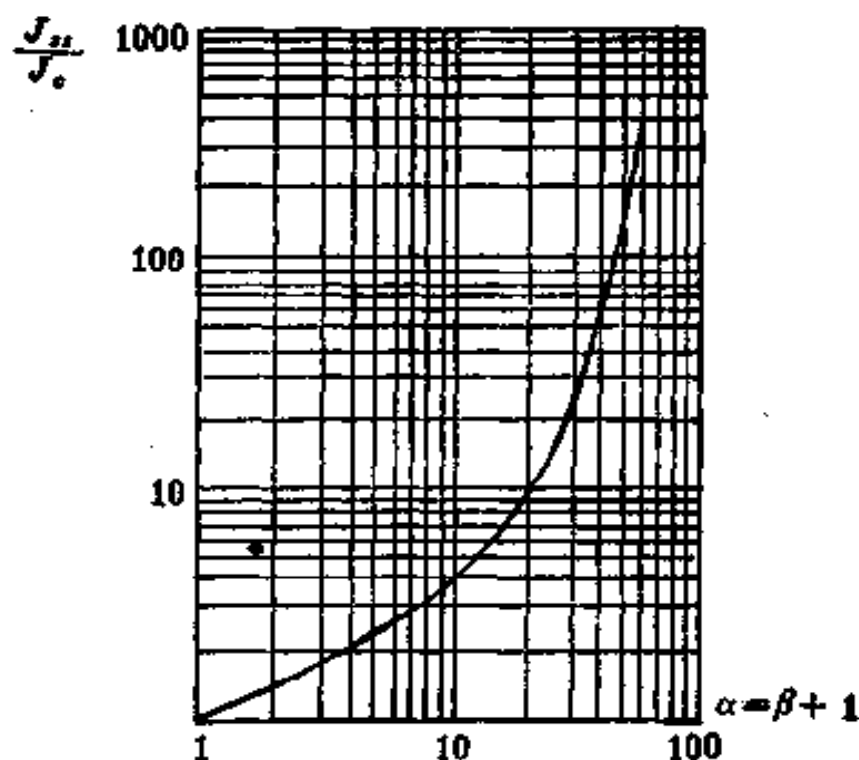


图 3.6  $J_{ss}/J_c$  比值 $\alpha$ 随的变化

上面我们把稳定断裂准则 (3.47) 或 (3.47)' 用于稳定扩展过程的两个极端状态, 即最初的起裂状态与最终的定常扩展状态。实际上, 这个准则还完全决定了稳定扩展的过程。

#### 4. 稳定扩展过程

这里我们应用稳定断裂准则 (3.47) 或 (3.47)' 来研究在小范围屈服情况下稳定扩展的全过程。此时塑性区的大小与形状都随  $a$  而变化, 沿  $\theta$  方向的塑性区尺寸应记作  $R(\theta, a)$ , 见图 3.7。沿裂纹延长线 ( $\theta = 0$ ) 的塑性区尺寸则为

$$r_p(a) = R(0, a)$$

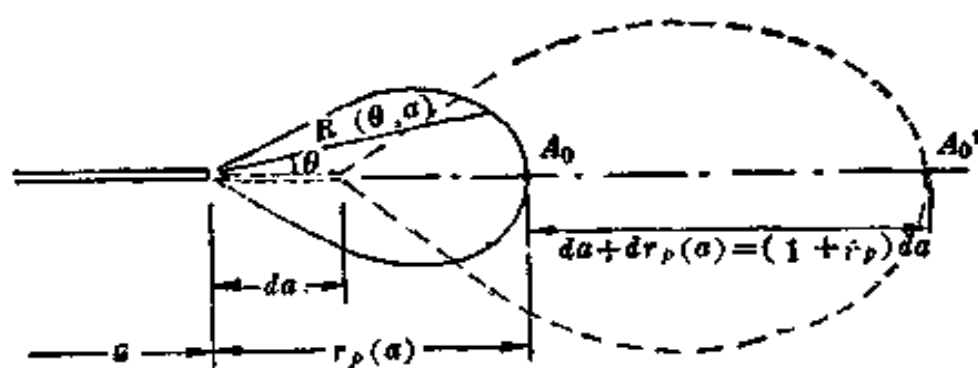


图 3.7 稳定扩展过程中的主塑性区

现在来计算裂纹延长线上弹塑性区交界点  $A_0$  ( $\theta = 0$ ,  $r = r_p(a)$ ) 的应变率。由 (3.19) 式, 令  $\theta = 0$ , 得

$$\frac{1}{a} \Gamma_c = -\gamma_0 \frac{1}{r} \ln r + \frac{1}{r} F'(0, a) \quad (\theta = 0) \quad (3.51)$$

在  $A_0$  处有 (令  $r = r_p$ )

$$\frac{1}{a} (\Gamma_c)_{A_0} = -\gamma_0 \frac{1}{r_p} \ln r_p + \frac{1}{r_p} F'(0, a)$$

解出  $F'(0, a)$ , 并代入 (3.51) 式, 得

$$\frac{1}{\dot{a}}\Gamma_{\theta} = \gamma_0 \frac{1}{r} \ln \frac{r_p}{r} + \frac{1}{\dot{a}} \frac{r_p}{r} (\Gamma_{\theta})_{A_0} \quad (\theta = 0) \quad (3.52)$$

式中  $(\Gamma_{\theta})_{A_0}$  表示  $A_0$  质点的应变率。由于在裂纹扩展时裂纹延长线上各点的  $\theta$  方向保持不变，故

$$\Gamma_{\theta} = \dot{\gamma}_{\theta} \quad (\theta = 0) \quad (3.53)$$

在时刻  $a$ ，弹塑性交界处  $A_0$  的剪应变  $\gamma_{\theta}$  值等于  $\gamma_0$ 。在下一时刻  $a + da$ ，即裂纹扩展  $da$  以后， $A_0$  点位于主塑性区内部，而弹塑性交界点则移至  $A_0'$ ，那时  $A_0'$  点的剪应变  $\gamma_{\theta}$  值等于  $\gamma_0$ ，而  $A_0$  点的剪应变则超过  $\gamma_0$ 。下面我们推导  $A_0$  质点的应变率  $(\Gamma_{\theta})_{A_0}$  与塑性区尺寸的变化率  $dr_p/da$  之间的关系（见下面的 (3.59) 式）。

我们考察在裂纹延长线上弹塑性区交界点。在不同的时刻，这一交界点不是同一个质点，但是在交界点处的应变  $\gamma_{\theta}$  值恒等于  $\gamma_0$ ：

$$\gamma_{\theta}(\theta = 0, r = r_p(a)) \equiv \gamma_0 \quad (3.54)$$

故交界点应变  $\gamma_{\theta}$  的变化率恒为零：

$$\frac{D\gamma_{\theta}(0, r_p(a))}{Dt} = 0 \quad (3.55)$$

$$\text{即} \quad \dot{a} \frac{D\gamma_{\theta}(0, r_p(a))}{Da} = 0 \quad (3.55)'$$

(3.55) 式左端的变化率可称为“随动变化率”或“随动导数”，它与“物质变化率”或“物质导数” $\dot{\gamma}_{\theta}$  不同，切勿混淆。物质变化率  $\dot{\gamma}_{\theta}$  是着眼于同一物质质点，它是同一物质质点的应变对时间的变化率；而随动变化率  $D\gamma_{\theta}/Dt$  着眼于在裂纹延长线上弹塑性区交界点，而不是同一个物质质点，它是在不同时刻占有该交界点位置的不同质点的应变（恒等于



$\gamma_0$ ) 对时间的变化率 (恒等于 0)。由图 3.7, 两相邻时刻  $a$  与  $a+da$  弹塑性区交界点  $A_0$  与  $A'_0$  间之距离为

$$A_0A'_0 = da + dr_p(a) = \left( 1 + \frac{dr_p}{da} \right) da$$

因此应变的随动变化率与物质变化率之间存在着以下的关系:

$$\frac{D\gamma_\theta(0, r_p(a))}{Dt} = (\Gamma_\theta)_{A_0} + \left( \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial r} \right)_{A_0} \left( 1 + \frac{dr_p}{da} \right) \dot{a} \quad (3.56)$$

将 (3.55) 式代入 (3.56) 式, 得

$$\frac{1}{\dot{a}} (\Gamma_\theta)_{A_0} + \left( \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial r} \right)_{A_0} \left( 1 + \frac{dr_p}{da} \right) = 0 \quad (3.57)$$

但

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \\ &= -\frac{1}{r} \gamma_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_r}{\partial \theta} \end{aligned}$$

且在弹塑性边界上  $\gamma_r = 0$ ,  $\gamma_\theta = \gamma_0$ , 故

$$(\gamma_\theta)_{A_0} = \gamma_0, \quad \left( \frac{\partial \gamma_r}{\partial \theta} \right)_{A_0} = 0$$

故

$$\left( \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial r} \right)_{A_0} = -\frac{1}{r_p} \gamma_0 \quad (3.58)$$

将 (3.58) 式代入 (3.57) 式, 得

$$\frac{1}{\dot{a}} (\Gamma_\theta)_{A_0} = \gamma_0 \frac{1}{r_p} \left( 1 + \frac{dr_p}{da} \right) \quad (3.59)$$

这就是  $(\Gamma_\theta)_{A_0}$  与  $dr_p/da$  之间的关系式。

将 (3.59) 式代入 (3.52) 式, 得到裂纹延长线上的应变率

$$\begin{aligned}\frac{1}{\dot{a}}\dot{\gamma}_\theta &= \gamma_0 \frac{1}{r} \ln \frac{r_p(a)}{r} + \gamma_0 \frac{1}{r} \left(1 + \frac{dr_p}{da}\right) \\ &= \gamma_0 \frac{1}{r} \left[1 + \ln \frac{r_p(a)}{r}\right] + \gamma_0 \frac{1}{r} \frac{dr_p}{da} \\ &\quad (\theta = 0)\end{aligned}\quad (3.60)$$

此式乘以  $da$  以后, 并利用 (3.53) 式得

$$d\gamma_\theta = \gamma_0 \frac{1}{r} \left[1 + \ln \frac{r_p(a)}{r}\right] da + \gamma_0 \frac{1}{r} dr_p \quad (\theta = 0) \quad (3.61)$$

此式的物理意义是: 当裂纹扩展  $da$  同时塑性区尺寸 (沿裂纹延长线) 增大  $dr_p$  时, 在裂纹延长线上任一物质质点的应变增量  $d\gamma_\theta$  等于两部分之和:

1) 第一部分, 即 (3.61) 式右端的第一项 (含  $da$ ), 此项的形式与定常扩展状态  $d\gamma_\theta$  的形式相同, 因为对于定常扩展状态, 由定常条件 (3.34) 式与  $(\partial\gamma_\theta/\partial r)_{\theta=0}$  的 (3.42) 式, 在裂纹延长线上 ( $\theta=0$ , 故  $x$  方向即  $r$  方向) 某一定物质质点的应变增量为

$$d\gamma_\theta = \dot{\gamma}_\theta dt = -\frac{\partial\gamma_\theta}{\partial r} da = \frac{\gamma_\theta}{r} \left[1 + \ln \frac{r_p}{r}\right] da \quad (\theta = 0) \quad (3.62)$$

将 (3.61) 式右端第一项与定常扩展状态的 (3.62) 式比较, 可见它们的形式完全相同, 差别只在于定常扩展状态的  $r_p$  为恒值 (塑性区尺寸不变地向前平移), 而 (3.61) 式右端的第一项的  $r_p(a)$  则为即时的  $r_p$  值。因此 (3.61) 式右端的第一项可以称为“准定常扩展项”, 它表示假想保持当时

的塑性区尺寸 $r_p(a)$ 不变地定常扩展所引起的应变增量（实际上 $r_p(a)$ 是变化着的，扩展是非定常的）。

2) 第二部分，即(3.61)式右端的第二项(含 $dr_p$ )，此项的形式与静止裂纹情况完全相同。当裂纹静止时，随着荷载(或位移)的增加，塑性区尺寸不断扩大，由第二章(3.14)式可得到应变增量 $d\gamma_\theta$ 与塑性区尺寸增量 $dr_p$ 间的关系：

$$d\gamma_\theta = \gamma_0 \frac{1}{r} dr_p \quad (\theta = 0) \quad (3.63)$$

因此(3.61)式右端的第二项可称为“静止裂纹项”。它表示假想裂纹静止于当时的状态而不再继续扩展，由于塑性区尺寸增大而引起的应变增量（实际上裂纹不是静止的，而是扩展着的）。

(3.61)式表示在稳定扩展过程中裂纹延长线上质点的应变增量等于“准定常扩展项”与“静止裂纹项”的叠加。

在稳定扩展过程中塑性区尺寸 $r_p$ 是在变化着的。(3.44)式与(3.45)式表明在小范围屈服情况的稳定扩展过程的初始与终了，即起裂时与定常扩展时，塑性区尺寸 $r_p$ 与当时的 $J$ 值满足近似相同的关系。在小范围屈服情况下，对稳定扩展过程的数值计算<sup>[124, 125]</sup>表明这同一关系不仅在起裂与定常扩展状态，而且对稳定扩展的整个过程都近似地满足，因此有

$$r_p = \frac{2}{\pi \tau_0 \gamma_0} J, \quad dr_p = \frac{2}{\pi \tau_0 \gamma_0} dJ \quad (3.64)$$

根据稳定扩展准则(3.47)式，利用(3.61)式与(3.64)式，可以计算在稳定扩展的整个过程中，为了要维持在裂纹尖端前方 $\rho$ 距离处塑性应变值恒为 $\gamma_p^*$ （即准则(3.47)式）， $J$ 从起裂的 $J_c$ 值开始，随裂纹扩展量 $\Delta a$ 而增长，直至定常

扩展状态  $J_{II}$  值的变化过程——即  $J$  阻力曲线。但是这个计算相当复杂，McClintock 与 Irwin<sup>[123]</sup> 及 Rice<sup>[36]</sup> 做了近似计算。

计算稳定扩展的全过程是很复杂的，但是计算在小范围屈服情况下 ( $J = J_c$ ) 时的  $(dJ/da)_c$  却不困难。有了  $(dJ/da)_c$  就可计算撕裂模量  $T_R$  (见 (1.15) 式)。

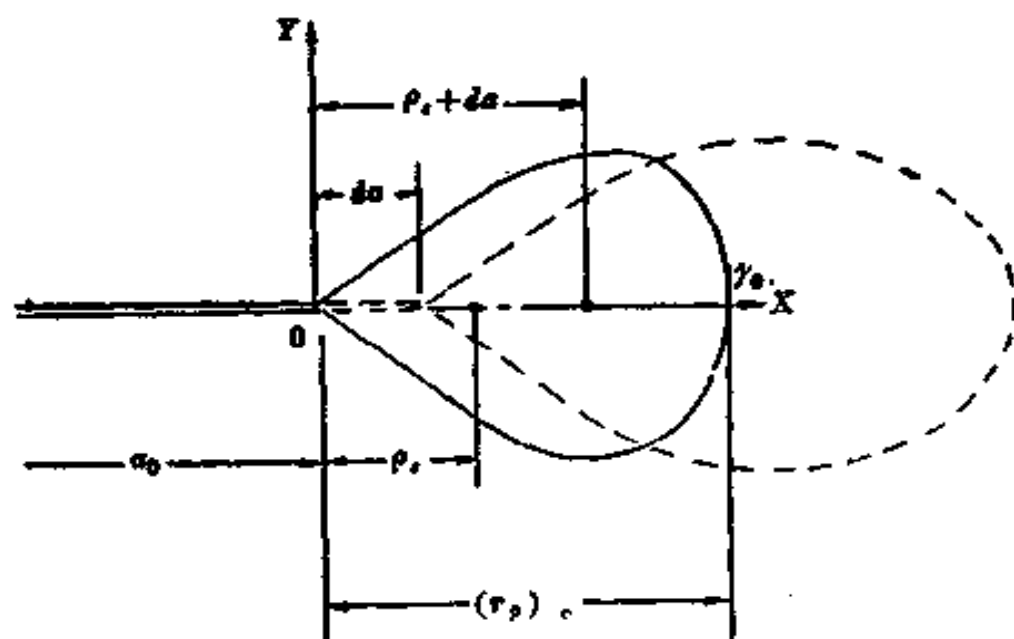


图 3.8 起裂后的第一步扩展

设在裂纹开始扩展即起裂之前  $a = a_0$ ，起裂时  $J = J_c$ 。由 (3.44) 式，在小范围屈服情况下起裂时的塑性区尺寸为

$$(r_p)_c = \frac{2}{\pi} \frac{J_c}{\tau_0 \gamma_0} \quad (3.65)$$

这里及以后用下标  $c$  表示起裂时的值。采用 McClintock 与 Irwin 基于尖端附近应变的准则 (3.47) 或 (3.47)'，则小范围屈服情况下起裂时的  $J_c$  值见 (3.48)。将 (3.48) 式  $J_c$  代入 (3.65) 式后，可得到起裂时的塑性区尺寸：

$$(r_p)_c = \alpha \rho_s \quad (3.66)$$

由第二章 (3.14) 式, 在起裂以前, 裂纹延长线上的应变  $\gamma_\theta$  与  $1/r$  成正比, 故在起裂时

$$\gamma_\theta = \gamma_s \frac{(\rho_s)_c}{r} \quad (\theta = 0), \text{ 当 } a = a_0$$

将 (3.66) 式代入, 得

$$\gamma_\theta = \alpha \gamma_0 \frac{\rho_s}{r} \quad (\theta = 0), \text{ 当 } a = a_0 \quad (3.67)$$

以起裂前的初始裂纹尖端为固定坐标  $X, Y$  的原点。则在扩展过程中裂纹延长线上的应变  $\gamma_\theta$  随着位置与时间而变化, 即

$$\gamma_\theta = \gamma_\theta(X, a(t)) \quad (\theta = 0) \quad (3.68)$$

为了使裂纹持续扩展, 由稳定扩展准则 (3.47)', 必须保证每时每刻在当时的裂纹尖端前方  $\rho_s$  距离处的剪应变为  $\alpha \gamma_0$ , 即

$$\gamma_\theta(a - a_0 + \rho_s, a) = \alpha \gamma_0 \quad (\theta = 0) \quad (3.69)$$

在起裂时 ( $a = a_0$ ), (3.69) 式要求

$$\gamma_\theta(\rho_s, a_0) = \alpha \gamma_0 \quad (3.70)$$

而在起裂后经过第一步的扩展  $da$ ,  $a = a_0 + da$ , (3.69) 式要求

$$\gamma_\theta(\rho_s + da, a_0 + da) = \alpha \gamma_0 \quad (3.71)$$

取 (3.71) 与 (3.70) 式之差, 得

$$\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial x}(\rho_s, a_0) da + \dot{\gamma}_\theta(\rho_s, a_0) dt = 0 \quad (\theta = 0)$$

式中  $\dot{\gamma}_\theta$  表示应变率  $\partial \gamma_\theta(X, a(t))/\partial t$ , 上式除以  $da$  后, 得

$$\frac{1}{a} \dot{\gamma}_\theta(\rho_s, a_0) = - \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial X}(\rho_s, a_0) \quad (\theta = 0) \quad (3.71)$$

用起裂时 ( $a = a_0$ ) 的应变分布 (3.67)  $\gamma_\theta$  式, 其中  $r = X$ , 代入上式右端, 得

$$\frac{1}{a} \dot{\gamma}_\theta(\rho_s, a_0) = \frac{\alpha \gamma_0}{\rho_s} \quad (\theta = 0) \quad (3.72)$$

此式之左端，由于 (3.53) 式  $\Gamma_\theta = \dot{\gamma}_\theta$  (当  $\theta = 0$ )，可由 (3.60) 式计算 (令  $r = \rho_s$ ,  $a = a_0$ )，于是得到

$$\gamma_0 \frac{1}{\rho_s} \left[ 1 + \ln \frac{(\dot{\gamma}_p)_c}{\rho_s} \right] + \gamma_0 \frac{1}{\rho_s} \frac{(\dot{\gamma}_p)_c}{a} = \frac{\alpha \gamma_0}{\rho_s}$$

式中，由 (3.66) 式， $(\dot{\gamma}_p)_c / \rho_s = a$ 。由此求出

$$\frac{1}{a} (\dot{\gamma}_p)_c = a - 1 - \ln a \quad (3.73)$$

将 (3.73) 式代入 (3.64) 式，可得  $J_R$  阻力曲线的初始斜率

$$\left( \frac{dJ_R}{da} \right) = \frac{\pi}{2} \tau_0 \gamma_0 \frac{1}{a} (\dot{\gamma}_p)_c = \frac{\pi}{2} \tau_0 \gamma_0 (a - 1 - \ln a) \quad (3.74)$$

故可定义材料的撕裂模量 (参考 (1.15) 式) 为

$$T_R = \frac{G}{\tau_0^2} \left( \frac{dJ_R}{da} \right)_c = \frac{\pi}{2} (a - 1 - \ln a) \quad (3.75)$$

同 (3.50) 式  $J_{ss}/J_c$  一样， $T_R$  亦只与材料常数  $a$  有关。

脆性材料相当于  $a = 1$ ，由 (3.50) 式与 (3.74) 式，

$$J_{ss} = J_c \quad T_R = 0$$

故材料一旦起裂，就立即失稳。韧性材料则相当于大的  $a$  值。当  $a$  值大时，由 (3.75) 式  $T_R$  与  $a$  近似地为线性关系，而由 (3.50) 式， $J_{ss}/J_c$  则与  $a$  为指数关系，随  $a$  而急剧增大。

由 (3.48)  $J_c$  式与 (3.74)  $(dJ_R/da)_c$  式可计算材料常数  $D$  (长度量纲，见 (1.6) 式)：

$$D = J_c / \left( \frac{dJ_R}{da} \right)_c = \rho_s \frac{a}{a - 1 - \ln a} \quad (3.76)$$

$\rho_s$  是稳定扩展准则 (3.47) 中考察其变形的点 (简称“准则点”) 离尖端的距离, 故可以把  $\rho_s$  看作是断裂过程区的尺寸。由 (3.76) 式可知当  $\alpha$  值不太小时,  $D$  亦属于同一量级的尺寸。

因此可以认为, McClintock 与 Irwin<sup>[123]</sup> 所建议的稳定扩展准则 (3.47) 是把宏观的断裂现象与断裂过程区的某些特性联系起来了。所以这样的准则称为 **近尖端断裂准则** (Near-tip fracture criterion)。(3.47) 式是一种基于变形的近尖端断裂准则, 以后我们还将讨论基于位移的近尖端准则。

最后指出,  $\alpha$  大时,  $T_R$  也大,  $J_{ss}/J_c$  更大。例如  $\alpha = 60$  时,  $T_R \approx 86$ ,  $J_{ss}/J_c \approx 335$ 。这个  $T_R$  值是实际可能遇见的, 但是此时在“准则点” ( $r = \rho_s$ ) 处的应变  $\alpha\gamma_0$  已经较大而不属于小变形。而上面的结果都是基于小变形的理论而得到的, 这样, 尖端附近 (包括“准则点”) 变形的计算会有一些误差, 但是近尖端断裂准则作为一个计算模型来预测断裂现象还是可以接受的。<sup>1)</sup>

按照 McClintock 与 Irwin 的基于变形的近尖端断裂准则 (3.47) 所得到的  $J_{ss}/J_c$  比值 (见 (3.50) 式) 与实际材料的数值 (例如,  $\approx 3$ ) 往往大到不切实际的程度, 估计原因可能在于:

(1) 材料具有硬化, 而且硬化是非各向同性的, 存在着鲍氏 (Bauschinger) 效应, 甚至后续屈服面还会出现角点, 这些因素都对断裂现象与过程产生影响; Wnuk 与 Mura 在 [126] 中对上述断裂的过程中材料韧度的变化现象从过程区的微结构效应出发作了一种解释。

---

1) 正好象线弹性断裂力学中的  $K$  场是按小变形理论导出的, 对于在尖端附近的大变形区已不适用, 但我们仍可用  $K$  准则作为计算模型。

(2) McClintock 与 Irwin 假定同一个近尖端断裂准则

(3.47) 既适用于起裂, 也适用于裂纹扩展。实际上, 对起裂与对裂纹扩展可能适用的不是同一个准则。例如, 对起裂与裂纹扩展的  $\alpha$  值可能不同。

在以上的推演过程中, 我们用到了小范围屈服 (SSY) 情况下塑性区尺寸  $r_p$  与  $J$  的近似关系 (3.64) 式, 因此所得结果只适用于小范围屈服情况。在大范围屈服 (LSY) 情况,  $r_p$  则不但与  $J$  有关, 还与试件构形、载荷大小、韧带尺寸等有关。这个关系还不清楚。这就是大范围屈服情况之所以复杂的原因之一。

## § 4 理想弹塑性材料 III 型定常扩展裂纹的 局部解<sup>[122, 127]</sup>

在前节 (§ 3) 中只得到了主塑性区的解, 这个解适用于主塑性区的全区。为了弄清楚扩展裂纹尖端附近的应力应变场, 我们不仅需要主塑性区, 而且也需要其他的区 (卸载区与第二塑性区, 见图 4.1) 内的解。由于裂纹表面是与第二塑性区毗连的, 所以如果我们要研究裂纹表面的位移与开口形状, 就必须先有第二塑性区的解。但是目前即使是对最简单的问题——理想弹塑性材料 III 型定常扩展裂纹——还没有解析解 (包括小范围屈服情况), 因此我们仅限于来求尖端附近各个区的局部解, 即各区当  $r \rightarrow 0$  时的渐近解。

图 4.1 (及图中的说明) 表示扩展裂纹周围的分区情况。下面我们先讨论基本方程, 连接条件, 然后再对各区进行求解。

### 1. 基本方程



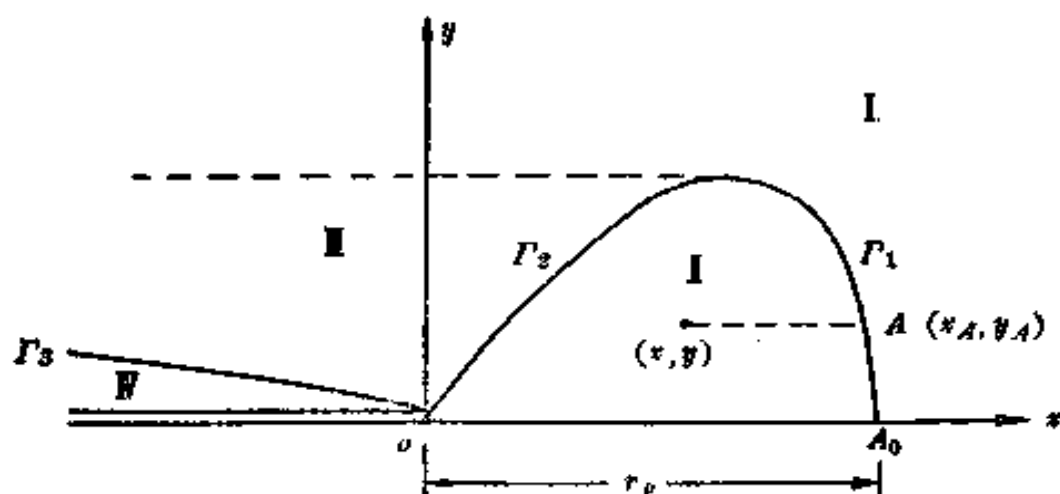


图 4.1 II型扩展裂纹问题的分区: I—弹性区, II—主塑性区 (第一塑性区), III—卸载区, IV—次塑性区 (第二塑性区)。

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 为各区的分界线

根据平衡方程

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0$$

可选择应力函数 $\phi(x, y, a(t))$ , 使

$$\tau_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \tau_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.1)$$

这样, 平衡方程就成为恒等式。

应变矢量 $\gamma$ 与位移 $w$ 之间的关系为

$$\gamma = \nabla w \quad (4.2)$$

其分量形式为

$$\gamma_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.2)'$$

或

$$\gamma_r = \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (4.2)''$$

按照“ $J_2$ 流动理论”（即基于Mises屈服条件的塑性流动理论），变形律应为

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p \quad (4.3)$$

其分量形式为  $\gamma_x = \gamma_x^e + \gamma_x^p, \gamma_y = \gamma_y^e + \gamma_y^p \quad (4.3)'$

$$\gamma^e = \frac{1}{G} \tau \quad (4.4)$$

其分量形式为

$$\gamma_x^e = \frac{1}{G} \tau_x, \quad \gamma_y^e = \frac{1}{G} \tau_y \quad (4.4)$$

$$\dot{\gamma}^p = \dot{\gamma}^p = \lambda \tau \quad \lambda \geq 0 \quad (4.5)$$

分量形式  $d\gamma_x^p = \lambda \tau_x dt, d\gamma_y^p = \lambda \tau_y dt \quad (4.5)'$

式中 $\lambda$ 为塑性流动因子，在卸载区与弹性区中 $\lambda = 0$ 。

下面我们假设裂纹处于定常扩展状态。为了方便起见，我们取 $dt = da$ ，即把裂纹扩展量取作“时间”增量，因此 $\dot{a} \equiv 1$ 。则定常条件（3.34）式可写作

$$\dot{f} = \frac{df}{da} = \frac{\partial f}{\partial a} \bigg|_{x, y} = - \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4.6)$$

这就是说，在定常扩展状态任何一个物理量 $f$ （标量、矢量或张量）对“时间”的物质导数（即变化率）正好等于 $f$ 对坐标 $x$ 的负导数。

由（4.5）式，（4.6）式可得

$$\frac{\partial \gamma_x^p}{\partial x} = -\lambda \tau_x, \quad \frac{\partial \gamma_y^p}{\partial x} = -\lambda \tau_y \quad (4.7)$$

对 $x$ 积分，得<sup>1)</sup>

$$\gamma_x^p = \int_x^{x_A} \lambda \tau_x dx, \quad \gamma_y^p = \int_x^{x_A} \lambda \tau_y dx \quad (4.8)$$

1) 如有应变间断，则相当于 $\lambda$ 包含有 $\delta$ 函数。

式中积分是沿着图4.1中平行于 $x$ 轴的直线 ( $y = \text{const}$ ) 进行的,  $x_A$ 表示主塑性区与弹性区交界线上 $A$ 点的坐标  $x_A = x_A(y)$ 。

如果我们用应力函数 $\phi$ 求解, 必须利用由 (4.2)' 消去位移 $w$ 后的变形协调方程 (简称协调方程)

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} = 0$$

以式 (4.3)' 的  $\gamma_x, \gamma_y$  代入, 并将弹性应变  $\gamma_x^e, \gamma_y^e$  利用 (4.1) 式与 (4.4)' 式, 通过应力函数  $\phi$  表示, 则协调方程变成

$$\frac{1}{G} \nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial x} \gamma_y^p + \frac{\partial}{\partial y} \gamma_x^p = 0 \quad (4.9)$$

对于弹性情况, 协调方程简化为调和方程,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.9')$$

有时我们为了方便, 我们不直接求解协调方程 (4.9) 本身, 而求解它的变化率, 也就是它对  $x$  的导数 (见定常条件 (4.6))。利用 (4.7) 式, 协调方程 (4.9) 对  $x$  的导数可以化成

$$\frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi - \lambda \nabla^2 \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (4.10)$$

它在极坐标中的形式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \nabla^2 \phi - \lambda \nabla^2 \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \\ - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (4.10')$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (4.11)$$

以后称 (4.10) 式或 (4.10)' 式为“协调方程率”。当然, 如果协调方程 (4.9) 成立, 则协调方程率 (4.10) 或 (4.10)' 必定成立。反之, 如果协调方程率 (4.10) 或 (4.10)' 成立, 则只能保证协调方程 (4.9) 左端仅为  $y$  的函数, 而未必为零, 即未必能保证协调方程 (4.9) 成立。作为未知函数  $\phi$  与  $\lambda$  的微分方程, 协调方程率 (4.10) 或 (4.10)' 的阶数当然比协调方程 (4.9) 的阶数高, 所以我们以后用求解协调方程率 (4.10) 或 (4.10)' 来代替求解协调方程 (4.9) 时, 就必须提补充的条件 (边界条件或连接条件), 以保证协调方程 (4.9) 成立。

在塑性区 (图 4.1 的 II 与 IV 区) 内恒满足 Mises 屈服条件:

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = \tau_0^2 \quad (4.12)$$

根据平衡方程 (或应力分量通过应力函数表示的方程 (4.1)) 与屈服条件 (4.12), 可以定出塑性区的内应力分布, 因此塑性区内的应力分布是“静定”的。

## 2. 连接条件

为了求解各区的应力函数  $\phi$  与塑性流动因子  $\lambda$ , 除了要满足前小节 (第 1 小节) 中的微分方程以外, 还必须满足一定的边界条件与连接条件。对于 III 型裂纹, 由于对  $x$  轴反对称性, 我们只需要考虑上半平面 (例如,  $y \geq 0$ ) 区域。因此  $\theta = 0$  与  $\theta = \pi$  两条射线是我们所研究区域的边界。在这边界上需要满足一定的边界条件: 在  $\theta = 0$  处, 由于反对称性,  $\tau_r = 0$ ; 在  $\theta = \pi$  处, 由于裂纹表面自由,  $\tau_\theta = 0$ 。

所谓连接条件是指相邻的不同区域交界线 (例如图 4.1 中

的 $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$ 、 $\Gamma_3$ ) 上所需要满足的某些物理量的连续(或间断)条件。

为了使连接条件能更简单地表达, 我们最好采用曲线坐标, 以使得区域交界线(一般是曲线)恰好就是一条坐标曲线。

### (1) 平面曲线坐标

以 $X$ ,  $Y$ 表示平面上的固定直角坐标, 则由下列函数关系:

$$X = X(\alpha, \beta), \quad Y = Y(\alpha, \beta) \quad (4.13)$$

或

$$\alpha = \alpha(X, Y), \quad \beta = \beta(X, Y) \quad (4.14)$$

可定义平面上的曲线坐标(图4.2)。

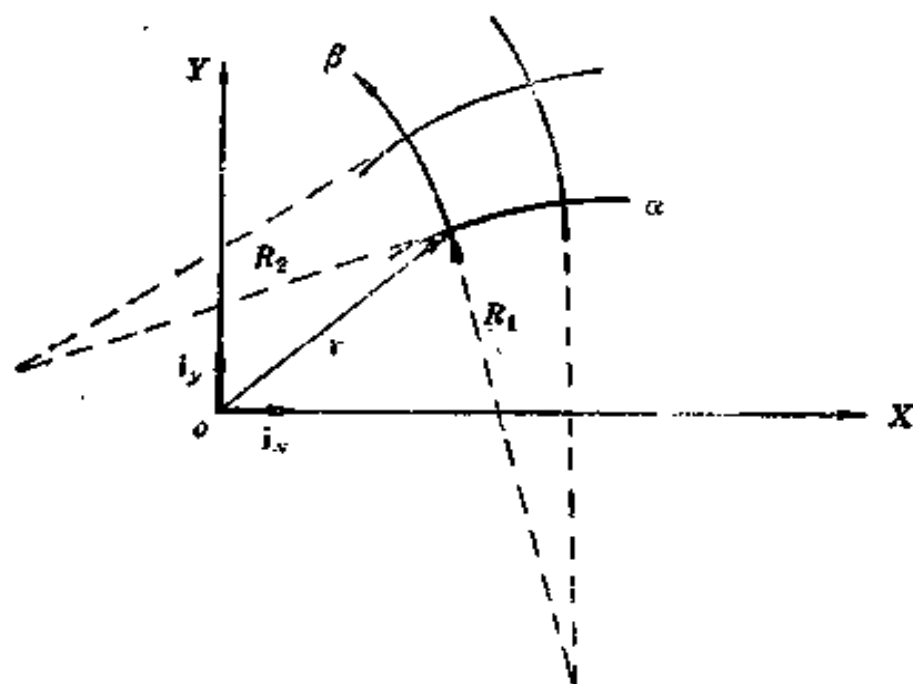


图 4.2 平面正交曲线坐标

定义 $\mathbf{r}$ 为平面上点的矢径

$$\mathbf{r} = X\mathbf{i}_X + Y\mathbf{i}_Y \quad (4.15)$$

式中 $\mathbf{i}_X, \mathbf{i}_Y$ 为沿直角坐标 $X, Y$ 方向的单位矢量。则沿曲线坐标 $\alpha, \beta$ 方向的单位矢量可用下式定义:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = A\mathbf{i}_\alpha, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = B\mathbf{i}_\beta \quad (4.16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \left( \frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right)^2 \\ B^2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \left( \frac{\partial X}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

$A$ 与 $B$ 即曲线坐标的Lamè参数, 它们与沿坐标曲线的弧长 $ds_\alpha, ds_\beta$ 有以下关系:

$$ds_\alpha = A d\alpha, \quad ds_\beta = B d\beta \quad (4.18)$$

以后假定 $\alpha, \beta$ 为正交曲线坐标 (图4.2),

故

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \frac{\partial X}{\partial \alpha} \frac{\partial X}{\partial \beta} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \frac{\partial Y}{\partial \beta} = 0 \quad (4.19)$$

即

$$\mathbf{i}_\alpha \cdot \mathbf{i}_\beta = 0$$

由于 $\mathbf{i}_\alpha, \mathbf{i}_\beta$ 为正交单位矢量, 它们对坐标 $\alpha, \beta$ 的导数有以下的关系:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{i}_\alpha &= 0 & (a) \\
 \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \beta} \cdot \mathbf{i}_\alpha &= 0 & (b) \\
 \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{i}_\beta}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{i}_\beta &= 0 & (c) \\
 \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{i}_\beta}{\partial \beta} \cdot \mathbf{i}_\beta &= 0 & (d) \\
 \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\alpha \cdot \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{i}_\beta}{\partial \alpha} &= 0 & (e) \\
 \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \beta} \cdot \mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\alpha \cdot \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{i}_\beta}{\partial \beta} &= 0 & (f)
 \end{aligned} \right\} (4.20)$$

由平面曲线曲率的定义及 (4.20) 式之 (a), (c), 可导出

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{R_1} \mathbf{i}_\beta & (a) \\
 \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{i}_\beta}{\partial \beta} &= -\frac{1}{R_2} \mathbf{i}_\alpha & (b)
 \end{aligned} \right\} (4.21)$$

式中  $R_1, R_2$  各为  $\alpha, \beta$  坐标曲线之曲率半径 (图4.2), 再利用 (4.20) 式之 (e), (f) 及 (4.21) 式之 (a), (b), 可得

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \beta} &= \frac{1}{R_2} \mathbf{i}_\beta & (c) \\
 \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{i}_\beta}{\partial \alpha} &= \frac{1}{R_1} \mathbf{i}_\alpha & (d)
 \end{aligned} \right\} (4.21)$$

由等式

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right)$$

即 
$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} (B \mathbf{i}_\beta) = -\frac{\partial}{\partial \beta} (A \mathbf{i}_\alpha)$$

取其沿  $\mathbf{i}_\alpha$  与沿  $\mathbf{i}_\beta$  之投影, 并利用 (4.21) 式可得

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (4.22)$$

又由等式

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \beta} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \alpha} \right)$$

利用 (4.21) 之 (a), (c), 它可写成

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{R_2} \mathbf{i}_\beta \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{A}{R_1} \mathbf{i}_\beta \right)$$

展开后, 可得

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{R_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{A}{R_1} \right) = 0 \quad (4.23)$$

利用 (4.22) 式, 上式可写作以下形式:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = 0 \quad (4.24)$$

或

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{1}{R_1} \right) + \left( -\frac{1}{R_2} \right)^2 + \left( -\frac{1}{R_1} \right)^2 = 0 \quad (4.25)$$

由等式  $-\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial \mathbf{i}_\beta}{\partial \beta} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial \mathbf{i}_\alpha}{\partial \alpha} \right)$ , 亦可得到相同的结果, 即

(4.23) 式, 或其它的形式 (4.24) 或 (4.25)。

以后我们常采用基于某曲线  $\Gamma$  的  $(n, s)$  坐标。设  $\Gamma$  为



某一已知曲线，例如某两相邻区域的分界线（在所研究时刻的分界线）。如图4.3所示，取 $\Gamma$ 的平行曲线（等距曲线）族与法线族为坐标线族。 $s$ 与 $n$ 各为沿 $\Gamma$ 曲线与沿法线的距离， $\theta(s)$ 表示法线与 $X$ 轴的夹角。 $n = \text{const}$ 为平行于 $\Gamma$ 的曲线，或称等距曲线。

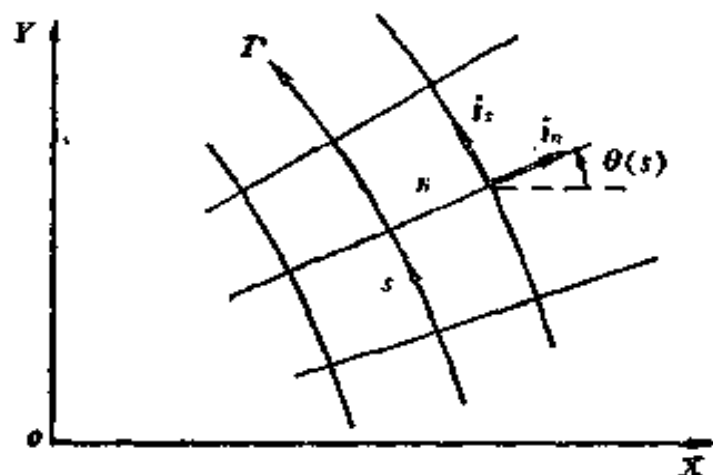


图 4.3  $n, s$ 坐标

把 $n, s$ 看作正交曲线坐标的特例，即 $\alpha = n, \beta = s$ ，则相应的Lamé参数为

$$A = 1, B = 1 + \frac{n}{R_{20}} \quad (4.26)$$

式中 $R_{20} = R_{20}(s) = (d\theta(s)/ds)^{-1}$ 表示曲线 $\Gamma$ 的曲率半径，也就是 $R_2$ 当 $n = 0$ 时之值，而坐标曲线的曲率半径则为

$$R_1 = \infty, R_2 = n + R_{20}(s) \quad (4.27)$$

以 $i_n, i_s$ 表示沿坐标曲线的单位矢量。由(4.21)式可得单位矢量的导数：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial i_n}{\partial n} &= 0, & \frac{\partial i_s}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial i_n}{\partial s} &= -\frac{1}{R_{20}} i_s, & \frac{\partial i_s}{\partial s} &= -\frac{1}{R_{20}} i_n \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

应注意，曲线 $\Gamma$ 为所研究时刻的区域交界曲线，但其它平行曲线不是这时刻也不是以后时刻的交界曲线。

## (2) 应力连接条件与应变连接条件

由(4.1)式，在 $(n, s)$ 坐标中应力分量通过应力函数 $\phi$ 的表达式为

$$\tau_n = \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \phi}{\partial s}, \quad \tau_s = - \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (4.29)$$

以  $[P]_r = (P)_{n=+0} - (P)_{n=-0}$

表示任一物理量 $P$ 通过 $\Gamma$ 的间断量。显然在 $\partial P / \partial s$ 与 $P$ 的间断量之间存在关系

$$\left[ \frac{\partial P}{\partial s} \right]_r = - \frac{d}{ds} [P]_r$$

因此，如果 $P$ 连续（即 $[P]_r = 0$ ），则 $\partial P / \partial s$ 亦必连续（ $[\partial P / \partial s]_r = 0$ ）。由于应力连续，故

$$[\tau_n]_r = 0, \quad [\tau_s]_r = 0$$

故可得

$$[\phi]_r = 0 \quad (4.30)$$

与

$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_r = 0 \quad (4.31)$$

(4.30)，(4.31)式称为应力连接条件，或各称为第一与第二连接条件。

由(4.2)'式，在 $n, s$ 坐标中应变分量通过位移 $w$ 的表达式为

$$\gamma_n = \frac{\partial w}{\partial n}, \quad \gamma_s = \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial w}{\partial s} \quad (4.32)$$

因位移 $w$ 为连续, 故 $\gamma_s$ 为连续, 即

$$[\gamma_s]_r = 0 \quad (4.33)$$

又因 $\tau_s$ 连续, 故 $\gamma_s^e = \tau_s/G$ 连续, 即

$$[\gamma_s^e]_r = 0$$

因此 $\gamma_s^p = \gamma_s - \gamma_s^e$ 亦连续, 即

$$[\gamma_s^p]_r = 0 \quad (4.34)$$

因此剪应变 $\gamma_s$ 为连续, 但其法向导数 $\partial\gamma_s/\partial n$ 可能有间断 $[\partial\gamma_s/\partial n]_r$ 。至于(4.32)式的 $\gamma_n = \partial w/\partial n$ 则可能有间断。因 $\tau_n$ 连续, 故 $\gamma_n^e = \tau_n/G$ 连续, 即

$$[\gamma_n^e]_r = 0$$

故

$$[\gamma_n^p]_r = [\gamma_n]_r \quad (4.35)$$

下面证明 $\gamma_n$ 的间断 $[\gamma_n]_r$ 与 $\partial\gamma_s/\partial n$ 的间断 $[\partial\gamma_s/\partial n]_r$ 存在着关系

$$\left[ \frac{\partial\gamma_s}{\partial n} \right]_r = -\frac{d}{ds} [\gamma_n]_r \quad (4.36)$$

(4.36)式称为应变连接条件, 或第三连接条件。欲证明(4.36)式, 只需要利用在 $n, s$ 坐标中的变形协调方程:

$$\frac{\partial\gamma_s}{\partial n} = \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial\gamma_n}{\partial s} - \frac{\frac{1}{R_{20}}}{\left(1 + \frac{n}{R_{20}}\right)} \gamma_s \quad (4.37)$$

将(4.32)式代入此(4.37)式, 即可验证此为恒等式。取(4.37)式通过曲线 $\Gamma$  ( $n=0$ )之间断值, 即得(4.36)式。

第三连接条件(4.36)还可以表示成其它形式。其右端的 $[\gamma_n]_r$ , 由(4.35)式, 可用 $[\gamma_n^p]_r$ 代替。而左端的 $\partial\gamma_s/\partial n$ 则可分解为弹性与塑性部分之和:

$$\frac{\partial \gamma_s}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n} (\gamma_s^e + \gamma_s^p) = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_s}{\partial n} + \frac{\partial \gamma_s^p}{\partial n}$$

式中 $\tau_s$ 可利用 (4.29) 第二式通过应力函数 $\phi$ 表示, 故

$$\frac{\partial \gamma_s}{\partial n} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} + \frac{\partial \gamma_s^p}{\partial n}$$

于是, 可得到第三连接条件 (4.36) 的另一种形式:

$$-\frac{1}{G} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_r + \left[ \frac{\partial \gamma_s^p}{\partial n} \right]_r = -\frac{d}{ds} [\gamma_n^p]_r \quad (4.38)$$

(4.38) 式中的 $[\partial \gamma_s^p / \partial n]_r$ 还可计算如下。将塑性剪应变矢量 $\gamma^p$ 沿 $n, s$ 坐标方向分解, 得

$$\gamma^p = \gamma_n^p \mathbf{i}_n + \gamma_s^p \mathbf{i}_s$$

将上式对坐标 $n, s$ 求导, 并利用单位矢量求导公式 (4.28), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma^p}{\partial n} &= \frac{\partial \gamma_n^p}{\partial n} \mathbf{i}_n + \frac{\partial \gamma_s^p}{\partial n} \mathbf{i}_s \\ \frac{\partial \gamma^p}{\partial s} &= \left( \frac{\partial \gamma_n^p}{\partial s} - \frac{\gamma_s^p}{R_{20}} \right) \mathbf{i}_n + \left( \frac{\partial \gamma_s^p}{\partial s} + \frac{\gamma_n^p}{R_{20}} \right) \mathbf{i}_s \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

利用定常条件 (4.6) 式, 塑性变形律 (4.5) 式可写作

$$\dot{\gamma}^p = -\frac{\partial \gamma^p}{\partial x} = \lambda \tau$$

或利用方向导数的关系,

$$-\cos \vartheta \frac{\partial \gamma^p}{\partial n} + \frac{\sin \vartheta}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \gamma^p}{\partial s} = \lambda \tau \quad (4.40)$$

将 (4.39) 式代入 (4.40) 式, 取 $n, s$ 坐标方向之分量, 得到

$$\left. \begin{aligned} -\cos\vartheta \frac{\partial \gamma_n^p}{\partial n} + \frac{\sin\vartheta}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \left( \frac{\partial \gamma_n^p}{\partial s} - \frac{\gamma_s^p}{R_{20}} \right) &= \lambda \tau_n \\ -\cos\vartheta \frac{\partial \gamma_s^p}{\partial n} + \frac{\sin\vartheta}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \left( \frac{\partial \gamma_s^p}{\partial s} + \frac{\gamma_n^p}{R_{20}} \right) &= \lambda \tau_s \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

因此剪应变对法向 $n$ 的导数，可以通过对切向 $s$ 的导数和流动因子 $\lambda$ 表示。取(4.41)第二式在 $\Gamma$ 处( $n=0$ )之间断，并注意(4.34)式， $[\gamma_s^p]_r=0$ ，得

$$-\cos\vartheta \left[ \frac{\partial \gamma_s^p}{\partial n} \right]_r + \frac{\sin\vartheta}{R_{20}} [\gamma_n^p]_r = [\lambda]_r \tau_s$$

由此式解出 $[\partial \gamma_s^p / \partial n]_r$ ，代入(4.38)式，得到第三连接条件的又一种形式：

$$\frac{1}{G} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_r = \frac{[\lambda]_r}{\cos\vartheta} \tau_s + \frac{\tan\vartheta}{R_{20}} [\gamma_n^p]_r - \frac{d}{ds} [\gamma_n^p]_r \quad (4.42)$$

以上得到的第一、第二与第三连接条件，即(4.30)，(4.31)与(4.42)各规定应力函数 $\phi$ 本身，一阶法向导数 $\partial\phi/\partial n$ 与二阶法向导数 $\partial^2\phi/\partial n^2$ 的连续(或间断)特性。协调方程(4.9)对 $\phi$ 为二阶，故在求解协调方程(4.9)时需要第一与第二连接条件，即(4.30)与(4.31)式。而在求解协调方程率(4.10)或(4.10)'时，则除了第一与第二连接条件以外，还需要第三连接条件(4.42)。

事实上，如果协调方程(4.9)成立，则可保证第三连接条件必然成立。在任意的正交曲线坐标 $\alpha, \beta$ 中协调方程(4.9)中各项的表示形式如下：

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{AB} \left[ -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{A} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{B} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \right] \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \gamma_y^p - \frac{\partial}{\partial y} \gamma_x^p = \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_\alpha^p}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} \gamma_\alpha^p \right) - \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \gamma_\beta^p}{\partial \beta} - \frac{1}{R_2} \gamma_\beta^p \right)$$

$R_1, R_2$ 的意义见图4.2。在 $n, s$ 坐标中, 取Lamè参数 $A, B$ 如(4.26)式, 则

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = & \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} + \frac{1}{R_{20} + n} \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{R_{20}}\right)^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} \\ & - \frac{n \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{R_{20}} \right)}{\left(1 + \frac{n}{R_{20}}\right)^3} \frac{\partial \phi}{\partial s} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \gamma_y^p - \frac{\partial}{\partial y} \gamma_x^p = \frac{\partial \gamma_s^p}{\partial n} - \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \gamma_n^p}{\partial s} + \frac{\gamma_s^p}{R_{20} + n}$$

取协调方程在曲线 $\Gamma$  ( $n=0$ ) 之间断值, 得

$$\frac{1}{G} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_r = \left[ -\frac{\partial \gamma_s^p}{\partial n} \right]_r - \left[ -\frac{\partial \gamma_n^p}{\partial s} \right]_r$$

式中 $[\partial \gamma_n^p / \partial s]_r = -\frac{d}{ds} \left[ \gamma_n^p \right]_r$ 。上式恰好就是第三连接条件的(4.38)形式。由它可导出(4.42)形式。因此, 第三连接条件只是协调方程(4.9)在曲线 $\Gamma$ 两侧的间断值。如果在曲线 $\Gamma$ 两侧, 协调方程(4.9)成立, 则第三连接条件必定成立。换句话说, 第三连接条件只是协调方程(4.9)的推论。

### (3) 弱间断与强间断

由上面的讨论, 可知除了 $\gamma_n$  (因而 $\gamma_n'$ , 见(4.35)式)

可能有间断以外，全部其他的应力与应变分量都是连续的。因此我们可以区分两种间断情况：

①弱间断。设 $\gamma_n$ 也连续，即

$$[\gamma_n]_r = [\gamma_n^p]_r = 0$$

因而全部的应力与应变分量（包括 $\gamma_n$ 在内）都连续。此种情况称为弱间断情况。某些应力或应变法向导数 $(\partial/\partial n)$ 可能有间断。在弱间断情况下，第三连接条件（4.42）简化为

$$\frac{1}{G} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_r = - \frac{[\lambda]_r}{\cos \theta} \tau_s \quad (4.45)$$

②强间断。设

$$[\gamma_n]_r = [\gamma_n^p]_r \neq 0$$

可以证明强间断只能出现在塑性区的特征线（沿特征线的剪应力分量 $\tau_s = 0$ ，见第二章图3.4上。为了证明这一结论，我们只要把间断线 $\Gamma$ 想象成一个薄层。在裂纹扩展时，这个薄层也随着向前移动。当某一物质质点被这个薄层扫过而其相对位置从薄层之一侧变到另一侧，这个质点的 $\gamma_n^p$ 值发生有限的变化。如果这个薄层越薄（趋于零），则这个质点被薄层扫过时的 $\dot{\gamma}_n^p$ 越大（趋于无穷），因而 $\dot{\gamma}_n^p : \dot{\gamma}_s^p \rightarrow 1:0$ 。按变形律， $\tau_n : \tau_s = 1:0$ 。故 $|\tau_n| = \tau_0$ ， $\tau_s = 0$ 。故强间断线 $\Gamma$ 应为特征线（ $\tau_s = 0$ ）。在强间断情况下，第三连接条件（4.42）简化为

$$\frac{1}{G} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_r = \frac{\tan \theta}{R_{20}} [\gamma_n^p]_r - \frac{d}{ds} [\gamma_n^p]_r \quad (4.46)$$

### 3. 尖端附近各区应力求解

由反对称性，在主塑性区II（图4.1）中应力解已见（3.2）式：

$$\tau_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0, \quad \tau_\theta = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \tau_0 \quad (4.47)$$

即

$$\tau_r = -\tau_0 \sin \theta, \quad \tau_\theta = \tau_0 \cos \theta \quad (4.47)'$$

由 (4.47) 得到应力函数

$$\phi = -r\tau_0 \quad (4.48)$$

因而

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -\frac{\tau_0}{r} \quad (4.49)$$

特征线为一族通过裂纹尖端的射线。前已指出，上述这个应力解适用于全部主塑性区 II（而不仅限于尖端附近的局部）。

由于裂纹表面为自由，在第二塑性区 IV（图 4.1）中应力解应为

$$\tau_x = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \tau_0, \quad \tau_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.50)$$

其中第一式  $\tau_x$  取正号，而不取负号，是基于以下的考虑：在主塑性区 II 内， $\tau_x < 0$ ，故必  $\gamma_x^p < 0$ ，且在尖端附近  $\gamma_x^p$ （负值）有奇异性。一物质质点经过主塑性区 II，产生了绝对值很大的塑性应变  $\gamma_x^p$ （负值），经过 III 区卸载后，再进入第二塑性区 IV 必然产生反向屈服，以便抵消去一部分在主塑性区 II 中所曾获得的严重的塑性应变  $\gamma_x^p$ （负值），因此在 IV 区中， $\gamma_x^p > 0$ ，故  $\tau_x > 0$ 。

由 (4.50) 可求出 IV 区应力函数

$$\phi = \tau_0 y \quad (4.51)$$

故

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.52)$$

特征线为平行于  $y$  轴的直线族。上述应力解适用于全部第二



塑性区Ⅳ（而不仅限于尖端附近的局部）。

现在我们来求卸载区Ⅲ（图4.1）中的应力解，而且仅限于求尖端附近的局部解（ $r \rightarrow 0$ ）。为了求局部解（ $r \rightarrow 0$ ），区域之间的交界线 $\Gamma_2$ 、 $\Gamma_3$ 可以用其在尖端处之切线 $\bar{\Gamma}_2$ 、 $\bar{\Gamma}_3$ 来代替（图4.4）。

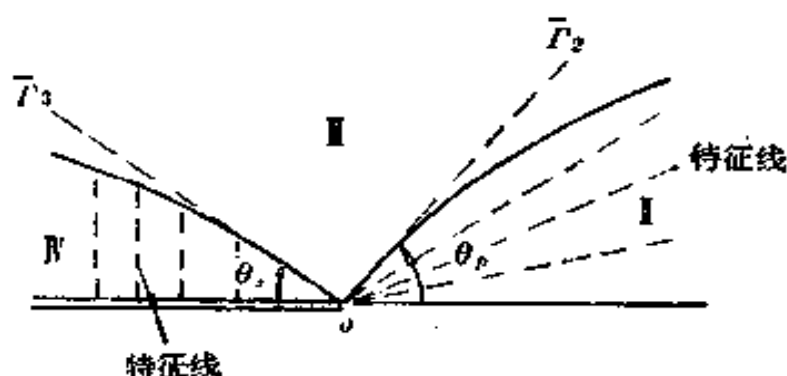


图 4.4 Ⅲ型裂纹尖端附近局部分区

在卸载区Ⅲ内，塑性流动因子 $\lambda \equiv 0$ 。故由（4.7）或（4.8）式，塑性应变只与坐标 $y$ 有关而与 $x$ 无关，

$$\gamma_x^p = \gamma_x^p(y), \quad \gamma_y^p = \gamma_y^p(y) \quad (4.53)$$

变形协调方程（4.9）简化为

$$\frac{1}{G} \nabla^2 \phi + \frac{d}{dy} \gamma_x^p(y) = 0 \quad (4.54)$$

卸载区Ⅲ在尖端附近有两个边界。一个是与主塑性区Ⅱ的交界线 $\Gamma_2$ （或 $\bar{\Gamma}_2$ ），称为卸载边界，因为质点在经过此边界时是出主塑性区同时进卸载区，开始卸载。另一个边界是与第二塑性区Ⅳ的交界线 $\Gamma_3$ （或 $\bar{\Gamma}_3$ ），称为二次加载边界，因为质点在经过此边界时乃是出卸载区同时进第二塑性区，开始再次加载（初次加载边界是图4.1中的 $\Gamma_1$ ——主塑性区Ⅱ与弹性区Ⅰ的交界线）。

二次加载边界 $\Gamma_1$  (或 $\bar{\Gamma}_1$ ) 必为弱间断线, 因为它不是第二塑性区Ⅳ的特征线。至于卸载边界 $\Gamma_2$  (或 $\bar{\Gamma}_2$ ) , 则在尖端处与主塑性区Ⅱ的特征线相切( $\bar{\Gamma}_2$ 与特征线相重合), 它有可能在尖端附近为强间断线。但是下面我们将证明局部解在卸载边界 $\bar{\Gamma}_2$ 处应变间断量 $[\gamma^p]_r$ 为零, 故卸载边界 $\bar{\Gamma}_2$ 最终仍然是弱间断线 (见下文 (4.71) 式) 。

为了求卸载区Ⅲ内的局部解。考虑到理想塑性材料的应力为有限值, 可设应力函数 $\phi$ 的局部解形式为

$$\phi = rF(\theta) \quad (4.55)$$

故应力分量为

$$\tau_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = F(\theta), \quad \tau_\theta = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -F(\theta) \quad (4.56)$$

定义 $K(\theta)$ 为合应力的平方:

$$K(\theta) = \tau_\theta^2 + \tau_r^2 = \{F(\theta)\}^2 + \{F(\theta)\}^2 \quad (4.57)$$

式中  $\frac{d}{d\theta}$ , 易求得其导数为:

$$K'(\theta) = 2F'(\theta)\{F(\theta) + F'(\theta)\}$$

$$K''(\theta) = 2F''(\theta)\{F(\theta) + F'(\theta)\} + 2F'(\theta)\{F'(\theta) + F''(\theta)\}$$

设以 $\theta_p$ ,  $\theta_s$ 分别表示主塑性区Ⅱ与第二塑性区Ⅳ所张的扇形角 (图4.4)。将 (4.55) 式与主塑性区Ⅱ及第二塑性区Ⅳ中 $\phi$ 的表达式 (4.48) 与 (4.51) 式比较, 可知在主塑性区Ⅱ中

$$F(\theta) = -\tau_0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_p \quad (4.58)$$

而在第二塑性区Ⅳ中

$$F(\theta) = \tau_0 \sin \theta, \quad \pi - \theta_s \leq \theta \leq \pi \quad (4.59)$$

现在来研究在卸载区Ⅲ中的 $F(\theta)$ 与 $K(\theta)$ 函数,  $\theta_p \leq \theta \leq \pi - \theta_s$ 。

在卸载边界  $\bar{\Gamma}_2$  处 ( $\theta = \theta_p$ ) 与二次加载边界  $\bar{\Gamma}_3$  处 ( $\theta = \pi - \theta_s$ ) 均应满足应力连接条件, 即第一与第二连接条件 (4.30) 与 (4.31), 故  $F(\theta)$  与  $F'(\theta)$  应连续, 即 ( $\Gamma$  可为  $\bar{\Gamma}_2$  或  $\bar{\Gamma}_3$ )

$$[F(\theta)]_r = 0, \quad [F'(\theta)]_r = 0 \quad (4.60)$$

考虑相邻的主塑性区 II 中  $F(\theta)$  的 (4.58) 式, 得到在卸载区 III 中的卸载边界  $\bar{\Gamma}_2$  处应满足的连接条件

$$F(\theta_p) = -\tau_0, \quad F'(\theta_p) = 0 \quad (4.61)$$

同样, 考虑到相邻的第二塑性区 IV 中  $F(\theta)$  的 (4.59) 式, 可得在卸载区 III 中二次加载边界  $\bar{\Gamma}_3$  处应满足的连接条件

$$F(\pi - \theta_s) = \tau_0 \sin \theta_s, \quad F'(\pi - \theta_s) = -\tau_0 \cos \theta_s, \quad (4.62)$$

将 (4.61) 代入 (4.57) 与 (4.57)' 式, 得到卸载区 III 中  $K(\theta)$  及其导数在卸载边界处之值:

$$\left. \begin{aligned} K(\theta_p) &= \tau_0^2, \quad K'(\theta_p) = 0 \\ K''(\theta_p) &= 2F''(\theta_p) \{-\tau_0 + F''(\theta_p)\} \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

在整个卸载区 III 中, 剪应力不能超过  $\tau_0$ , 因此

$$K(\theta) \leq \tau_0^2, \quad \theta_p \leq \theta \leq \pi - \theta_s, \quad (4.64)$$

为了保证在  $\theta = \theta_p$  邻域内满足 (4.64) 式, 应有

$$K''(\theta_p) = 2F''(\theta_p) \{-\tau_0 + F''(\theta_p)\} \leq 0 \quad (4.65)$$

这里  $F''(\theta_p)$  表示在卸载区 III 一侧之值。

现在我们来证明卸载边界  $\bar{\Gamma}_2$  为弱间断。我们采用的办法是先设它是强间断, 然后证明应变间断量  $[\gamma_n^p]_{\bar{\Gamma}_2}$  为零。如  $\bar{\Gamma}_2$  为强间断, 则由强间断的第三连接条件 (4.46) 式, 在  $\bar{\Gamma}_2$  处应满足

$$\frac{1}{Gr} [F''(\theta)]_{\bar{\Gamma}_2} = -\frac{d}{ds} [\gamma_n^p]_{\bar{\Gamma}_2}, \quad (4.66)$$

这里, (4.46) 式右端只保留了第二项, 因为它是主奇异项, 而略去了 (4.46) 右端的第一项。假定取  $\bar{\Gamma}_2$  的  $n$  方向为  $\theta$  方向,

$s$ 方向与 $r$ 方向相反,  $-d/ds = d/dr$ , 按以前 $[P]_r$ 的定义, 在 $\bar{r}_2$ 处之间断量为

$$[P]_{\bar{r}_2} = (P)_{\theta = \theta_p + 0} - (P)_{\theta = \theta_p - 0}$$

式中 $\theta = \theta_p + 0$ 表示在卸载区Ⅲ一侧, 而 $\theta = \theta_p - 0$ 表示在主塑性区Ⅱ一侧之值。由(4.66)式可以看出 $[\gamma_n^p]_{\bar{r}_2}$ 具有 $\ln r$ 对数奇异性, 故可设

$$[\gamma_n^p]_{\bar{r}_2} = (\gamma_n^p)_{\theta = \theta_p + 0} - (\gamma_n^p)_{\theta = \theta_p - 0} = b \ln \frac{r_p}{r} \quad (4.67)$$

式中 $r_p$ 表示主塑性区尺寸(沿裂纹延长线)。注意到主塑性区Ⅱ中的 $F(\theta)$ (4.58)式, 第三连接条件(4.66)成为

$$-\frac{1}{Gr} F''(\theta_p) = \frac{d}{dr} \left( b \ln \frac{r_p}{r} \right)$$

因此

$$-\frac{1}{G} E''(\theta_p) = -b \quad (4.68)$$

在卸载边界 $\bar{r}_2$ 处( $\theta = \theta_p$ )的剪应力 $\tau_\theta = \tau_0 > 0$ 。想象 $\bar{r}_2$ 为一薄层, 质点经过此薄层时, 塑性应变 $\gamma_n^p$ 经过(4.67)式的有限变化。根据塑性功增量恒为正(或零)这一规律, 要求 $\gamma_n^p$ 的有限变化量为正(或零), 即

$$b \geq 0 \quad (4.69)$$

由(4.65), (4.68), (4.69)三个关系式, 可证明

$$F''(\theta_p) = 0, \quad b = 0 \quad (4.70)$$

因此由(4.67)式,

$$[\gamma_n^p]_{\bar{r}_2} = 0 \quad (4.71)$$

卸载边界 $\bar{r}_2$ 应为弱间断线。因此 $\bar{r}_2$ 处的第三连接条件为

$[F''(\theta)]_{\bar{r}_2} = 0$ , 即

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_{\bar{r}_2} = 0 \quad (4.72)$$

(4.72) 式也可以直接由弱间断  $\bar{r}_2$  的第三连接条件 (4.45) 得到, 其中在  $\bar{r}_2$  处  $\tau_s = \tau_r = 0$ 。由 (4.72) 可知在  $\bar{r}_2$  处  $\nabla^2 \phi$  连续:

$$[\nabla^2 \phi]_{\bar{r}_2} = 0 \quad (4.73)$$

卸载区 III 内的协调方程已见 (4.54) 式,  $\nabla^2 \phi$  只是  $y$  的函数:

$$\nabla^2 \phi = -G \frac{d}{dy} \gamma_p^p(y) = g(y) \quad (4.54)'$$

根据 (4.73) 式,  $g(y)$  应与主塑性 II (4.49) 式的  $\nabla^2 \phi$  在  $\bar{r}_2$  处 ( $\theta = \theta_p$ ) 保持连续, 即

$$g(y) = \left( -\frac{\tau_p}{r} \right)_{\theta = \theta_p}$$

故

$$g(y) = -\frac{\tau_0 \sin \theta_p}{y}$$

因此, 卸载区 III 内的协调方程 (4.54)' 应为

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\tau_0 \sin \theta_p}{y} \quad (4.54)''$$

式中算符  $\nabla^2$  见 (4.11) 式。将 (4.55) 式的  $\phi$  代入上式, 得到在卸载区 III 内  $F(\theta)$  的微分方程

$$F''(\theta) + F(\theta) = -\frac{\tau_0 \sin \theta_p}{\sin \theta} \quad (4.74)$$

此微分方程的解为

$$F(\theta) = -\tau_0 \sin \theta_p \{ A \sin \theta + B \cos \theta + f(\theta) \} \quad (4.75)$$

式中 $A$ 、 $B$ 为积分常数，而

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin\theta \ln \sin\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos\theta \\ f'(\theta) &= \cos\theta \ln \sin\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin\theta \\ f''(\theta) &= -f(\theta) + \frac{1}{\sin\theta} \end{aligned} \quad (4.76)$$

这样，我们一共有四个待定常数，即两个积分常数 $A$ 、 $B$ 与两个待定角 $\theta_p$ 、 $\theta_s$ （图4.4）。它们可以由在卸载边界 $\bar{\Gamma}_2$ 处（ $\theta = \theta_p$ ）的两个连接条件（4.61）式与在二次加载边界 $\bar{\Gamma}_3$ 处（ $\theta = \pi - \theta_s$ ）的两个连接条件（4.62）式定出，计算如下：

连接条件（4.61）给出

$$\left. \begin{aligned} A \sin\theta_p + B \cos\theta_p + f(\theta_p) &= -\frac{1}{\sin\theta_p} & (a) \\ A \cos\theta_p - B \sin\theta_p + f'(\theta_p) &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

而连接条件（4.62）则给出

$$\left. \begin{aligned} A \sin\theta_s - B \cos\theta_s + f(\theta_s) &= -\frac{\sin\theta_s}{\sin\theta_p} & (c) \\ A \cos\theta_s + B \sin\theta_s + f'(\theta_s) &= -\frac{\cos\theta_s}{\sin\theta_p} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

这里曾经用到等式

$$f(\pi - \theta_s) = f(\theta_s), \quad f'(\pi - \theta_s) = -f'(\theta_s)$$

由（4.77）的四个式子联立求解 $A$ 、 $B$ 、 $\theta_p$ 、 $\theta_s$ ，先由（4.77）的（a）与（c）式解出 $A$ 与 $B$ ，得

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{C \cos \theta_s + D \cos \theta_p}{\sin(\theta_p + \theta_s)} \\ B &= \frac{C \sin \theta_s - D \sin \theta_p}{\sin(\theta_p + \theta_s)} \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

式中

$$C = \frac{1}{\sin \theta_p} - f(\theta_p), \quad D = -\frac{\sin \theta_s}{\sin \theta_p} - f(\theta_s)$$

将 (4.78) 式的  $A$ 、 $B$  代入 (4.77) 的 (b) 与 (d) 式，经过化简后，分别得到：

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\theta_p + \theta_s) - \sin \theta_s}{\sin \theta_p} + \ln\left(\frac{\sin \theta_p}{\sin \theta_s}\right) \sin \theta_s \\ - (\pi - \theta_p - \theta_s) \cos \theta_s = 0 \end{aligned} \quad (4.79a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin \theta_p}{\sin \theta_p} - \ln\left(\frac{\sin \theta_p}{\sin \theta_s}\right) \sin \theta_p - (\pi - \theta_p - \theta_s) \cos \theta_p = 0 \end{aligned} \quad (4.79b)$$

(4.79) 为两个含有  $\theta_p$  与  $\theta_s$  的方程，还可以再化简。(4.79a) 式乘以  $(1/\sin \theta_s)$  与 (4.79) 式乘以  $(1/\sin \theta_p)$  后相加，可得

$$\theta_s = \pi - \theta_p - \cot \theta_p \quad (4.79c)$$

将 (4.79c) 代入 (4.79b)，化简后得

$$\sin(\pi - \theta_p - \cot \theta_p) \exp\left(\frac{1 + \sin \theta_p}{\sin \theta_p}\right) = \sin \theta_p \quad (4.79d)$$

由 (4.79d) 式求  $\theta_p$ ，代入 (4.79c) 式求  $\theta_s$ ，得到

$$\left. \begin{aligned} \theta_p &= 0.344026 \text{ 弧度} = 19.7112^\circ \\ \theta_s &= 0.006398 \text{ 弧度} = 0.3666^\circ \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

将  $\theta_p$  与  $\theta_s$  的值代入 (4.78) 式，得到

$$A = 2.0868, \quad B = 1.5644 \quad (4.81)$$

至此，全部待定常数均已定出。将这些常数值代入 (4.75)  $F(\theta)$  式，后者再代入 (4.56) 式可得卸载Ⅲ区内的极坐标应力分量：

$$\begin{aligned}\tau_r &= -\tau_0 \sin\theta_p \{A \cos\theta - B \sin\theta + f'(\theta)\} \\ \tau_\theta &= \tau_0 \sin\theta_p \{A \sin\theta + B \cos\theta + f(\theta)\}\end{aligned}\quad (4.82)$$

由此可得Ⅲ区内的直角坐标应力分量：

$$\begin{aligned}\tau_x &= \tau_r \cos\theta - \tau_\theta \sin\theta \\ &= -\tau_0 \sin\theta_p \{A + \ln\sin\theta\} \\ \tau_y &= \tau_r \sin\theta + \tau_\theta \cos\theta \\ &= \tau_0 \sin\theta_p \left\{ B + \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\}\end{aligned}\quad (4.83)$$

裂纹尖端周围Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ区的应力 $\tau_x$ ， $\tau_y$ 各按(4.47)'，(4.83)，(4.50)式分布，如图4.5(a)所示。图4.5(b)表示 $K(\theta) = \tau_x^2 + \tau_y^2$ 的分布。

#### 4. 尖端附近各区的应变与位移

在求各区的应变以前，先求各区的塑性流动因子 $\lambda$ 。

(1) 主塑性区Ⅱ 将Ⅱ区的(4.48)式 $\phi$ 与(4.49)式 $\nabla^2\phi$ 代入协调方程率(4.10)'式，得到

$$\frac{1}{G} \cos\theta \frac{\tau_0}{r^2} + \lambda \frac{\tau_0}{r} + \tau_0 \frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0$$

化简后，成为

$$\frac{\partial}{\partial r} (\lambda r) = -\frac{\cos\theta}{G} \frac{1}{r} \quad (\text{Ⅱ区})$$

其解为

$$\lambda = \frac{1}{Gr} \{ -\cos\theta \ln r + \bar{K}(\theta) \} \quad (\text{Ⅱ区}) \quad (4.84)$$

式中 $\bar{K}(\theta)$ 函数与主塑性区边界 $\Gamma_1$  (图4.1) 的形状有关。例



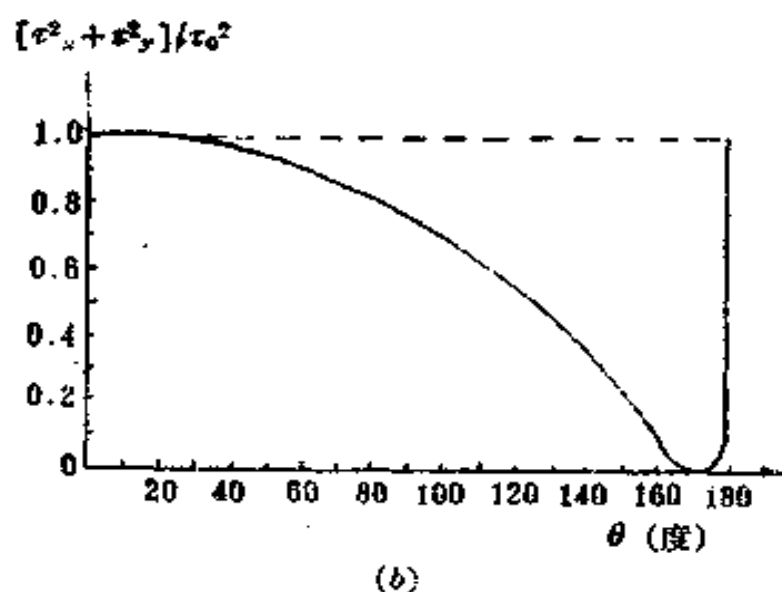
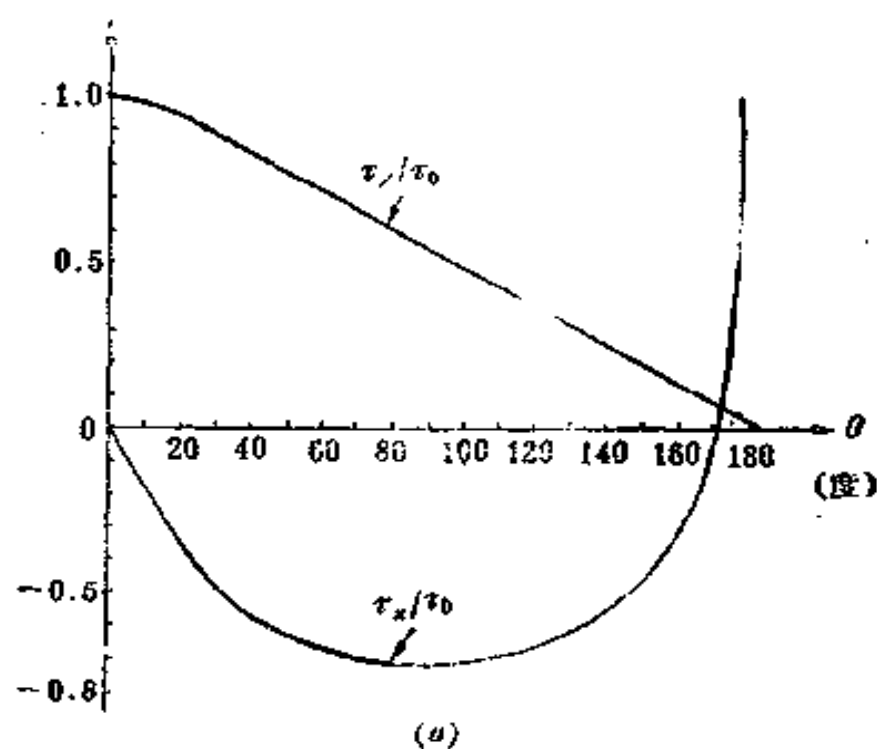


图 4.5 理想弹塑性材料Ⅱ型定常扩展裂纹尖端场的应力角分布

(a)  $\tau_x, \tau_y$       (b)  $K(\theta) = \tau_x^2 + \tau_y^2$

如，可以证明，当 $\theta = 0$ ， $\bar{K}(\theta)$ 值与沿裂纹延长线主塑性区尺寸 $r_p$ （图4.1）有以下关系：

$$\bar{K}(0) = 1 + \ln r_p \quad (4.85)$$

证明过程如下：图4.1中主塑性区Ⅱ与弹性区Ⅰ之交界线 $\Gamma_1$ ，非主塑性区之特征线，故必为弱间断线。将第三连接条件（4.45）式用于弱间断线 $\Gamma_1$ 上的 $A_0$ 点，即裂纹延长线上主塑性区的边界点：

$$\frac{1}{G} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_{\Gamma_1} = - \frac{[\lambda]_{\Gamma_1} \tau_0}{\cos \theta}$$

式中，在 $A_0$ 点， $\theta = 0$ ， $\cos \theta = 1$ ， $\tau_0 = \tau_0$ 。由于 $\phi$ 与 $\partial \phi / \partial n$ 恒为连续（见第一与第二连接条件，（4.30）与（4.31）），故 $\partial^2 \phi / \partial n^2$ 的间断值也就是 $\nabla^2 \phi$ 的间断值。上述第三连接条件在 $A_0$ 点可写作

$$\frac{1}{G} [\nabla^2 \phi]_{\Gamma_1, z_{A_0, A}} = - [\lambda]_{\Gamma_1, z_{A_0, A}} \tau_0 \quad (4.86)$$

在 $A_0$ 点之弹性区一侧，显然 $\lambda = 0$ ，且由（4.9）' $\nabla^2 \phi = 0$ 。而在 $A_0$ 点之主塑性区一侧。由（4.84）与（4.49），令 $\theta = 0$ ， $r = r_p$ ，得

$$\lambda = \frac{1}{Gr_p} (-\ln r_p + \bar{K}(0))$$

$$\nabla^2 \phi = - \frac{\tau_0}{r_p}$$

因此（4.86）给出

$$\frac{1}{G} \left\{ - \frac{\tau_0}{r_p} - 0 \right\} = - \left\{ \frac{1}{Gr_p} (\ln r_p + \bar{K}(0) - 0) \right\} \tau_0$$

由此解出 $\bar{K}(0)$ ，即得（4.85）式。

（2）卸载区Ⅲ 显然塑性流动因子

$$\lambda = 0 \quad (\text{Ⅲ区}) \quad (4.87)$$

（3）第二塑性区Ⅳ 将Ⅳ区的（4.51）式 $\phi$ 与（4.52）

式 $\nabla^2\phi$ 代入协调方程率 (4.10), 得到

$$-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\tau_0=0 \quad (\text{IV区})$$

故 $\lambda$ 为 $x$ 的函数:

$$\lambda=\lambda(x) \quad (\text{IV区}) \quad (4.88)$$

为了求 $\lambda(x)$ , 可将第三连接条件用于 $\bar{\Gamma}_3$ , 即卸载区III与第二塑性区IV之交界线(图4.4)。因 $\Gamma_3$ 非特征线, 故必为弱间断。其第三连接条件为(4.45), 可写成

$$\frac{1}{G}[\nabla^2\phi]_{\bar{\Gamma}_3} = -\frac{[\lambda]_{\bar{\Gamma}_3}}{\cos\theta}\tau_s \quad (4.89)$$

式中, 如前曾指出,  $\partial^2\phi/\partial n^2$ 间断可改成与之相等的 $\nabla^2\phi$ 间断。取 $n, s$ 方向如图4.6, 则在 $\bar{\Gamma}_3$ 上

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_s, \quad \cos\theta = \sin\theta_s,$$

$$\tau_s = -\tau_0\cos\theta_s,$$

在 $\bar{\Gamma}_3$ 卸载区III一侧, 由(4.87)式显然 $\lambda=0$ , 且由(4.54)'',

$$\nabla^2\phi = -\frac{\tau_0\sin\theta_p}{y} = -\frac{\tau_0}{x}\cot\theta_s\sin\theta_p \quad (\text{在}\bar{\Gamma}_3\text{上})$$

在 $\bar{\Gamma}_3$ 的第二塑性区一侧,  $\lambda$ 见(4.88)式, 由(4.52),  $\nabla^2\phi=0$ 。因此, 第三连接条件(4.89)成为

$$\frac{1}{G}\left\{-\frac{\tau_0}{x}\cot\theta_s\sin\theta_p - 0\right\} = -\frac{1}{\sin\theta_s}\{0 - \lambda(x)\}(-\tau_0\cos\theta_s)$$

故解得

$$\lambda(x) = -\frac{1}{G} \frac{\sin\theta_p}{x} \quad (4.90)$$

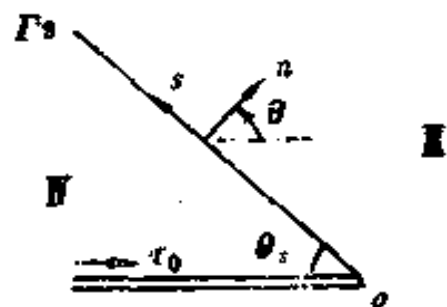


图 4.6 分界线 $\Gamma_3$

有了 II, III, IV 各区  $\lambda$  的 (4.84), (4.87), (4.90) 式, 和各区应力  $\tau_r, \tau_\theta$  的 (4.47)', (4.83), (4.50) 式, 把它们代入 (4.8) 式就可以得到各区的塑性应变  $\gamma_x^p, \gamma_y^p$ 。由于  $\bar{r}_2, \bar{r}_3$  均为弱间断, (4.8) 式可适用于各区 (而无需考虑在分界线处的应变间断)。经过较繁长的计算与化简, 最后得到各区的塑性应变的局部解如下:

主塑性区 II ( $0 \leq \theta \leq \theta_p$ ):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x^p &= -\frac{\tau_0}{G} \left\{ -\sin\theta \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \\ \gamma_y^p &= -\frac{\tau_0}{G} \left\{ \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \cos\theta - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \right) \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

卸载区 III ( $\theta_p \leq \theta \leq \pi - \theta_s$ ):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x^p &= -\frac{\tau_0}{G} \left\{ -\sin\theta_p \ln \left( \frac{r_p \sin\theta_p}{y} \right) + O(1) \right\} \\ \gamma_y^p &= -\frac{\tau_0}{G} \left\{ \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p \sin\theta_p}{y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \cos\theta_p - 2 \ln \cos \frac{\theta_p}{2} \right) \ln \frac{r_p \sin\theta_p}{y} + O(1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

第二塑性区 IV ( $\pi - \theta_s \leq \theta \leq \pi$ ):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x^p &= -\frac{\tau_0}{G} \sin\theta_p \left\{ -\ln \frac{r_p \sin\theta_p \cot\theta_s}{-\pi} + O(1) \right\} \\ \gamma_y^p &= -\frac{\tau_0}{G} \left\{ \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p \sin\theta_p}{y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \cos\theta_p - 2 \ln \cos \frac{\theta_p}{2} \right) \ln \frac{r_p \sin\theta_p}{y} + O(1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.93)$$

我们也可以用待定系数的方法，由 (4.7) 式求出塑性应变  $\gamma_x^p, \gamma_y^p$ 。试以主塑区 II 的  $\gamma_x^p, \gamma_y^p$  为例，设它们可表示成以下形式：

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x^p &= -\frac{\tau_0}{G} \left\{ g_1(\theta) \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \\ \gamma_y^p &= -\frac{\tau_0}{G} \left\{ f_1(\theta) \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + f_2(\theta) \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.94)$$

式中  $g_1(\theta), f_1(\theta), f_2(\theta)$  均为待定系数。对 (4.94) 式求导：

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_x^p}{\partial x} &= -\frac{\tau_0}{G} \frac{1}{r} \left\{ -\sin \theta g_1'(\theta) \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \\ \frac{\partial \gamma_y^p}{\partial x} &= -\frac{\tau_0}{G} \frac{1}{r} \left\{ -\sin \theta f_1'(\theta) \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - [2 \cos \theta f_1(\theta) + \sin \theta f_2'(\theta)] \ln \frac{r_p}{r} + \right. \\ &\quad \left. + O(1) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.95)$$

将 (4.95) 式代入 (4.7) 式左端，同时以 (4.47)' 式的  $\tau_z, \tau_y$  与 (4.84) 的  $\lambda$  代入 (4.7) 式右端，比较 (4.7) 式两端的系数，对 (4.7) 第一式即  $\partial \gamma_x^p / \partial x = -\lambda \tau_z$  得到  $-\frac{\tau_0}{G} \frac{1}{r} \ln \frac{r_p}{r}$  的系数：

$$-\sin\theta g_1'(\theta) = \cos\theta \sin\theta$$

由此得到

$$g_1(\theta) = -\sin\theta + \text{const} \quad (4.96)$$

将 (4.96) 代入 (4.94) 中的  $\gamma_z^p$  式后, 即得 (4.91) 中的  $\gamma_z^p$  式。同样, 比较 (4.7) 第二式即  $\partial\gamma_y^p/\partial x = -\lambda\tau_y$ , 得到

$-\frac{\tau_0}{G} \frac{1}{r} \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)$  的系数:

$$-\sin\theta f_1'(\theta) = 0 \quad (4.97a)$$

与  $-\frac{\tau_0}{G} \frac{1}{r} \ln \frac{r_p}{r}$  的系数:

$$2\cos\theta f_1(\theta) + \sin\theta f_2'(\theta) = \cos^2\theta \quad (4.97b)$$

由 (4.97a) 式, 解得

$$f_1(\theta) = \text{const} = C$$

(4.97b) 式中令  $\theta = 0$ , 得到  $2f_1(0) = 1$ , 由此可求出  $C = \frac{1}{2}$ 。

因此

$$f_1(\theta) = \frac{1}{2} \quad (4.98a)$$

由 (4.97) 可解出 ( $D$  为积分常数)

$$f_2(\theta) = \cos\theta - 2\ln\cos\frac{\theta}{2} + D \quad (4.98b)$$

由 (3.43)' 式可知  $f_2(0) = 1$ , 因此  $D = 0$ 。将 (4.98) 的  $f_1(\theta)$  与  $f_2(\theta)$  代入 (4.94) 中的  $\gamma_z^p$  后, 即得 (4.91) 中的  $\gamma_z^p$  式。

附带指出, 在假设 (4.94) 式的形式时,  $\gamma_z^p$  式与  $\gamma_z^p$  式不同, 必须从  $(\ln(r_p/r))^2$  项开始。如果我们也假设  $\gamma_z^p$  式从  $\ln(r_p/r)$  项开始的话, 即  $f_1(\theta) = 0$ , 则 (4.97a) 式取消, 而 (4.97b) 式成为

$$\sin\theta f_z'(\theta) = \cos^2\theta$$

这样将导致矛盾，因为此式右端在 $\theta = 0$ 时不等于零，在 $\theta = 0$ 时此式变成 $0 = 1$ 了。其他各区如Ⅲ，Ⅳ区的塑性应变(4.92)，(4.93)式亦可类似地用待定系数的方法得到。

最后来求各区位移 $w$ 的表达式。由(4.2)''式的任一应变积分后可求得 $w$ ，例如

$$w = \int_0^\theta r \gamma_\theta d\theta \quad (4.99)$$

这里已经用到边界条件：当 $\theta = 0, w = 0$ 。积分路径沿 $r = \text{const.}$ 。 $\gamma_\theta$ 包含弹性与塑性两部分，即

$$\gamma_\theta = \gamma_\theta^e + \gamma_\theta^p$$

其中 $\gamma_\theta^e$ 可根据各区的应力按虎克定律计算，而 $\gamma_\theta^p$ 可由(4.91) — (4.93)式的直角坐标分量经过转换而得到。经过计算，得到各区的位移如下：

主塑性区Ⅱ  $(0 \leq \theta \leq \theta_p)$

$$w = -\frac{\tau_0}{G} r \left\{ \frac{1}{2} \sin\theta \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 + \sin\theta \left( 1 - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \right) \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \quad (4.100)$$

卸载区Ⅲ与第二塑性区Ⅳ  $(\theta_p \leq \theta \leq \pi)$

$$w = -\frac{\tau_0}{G} r \left\{ \frac{1}{2} \sin\theta \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 + \left[ \sin(\theta - \theta_p) + \sin\theta \left( 1 - \ln \frac{\sin\theta}{\sin\theta_p} - 2 \ln \cos \frac{\theta_p}{2} \right) \right] \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \quad (4.101)$$

因此，裂纹面两岸的位移为

$$\frac{\delta}{2} = w \Big|_{\theta=\pi} = -w \Big|_{\theta=-\pi} = -\frac{\tau_0}{G} r \left\{ \sin\theta_p \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \quad (4.102)$$

式中 $\delta$ 为开口位移。

我们也可以用待定系数的方法求 $w$ 。例如设位移的形式为

$$w = \gamma_0 r \left\{ h_1(\theta) \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 + h_2(\theta) \left( \ln \frac{r_p}{r} \right) + O(1) \right\} \quad (4.103)$$

代入(4.2)'的第一式 $\partial w / \partial x = \gamma_x$ ，即

$$\left( \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w = \gamma_x$$

其中右端 $\gamma_x$ 的奇异项只包含在 $\gamma_x^p$ 中( $\gamma_x^s$ 无奇异性，因应力为有限)。对于主塑性区Ⅱ右端 $\gamma_x^p$ 用(4.91)第一式代入，比较上式两端展开式 $(\ln(\gamma_p/r))^2$ 与 $\ln(r_p/r)$ 项的系数，得到

$$\cos\theta h_1(\theta) - \sin\theta h_1'(\theta) = 0 \quad (4.104)$$

$$\cos\theta \{ h_2(\theta) - 2h_1(\theta) \} - \sin\theta h_2'(\theta) = -\sin\theta$$

上式与§3非定常扩展时的(3.27)式完全相同。仿照(3.27)式的解法，得到解 $h_1(\theta)$ 与 $h_2(\theta)$ 同(3.28)，因而(4.103) $w$ 式对于主塑性区Ⅱ成为

$$w = \gamma_0 r \left\{ \frac{1}{2} \sin\theta \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 + \sin\theta \left( C_2 - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \right) \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \quad (4.105)$$

式中 $C_2$ 为积分常数，在这里的局部解法中定不出来。但是我们在§3中曾得到过定常扩展状态主塑性区裂纹延长线上的解(3.43)'



$$\gamma_{\theta} = \gamma_0 \left\{ \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 + \ln \frac{r_p}{r} + 1 \right\} \quad (\theta = 0) \quad (3.43)'$$

我们可以通过 $\gamma_{\theta}$ 的比较而得到上述的积分常数 $C_2$ 。由(4.105)式的位移 $w$ 可计算出 $\gamma_{\theta}$ ：

$$\gamma_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \gamma_0 \left\{ \frac{1}{2} \cos \theta \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 + \left[ \cos \theta \left( C_2 - 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} \right) + 1 - \cos \theta \right] \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\}$$

在裂纹延长线上（令 $\theta = 0$ ），有

$$\gamma_{\theta} = \gamma_0 \left\{ \frac{1}{2} \left( \ln \frac{r_p}{r} \right)^2 + C_2 \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\}$$

与(3.43)'式比较，可知 $C_2 = 1$ 。于是(4.105)式就变成前面的(4.100)式。(4.101)式的 $w$ 也可以同样用待定系数的方法，并考虑在区域交界线上 $w$ 连续的条件而得到。

在第二章(3.16)中曾得到理想弹塑性Ⅲ型静止裂纹小范围屈服解中尖端开口位移为 $(2/\pi)K_{II}^2/G\tau_0$ 。但是对于非定常的稳定扩展裂纹由本章的(3.29)式及对于定常扩展状态的(4.100)与(4.101)式，都可以看出当 $r = 0$ 时 $w = 0$ ，也就是说扩展裂纹尖端的开口位移为零<sup>1)</sup>。裂纹面两岸各点的位移见(4.102)式，所以对于扩展裂纹来说，“开口位移”的概念应该是一条通过尖端的位移曲线，且因 $r \rightarrow 0$ 时 $d\delta/dr \rightarrow \infty$ ，在裂纹尖端不形成尖的开口角。

### 5. 尖端附近各区的应力率、应变率与位移率

根据各区的应力、应变（弹性与塑性部分）与位移的表

1) 在Chitaley与McClintock<sup>[122]</sup>文中所给出的定常扩展裂纹尖端开口位移 $(0.15/\pi)K_{II}^2/G\tau_0$ 是错误的，开口位移应为零。

达式, 利用定常条件 (4.6), 可得各区的应力率 $\pi_x, \pi_y$ , 应变率 (弹性部分 $\Gamma_x^e, \Gamma_y^e$ 与塑性部分 $\Gamma_x^p, \Gamma_y^p$ ) 与位移率 $\dot{w}$ 。结果如下: (注意 $d/dt = d/d\alpha$ )

主塑性区 II ( $0 \leq \theta \leq \theta_p$ )

$$\left. \begin{aligned} \pi_x &= G\Gamma_x^e = -\frac{\tau_0}{r} \sin\theta \cos\theta \\ \pi_y &= G\Gamma_y^e = -\frac{\tau_0}{r} \sin^2\theta \\ \Gamma_x^p &= \frac{\tau_0}{Gr} \left\{ -\sin\theta \cos\theta \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \\ \Gamma_y^p &= \frac{\tau_0}{Gr} \left\{ \cos^2\theta \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \right\} \\ \dot{w} &= \frac{\tau_0}{G} \sin\theta \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \end{aligned} \right\} (4.106)$$

卸载区 III ( $\theta_p \leq \theta \leq \pi - \theta_p$ )

$$\left. \begin{aligned} \pi_x &= G\Gamma_x^e = -\frac{\tau_0}{r} \sin\theta_p \cos\theta + O(1) \\ \pi_y &= G\Gamma_y^e = -\frac{\tau_0}{r} \sin\theta_p \sin\theta + O(1) \\ \Gamma_x^p &= 0, \quad \Gamma_y^p = 0 \\ \dot{w} &= \frac{\tau_0}{G} \sin\theta_p \ln \frac{r_p}{r} + O(1) \end{aligned} \right\} (4.107)$$

第二塑性区 IV ( $\pi - \theta_p \leq \theta \leq \pi$ )

$$\left. \begin{aligned} \pi_x &= G\Gamma_x^e = 0 \\ \pi_y &= G\Gamma_y^e = 0 \\ \Gamma_x^p &= -\frac{\tau_0}{Gr} \sin\theta_p + O(1) \\ \Gamma_y^p &= 0 \end{aligned} \right\} (4.108)$$

同(4.107)式

在结束本节 (§4) 时, 我们指出以下几点:

(1) 本节 (§4) 所讨论的问题和前节 (§3) 的第2小节所讨论的问题是一样的。在那里只讨论了主塑性区里的解 (适用于全区的解), 而这里则讨论了尖端附近各个区的解 (但仅限于局部解)。和 §3 的第2小节一样, 这里完全没有涉及到具体材料的断裂性质, 即未涉及到断裂准则问题。

(2) 和前节 (§3) 的第2小节一样, 在定常扩展问题解中出现的唯一尺度是  $r_p$ ——主塑性区沿裂纹延长线上的尺寸。 $r_p$  的大小取决于距定常扩展裂纹尖端远处的场。 $r_p$  的大小与外场的关系, 不是局部解析所能解决的问题。我们这里对外场根本未做任何假定 (例如, 小范围或大范围屈服,  $K$  场,  $J$  场等)。但前面曾指出, 对于小范围屈服情况, 数值计算曾得到  $r_p$  与外场  $K$  的近似关系 (3.45) 式。

## §5 ■型裂纹基于开口位移的 稳定扩展准则

在 §3 的第3小节中曾介绍过基于应变的稳定扩展准则 (3.47) 式, 这是近尖端断裂准则的一种, 另一种常用的就是基于开口位移的稳定扩展准则。

基于开口位移的稳定扩展准则有两种提法。一种提法是: 在稳定扩展过程中, 裂纹尖端后方一定距离  $\rho_m$  处的开口位移值保持常数, 即

$$(\delta)_{r=\rho_m} = \delta_c \quad (5.1)$$

式中  $\rho_m$ ,  $\delta_c$  均为材料常数。另一种提法是: 在稳定扩展过程

中，尖端附近的裂纹面开口形状保持不变，即

$$\delta(r, a) = \text{与 } a \text{ 无关的 } r \text{ 函数 } \delta(r) \quad (5.2)$$

显然，后一种提法 (5.2) 包含了前一种提法 (5.1)。

下面我们只讨论小范围屈服情况。仍旧和 § 4 一样，把裂纹扩展量取作“时间”增量，即  $dt = da$ ， $i = 1$ 。

对于静止裂纹（小范围屈服），由第二章 (3.16) 式，

$$\dot{\delta} = \frac{4}{\pi} \frac{\dot{J}}{\tau_0} \quad (5.3)$$

而对于定常扩展裂纹，由 (4.108) 的  $\dot{w}$  式，并只取奇异项：

$$\dot{\delta} = 2\dot{w} = \frac{2\tau_0}{G} \sin\theta_p \ln \frac{r_p}{r} \quad (5.4)$$

类似于 (3.61) 式，我们假定在稳定扩展的全过程，裂纹表面上任一物质质点的开口位移增量是由“准定常扩展项”与“静止裂纹项”叠加而成，即

$$\dot{\delta} = \frac{2\tau_0}{G} \sin\theta_p \ln \frac{r_p}{r} + \frac{4}{\pi} \frac{\dot{J}}{\tau_0} \quad (5.5)$$

式中  $r_p = r_p(a)$  为即时的  $r_p$  值。为了便于与以后的 I 型问题比较，上式可写作：

$$\dot{\delta} = \beta \frac{\tau_0}{G} \ln \frac{r_p}{r} + \alpha \frac{\dot{J}}{\tau_0} \quad (5.5)'$$

式中  $\dot{J} = dJ/da$ ，

$$\alpha = \frac{4}{\pi}, \quad \beta = 2\sin\theta_p = 0.67456 \quad (5.6)$$

(5.5)' 式乘以  $da$  以后，得到开口位移增量

$$d\delta = \beta \frac{\tau_0}{G} \ln \frac{r_p}{r} da + \alpha \frac{dJ}{\tau_0} \quad (5.5)''$$

但是必须提出，(3.61) 或 (3.62) 式所表示的关系，

即裂纹延长线上任一物质质点的应变增量为两部分的叠加，是在§3中已经证明了的，而这里(5.5)'或(5.5)''所表示的关系，即裂纹表面上任一物质质点的开口位移增量也为两部分的叠加，并未得到过证明。对于I型情况，类似于这里的(5.5)'的公式是Rice<sup>[129]</sup>于1974年提出并作了一些说明，以后Rice与Sorensen<sup>[128]</sup>、Rice，Drugan与Sham<sup>[129]</sup>及Rice<sup>[130]</sup>曾把此种叠加类型的开口位移增量公式用于I型裂纹的稳定扩展过程。

在裂纹扩展过程中，开口位移 $\delta = 2w$ 是 $r$ 和 $a$ 的函数。这里 $w$ 指裂纹面( $\theta = \pi$ )的位移。

故

$$\delta = 2(w)_{\theta=\pi}, \quad (5.7)$$

$\dot{w}$ 的表达式已见(3.22)式，即(令 $\dot{a} = 1$ )

$$\dot{w} = -\cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial a} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial a} \quad (5.8)$$

对于裂纹面 $\theta = \pi$ ，故 $r = -x$ ，则有

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial a} \quad (\theta = \pi) \quad (5.9)$$

$\partial w / \partial r$ 与 $\partial w / \partial a$ 的意义示于图5.1。因 $\partial w / \partial r$ 具有对数奇异性 $\sim \ln(r_f/r)$ （定常扩展状态见(4.102)式），故在(5.9)式右端， $\partial w / \partial r$ 为主奇异项。在求局部解时，只取主奇异项，即

$$\dot{w} \approx \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\theta = \pi) \quad (5.10)$$

(5.10)式对于定常扩展状态是正确的（见(3.35)式），

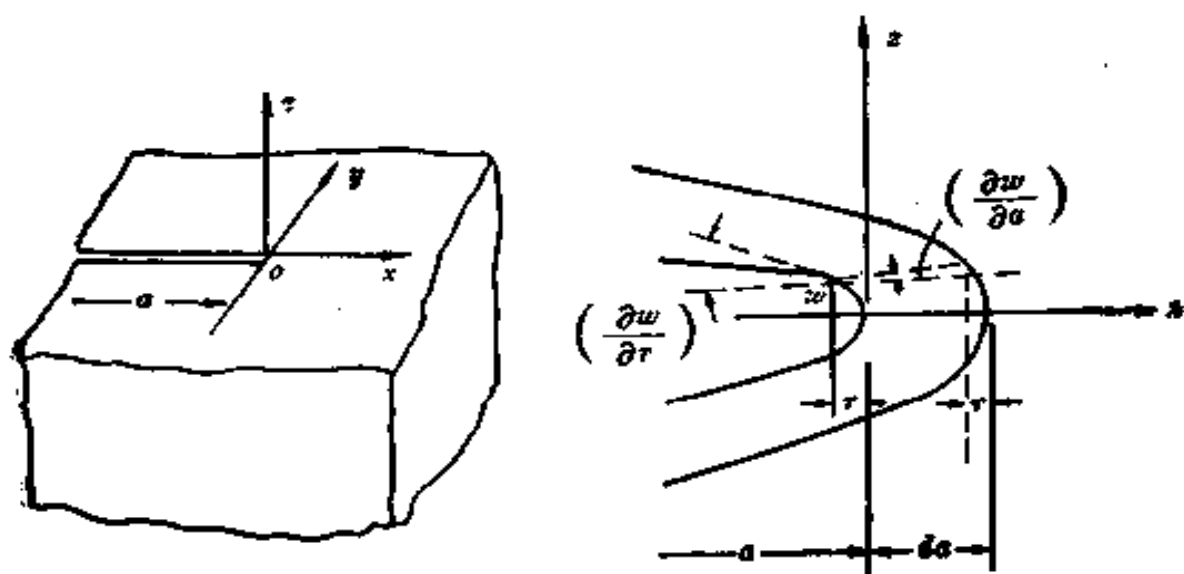


图 5.1  $\frac{\partial w}{\partial r}$  与  $\frac{\partial w}{\partial a}$  示意图

而对于非定常扩展则是在尖端附近近似正确。由 (5.7) 与 (5.10) 式, 显然

$$\dot{\delta} \approx \frac{\partial \delta}{\partial r} \quad (5.11)$$

再由 (5.5)' 与 (5.11) 式, 有

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} \approx \beta \frac{\tau_0}{G} \ln \frac{r_p}{r} + \alpha \frac{\dot{J}}{\tau_r} \quad (5.12)$$

式中, 在稳定扩展过程中  $r_p$  与  $J$  有 (3.64) 的近似关系:

$$r_p = \frac{2}{\pi \tau_0 \gamma_0} J$$

或为了与以后 I 型问题比较, 写作

$$r_p = \lambda_r \frac{J}{\tau_0 \gamma_0} \quad (5.13)$$

式中  $\lambda_r = 2/\pi$ 。将 (5.12) 式对  $r$  积分, 并注意尖端位移应为

零 ( $\delta = 0$ , 当  $r = 0$ ) , 得到

$$\delta = \beta \frac{\tau_p}{G} r \left( 1 + \ln \frac{r_p}{r} \right) + \alpha \frac{\dot{J}}{\tau_0} r$$

此式可记作

$$\delta = \beta \frac{\tau_0}{G} r \ln \frac{\rho}{r} \quad (5.14)$$

式中

$$\rho = r_p \exp \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\dot{J}G}{\tau_0^2} \right) \quad (5.15)$$

将 (5.13) 式代入 (5.15) 式,  $\rho$  可以写作 ( $e$  表示自然对数底)

$$\rho = \lambda_p \frac{J e}{\tau_0 \gamma_0} \exp \left( \frac{\alpha}{\beta} - \frac{G}{\tau_0^2} \frac{dJ}{da} \right) \quad (5.15)'$$

(5.14) 式为开口位移曲线的方程, 因此开口位移曲线的形状与参数  $\rho$  有关。根据稳定扩展准则 (5.2) 式, 开口位移曲线在整个稳定扩展过程中形状保持不变, 故  $\rho$  应为一材料常数。因此 (5.15)' 式为  $J$  的微分方程。把  $dJ/da$  解出, 它的标准形式为

$$\frac{dJ}{da} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\tau_0^2}{G} \ln \left( \frac{\rho \tau_0^2}{e \lambda_p G J} \right) \quad (5.16)$$

在起裂时的初始条件为, 当  $a = a_0$  时

$$J = J_c \quad (5.17)$$

在定常扩展状态,  $J \rightarrow J_{ss}$ ,  $dJ/da \rightarrow 0$ 。故由 (5.16) 式可定出定常扩展状态的  $J$  值:

$$J_{ss} = \frac{\rho \tau_0^2}{e \lambda_p G} \quad (5.18)$$

式中右端  $\lambda_p = 2/\pi$ ,  $\rho$ 、 $\tau_0$ 、 $G$  均为材料常数。于是微分方程

(5.16) 可写作

$$\frac{dJ}{da} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\tau_i^2}{G} \ln \frac{J_{ss}}{J} \quad (5.16)'$$

以  $T_0$  表示初始撕裂模量,

$$T_0 = \frac{G}{\tau_i^2} \left( \frac{dJ}{da} \right)_c \quad (5.19)$$

以  $j$  表示定常扩展状态  $J_{ss}$  与起裂  $J_c$  之比值:

$$j = \frac{J_{ss}}{J_c} \quad (5.20)$$

将 (5.16)' 用于起裂时刻, 可得  $T_0$  与  $j$  的关系:

$$T_0 = \frac{\beta}{\alpha} \ln j \quad (5.21)$$

现在来解微分方程 (5.16)'. 令新变量

$$\begin{aligned} \xi &= \ln \frac{J_{ss}}{J} = \ln \frac{J_{ss}}{J_c} - \ln \frac{J}{J_c} \\ &= \ln j - \ln \frac{J}{J_c} = \frac{\alpha T_0}{\beta} - \ln \frac{J}{J_c} \end{aligned} \quad (5.22)$$

则

$$J = J_{ss} e^{-\xi}, \quad \frac{dJ}{da} = -J_{ss} e^{-\xi} \frac{d\xi}{da}$$

微分方程 (5.16)' 成为

$$-\frac{1}{\xi} e^{-\xi} d\xi = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\tau_i^2}{G J_{ss}} da \quad (5.16)''$$

起裂时的初始条件 (5.17) 成为, 当  $a = a_0$  时

$$\xi = \ln \frac{J_{ss}}{J_c} = \ln j = \frac{\alpha T_0}{\beta} \quad (5.17)'$$

积分 (5.16)'', 得到



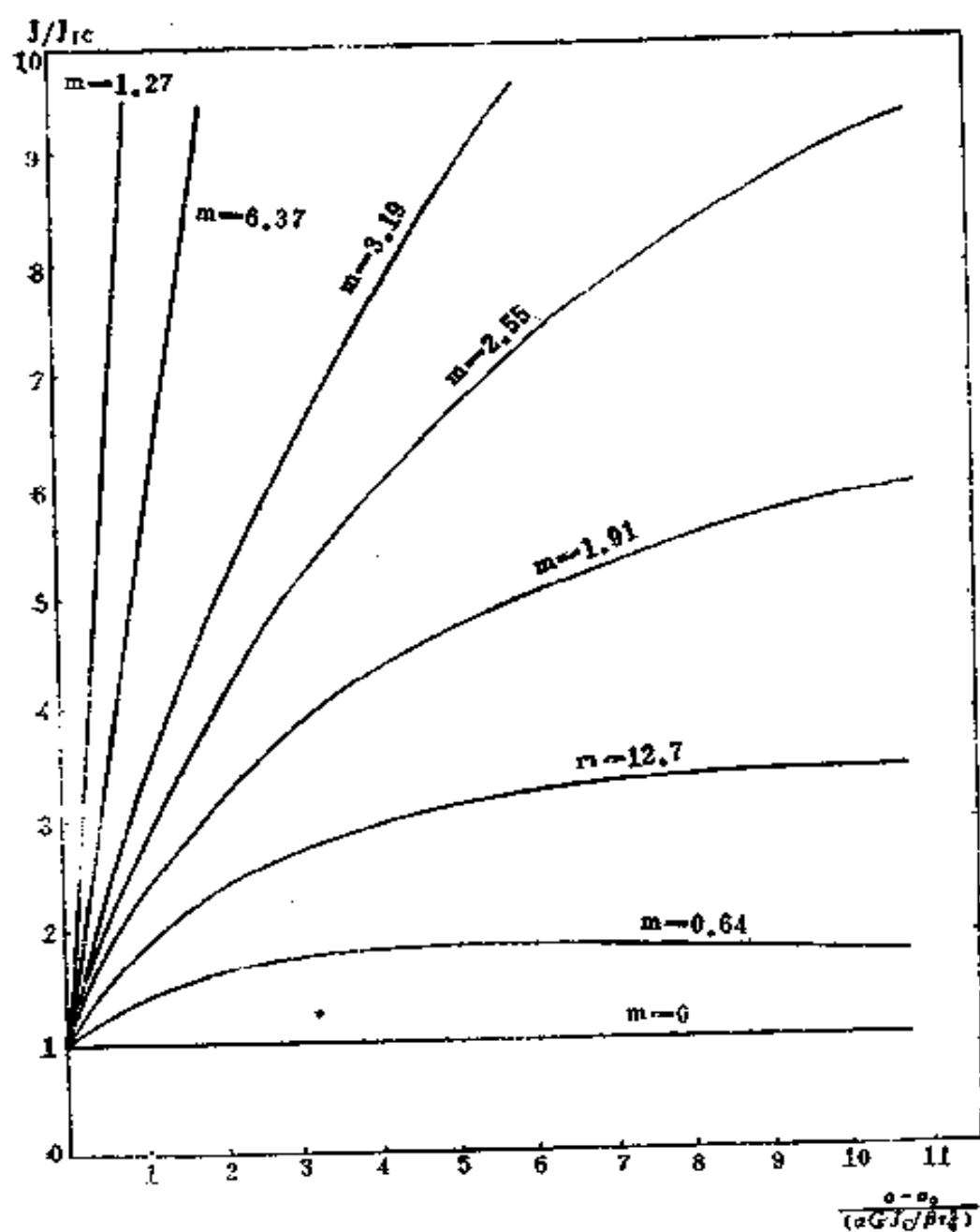


图 5.2 无量纲阻力曲线  $\left( m = \frac{a}{\beta} T_0 \right)$

$$\int_{\ln \frac{J_{ss}}{J}}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-\xi} d\xi - \int_{\frac{\alpha T_0}{\beta}}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-\xi} d\xi = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\tau_0^2}{GJ_{ss}} (a - a_0) \quad (5.23)$$

令

$$E_1(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-\eta}}{\eta} d\eta$$

则 (5.23) 可写成以下形式:

$$E_1\left(\ln \frac{J_{ss}}{J}\right) - E_1\left(\frac{\alpha}{\beta} T_0\right) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\tau_0^2}{GJ_{ss}} (a - a_0)$$

即

$$E_1\left(\frac{\alpha T_0}{\beta} - \ln \frac{J}{J_c}\right) - E_1\left(\frac{\alpha}{\beta} T_0\right) = \frac{\beta}{\alpha j} \frac{\tau_0^2}{GJ_c} (a - a_0) \quad (5.23)'$$

式中  $T_0$  与  $j$  间有关系 (5.21) 式,  $\alpha$  与  $\beta$  见 (5.6) 式。以  $\alpha T_0/\beta$  为参数,  $J/J_c$  随  $(a - a_0)/(\alpha GJ_c/\beta \tau_0^2)$  变化的曲线, 即无量纲阻力曲线示于图 5.2。这就是在小范围屈服情况下, 由基于位移的稳定扩展准则 (5.2) 式导出的  $J$  阻力曲线。在上述推导过程中曾经用到  $\nu_p$  与  $J$  的近似关系 (5.13) 式, 这个关系只适用于小范围屈服情况。

## § 6 理想弹塑性材料平面

### 应变问题的提法

在工程实际问题中 I 型问题比 III 型问题更为重要。下一节 (§ 7) 中将讨论与 § 4 的 III 型相应的平面应变 I 型问题。虽然求解的思路相同, 但我们将要看到 I 型问题比 III 型

问题要复杂得多<sup>1)</sup>。本节将为下一节 (§ 7) 的讨论准备必要的基础。

### 1. 平面正交曲线坐标中的一些基本关系

为了以后的需要, 在这里列出平面正交曲线坐标  $\alpha, \beta$  (图4.2) 中的一些基本关系。

在平面正交曲线坐标中<sup>2)</sup>应变分量  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha\beta}$  通过沿坐标  $\alpha, \beta$  方向的位移分量  $u, v$  的表示式为:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{R_1}, & \varepsilon_\beta &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{R_2} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + -\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \right\}\end{aligned}\quad (6.1)$$

式中  $A, B$  为 Lamé 参数 (见 (4.16) 式),  $R_1, R_2$  为坐标曲线的曲率半径 (见图4.2及 (4.21), (4.22) 式)。转角分量为:

$$\left. \begin{aligned}\omega_\alpha &= \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} \\ \omega_\beta &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{R_2}\end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

这里  $\omega_\alpha$  表示  $\alpha$  线的转角 (向着  $\beta$  线时为正),  $\omega_\beta$  表示  $\beta$  线的转角 (向着  $\alpha$  线时为正)。显然有

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\omega_\alpha + \omega_\beta) \quad (6.3a)$$

可以定义平均转角 (或旋量)  $\delta$ :

1) 本节 § 6 与下一节 (§ 7) 的叙述依据高玉臣文[131]稍有修改补充。为简单计, 下文应力与应变分量  $\sigma_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\alpha\alpha}$  记作  $\sigma_\alpha, \varepsilon_\alpha$ 。

2)  $\alpha, \beta$ , 均为固定坐标, 不随裂纹尖端而移动。

$$\delta = \frac{1}{2}(\omega_a - \omega_\beta) \quad (6.3b)$$

则有

$$\omega_a = \varepsilon_{a\beta} + \delta, \quad \omega_\beta = \varepsilon_{a\beta} - \delta \quad (6.4)$$

利用 (4.22), (4.25) 式可以验证应变分量 (6.1) 与转角分量 (6.2) 必满足恒等式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \beta} - \frac{2}{A} \frac{\partial \varepsilon_{a\beta}}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} (\varepsilon_\beta - \varepsilon_a) \\ - \frac{2}{R_2} \varepsilon_{a\beta} + \frac{1}{A} \frac{\partial \omega_a}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{1}{A} \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{2}{B} \frac{\partial \varepsilon_{a\beta}}{\partial \beta} - \frac{1}{R_2} (\varepsilon_a - \varepsilon_\beta) \\ - \frac{2}{R_1} \varepsilon_{a\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \beta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

将 (6.4) 式的  $\omega_a$  与  $\omega_\beta$  代入 (6.5) 后, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \beta} - \frac{1}{R_1} (\varepsilon_\beta - \varepsilon_a) - \frac{2}{R_2} \varepsilon_{a\beta} \\ - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon_{a\beta} - \delta) = 0 \\ \frac{1}{A} \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_2} (\varepsilon_a - \varepsilon_\beta) - \frac{2}{R_1} \varepsilon_{a\beta} \\ - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (\varepsilon_{a\beta} + \delta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)'$$

由 (6.5)' 式消去  $\delta$  后, 可得变形协调方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{B}{A} \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} - \frac{B}{R_2} (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) - \frac{2B}{R_1} \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{A}{B} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} - \frac{A}{R_1} (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) - \frac{2A}{R_2} \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

利用 (4.22) 式, 可将上式写成以下形式:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \varepsilon_\beta) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_\alpha - A \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} (A \varepsilon_\alpha) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_\beta - B \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_{\alpha\beta} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.6)'$$

(6.6)' 式除以  $AB$  后, 利用 (4.22) 式, 又可化成以下形式:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} \right) \\ & - \frac{2}{AB} \frac{\partial^2 \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{AR_2} \frac{\partial \varepsilon_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{BR_1} \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \beta} \\ & + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}{R_2} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}{R_1} \right) \\ & - 2 \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{R_1} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{R_2} \right) \right] \\ & + \left( -\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta) - \frac{4}{R_1 R_2} \varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \quad (6.6)''$$

在平面正交曲线坐标中的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B\sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A\sigma_\beta) + \frac{\partial A}{\partial B} \sigma_{\alpha\beta} \right. \\ \left. - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \sigma_\beta \right] + F_1 = 0 \\ \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B\sigma_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A\sigma_\beta) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \sigma_{\beta\alpha} \right. \\ \left. - \frac{\partial A}{\partial \beta} \sigma_\alpha \right] + F_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

式中 $\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$ 为应力分量,  $F_1$ ,  $F_2$ 为体积力分量。设 $F_1 = F_2 = 0$ , 应力分量通过应力函数 $\phi$ 的表示式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \\ \sigma_\beta &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \\ \sigma_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \\ &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \\ &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

可以验证, (6.8) 的应力分量使平衡方程 (6.7) 成为恒等式 (设 $F_1 = F_2 = 0$ )。由 $\sigma_\alpha + \sigma_\beta$ 可以得到平面上的调和算子表示式:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \\
& = \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{A} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{B} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) \right\} \quad (6.9)
\end{aligned}$$

以上在平面正交曲线坐标 $\alpha, \beta$ 中的各种关系式都可以从薄壳理论（例如〔132〕或〔133〕）中的相应关系式把平面作为曲面的特例而得到。

作为平面正交曲线坐标的特例，若采用图4.3所示的 $n, s$ 坐标，则 $A, B, R_1, R_2$ 如（4.26），（4.27）式。

应变与转角分量的表达式（6.1）与（6.2）成为

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_n &= \frac{\partial u}{\partial n} \\
\varepsilon_s &= \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \left( \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{R_{20}} \right) \\
\varepsilon_{ns} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial u}{\partial s} + \left( 1 + \frac{n}{R_{20}} \right) \right. \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{v}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \right) \Big\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{v}{R_{20} + n} \right\}
\end{aligned} \right\} \quad (6.10a)$$

$$\left. \begin{aligned}
\omega_n &= \frac{\partial v}{\partial n} \\
\omega_s &= \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \left( \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{R_{20}} \right)
\end{aligned} \right\} \quad (6.10b)$$

恒等式 (6.5) 成为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial s} - 2 \frac{\partial \varepsilon_{ns}}{\partial n} - \frac{2}{R_{20} + n} \varepsilon_{ns} \\ & + \frac{\partial \omega_n}{\partial n} = 0 \\ & - \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial n} - \frac{2}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \varepsilon_{ns}}{\partial s} - \frac{1}{R_{20} + n} (\varepsilon_n - \varepsilon_s) \\ & + \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \omega_s}{\partial s} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.10c)$$

协调方程 (6.6)' 可化为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial n^2} (B \varepsilon_s) - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{20}} \varepsilon_n \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} \varepsilon_{ns} + \\ & + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial s} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{B R_{20}} \varepsilon_{ns} \right) = 0 \quad (6.11) \end{aligned}$$

利用由 (4.26) 式导出的关系:

$$\frac{\partial B}{\partial s} = n \frac{d^2 \vartheta}{ds^2}, \quad \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{B} \right) = - \frac{n}{B^2} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2}$$

协调方程 (6.11) 可写成:

$$\begin{aligned} & B \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial n^2} + \frac{2}{R_{20}} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial n} - \frac{1}{R_{20}} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial n} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ns}}{\partial n \partial s} \\ & + \frac{1}{B} \frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial s^2} - \frac{n}{B^2} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial s} - \frac{2}{B R_{20}} \frac{\partial \varepsilon_{ns}}{\partial s} \\ & - \frac{2}{B} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \varepsilon_{ns} + \frac{2n}{B^2 R_{20}} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \varepsilon_{ns} = 0 \quad (6.11)' \end{aligned}$$

由 (6.8) 式, 在  $n, s$  坐标中应力分量通过应力函数的表



示式为

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_n &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) + \frac{1}{BR_{20}} \frac{\partial \phi}{\partial n} \\
 &= \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} - \frac{n}{B^3} \frac{d^2 \theta}{ds^2} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\
 &\quad + \frac{1}{R_{20} + n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \\
 \sigma_s &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \\
 \sigma_{ns} &= - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) \\
 &= - \frac{1}{B} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial s} + \frac{1}{B^2 R_{20}} \frac{\partial \phi}{\partial s}
 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

## 2. 基本方程

选固定直角坐标  $X, Y$  与以裂纹尖端为原点的动直角坐标  $x, y$  如图3.1所示。平衡方程（设无体积力作用）为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (6.13)$$

应力分量通过应力函数  $\phi$  的表示式为

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
 \sigma_{xy} &= - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \quad (6.14)$$

在平面应变问题中  $\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ 。应变分量  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  通过沿  $x, y$  方向位移  $u_x, u_y$  表示式为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (6.15)$$

变形协调方程为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (6.16)$$

按“J<sub>2</sub>流动理论”，变形律可表示如下：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^{*e} + \varepsilon_x^{*p}, & \varepsilon_y &= \varepsilon_y^{*e} + \varepsilon_y^{*p} \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z^{*e} + \varepsilon_z^{*p}, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^{*e} + \varepsilon_{xy}^{*p} \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

式中带号“\*e”号的表示弹性变形部分，带“\*p”号的表示塑性变形部分，加“\*”号是为了与以后引进的不带“\*”号的拟变形分量（见（6.31）式）相区别。弹性应变与应力服从弹性虎克定律：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{*e} &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y^{*e} &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \\ \varepsilon_z^{*e} &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \varepsilon_{xy}^{*e} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

而塑性应变增量则与应力偏量成比例：

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^{*p} &= \frac{1}{3} \lambda (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) da \\ d\varepsilon_y^{*p} &= \frac{1}{3} \lambda (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) da \\ d\varepsilon_z^{*p} &= \frac{1}{3} \lambda (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) da \\ d\varepsilon_{xy}^{*p} &= \lambda \sigma_{xy} da \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$



利用定常条件，同时把  $\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$  记作

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) - \left(\frac{1}{2} - \nu\right)(\sigma_x + \sigma_y)$$

则 (6.21) 式可写作

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \frac{2}{3}\lambda E [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ & = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \nu\right)\lambda E(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (6.22)$$

式中的  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  和其它一切的物理量一样，在定常扩展状态下都只是  $x$ ,  $y$  的函数，而与“时间”  $\alpha$  无关。令  $A$  为每一物质质点开始进入塑性以后塑性流动因子  $\lambda$  对“时间”的累积积分，则在定常扩展状态， $A$  可表示为

$$A = \int_x^{x_A(y)} \lambda(x, y) dx \quad (6.23)$$

式中  $x_A = x_A(y)$  表示主塑性区与弹性区交界线  $\Gamma_A$  上  $A$  点的坐标 (图6.1)，积分沿着平行于  $x$  轴的直线 ( $y = \text{const}$ ) 进行。(6.22) 式乘以积分因子  $\exp\left(-\frac{2}{3}EA\right)$  后得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{\frac{2}{3}EA} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \right] + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \nu\right)\lambda E e^{\frac{2}{3}EA} (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \end{aligned}$$

将此式对  $x$  积分，并注意在交界线  $\Gamma_A$  (图6.1) 上  $E\varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ ，得到

$$e^{\frac{2}{3}EA} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \nu\right)$$

$$- \nu) E \int_x^x \lambda e^{\frac{2}{3} E \lambda} (\sigma_x + \sigma_y) dx$$

即

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) + \left(-\frac{1}{2} - \nu\right) \sigma_p \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \left(-\frac{1}{2} - \nu\right) [\sigma_p - (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (6.24) \end{aligned}$$

式中

$$\sigma_p = -\frac{2}{3} E e^{-\frac{2}{3} E \lambda} \int_x^x \lambda e^{\frac{2}{3} E \lambda} (\sigma_x + \sigma_y) dx \quad (6.25)$$

(6.24) 式中的  $\left(-\frac{1}{2} - \nu\right) \sigma_p$  项表示由于塑性变形给  $\sigma_x$  带来的变化。可以验证,  $\sigma_p$  满足微分方程:

$$-\frac{\partial \sigma_p}{\partial x} + \frac{2}{3} \lambda E \sigma_p = \frac{2}{3} \lambda E (\sigma_x + \sigma_y) \quad (6.26)$$

现在来求应变分量  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_{xy}$  通过应力分量  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$  与塑性流动因子  $\lambda$  的表示式。将 (6.24) 式代入弹性应变分量 (6.18), 得:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^e &= \varepsilon_x - \frac{\nu}{E} \left(-\frac{1}{2} - \nu\right) \sigma_p \\ \varepsilon_y^e &= \varepsilon_y - \frac{\nu}{E} \left(-\frac{1}{2} - \nu\right) \sigma_p \\ \varepsilon_{xy}^e &= \left(-\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{1}{E} \sigma_p \\ \varepsilon_{xy}^e &= \varepsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

式中  $\varepsilon_x^e$ ,  $\varepsilon_y^e$ ,  $\varepsilon_{xy}^e$  表示在无塑性变形情况下由弹性虎克定律所得的表达式, 即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^e &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_x - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_y^e &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_x \\ \varepsilon_{xy}^e &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

(6.27) 式右端含  $\sigma_p$  的项表示塑性变形带来的变化。由 (6.19) 式及定常条件 (4.6)，可得

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \varepsilon_x^{*p}}{\partial x} &= \frac{1}{3} \lambda (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \\ -\frac{\partial \varepsilon_y^{*p}}{\partial x} &= \frac{1}{3} \lambda (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) \\ -\frac{\partial \varepsilon_z^{*p}}{\partial x} &= \frac{1}{3} \lambda (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \\ -\frac{\partial \varepsilon_{xy}^{*p}}{\partial x} &= \lambda \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6.29)$$

对  $x$  积分，并注意在交界线  $\Gamma_A$  上 (图6.1) 塑性应变为零，得到

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^{*p} &= \int_x^{x_A} \frac{1}{3} \lambda (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) dx \\ \varepsilon_y^{*p} &= \int_x^{x_A} \frac{1}{3} \lambda (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) dx \\ \varepsilon_z^{*p} &= \int_x^{x_A} \frac{1}{3} \lambda (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) dx \\ \varepsilon_{xy}^{*p} &= \int_x^{x_A} \lambda \sigma_{xy} dx \end{aligned} \right\} \quad (6.29)'$$

将 (6.24)  $\sigma_x$  式代入后，并利用 (6.26) 式，得到

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x^*{}^p &= \frac{1}{2} \int_x^A \lambda(\sigma_x - \sigma_y) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \frac{1}{E} \sigma_p \\
 \varepsilon_y^*{}^p &= \frac{1}{2} \int_x^A \lambda(\sigma_y - \sigma_x) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \frac{1}{E} \sigma_p \\
 \varepsilon_x^*{}^p &= - \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \frac{1}{E} \sigma_p \\
 \varepsilon_{xy}^*{}^p &= \int_x^A \lambda \sigma_{xy} dx
 \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

将弹性应变 (6.27) 与塑性应变 (6.30) 式代入 (6.17) 式叠加后, 可得到

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^p, & \varepsilon_y &= \varepsilon_y^e + \varepsilon_y^p \\
 \varepsilon_x &= 0, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^e + \varepsilon_{xy}^p
 \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

式中  $\varepsilon_x^e$ ,  $\varepsilon_y^e$ ,  $\varepsilon_{xy}^e$  见 (6.28) 式, 而

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_x^p &= \frac{1}{2} \int_x^A \lambda(\sigma_x - \sigma_y) dx + \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \frac{1}{E} \sigma_p \\
 \varepsilon_y^p &= \frac{1}{2} \int_x^A \lambda(\sigma_y - \sigma_x) dx + \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \frac{1}{E} \sigma_p \\
 \varepsilon_{xy}^p &= \int_x^A \lambda \sigma_{xy} dx
 \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

注意 (6.31) 式右端两部分已经不是原来 (6.17) 意义的弹性应变与塑性应变，而是它们的重新组合。以后可称  $\varepsilon_x^e, \varepsilon_y^e, \varepsilon_{xy}^e$  为拟 (pseudo) 弹性变形，称  $\varepsilon_x^p, \varepsilon_y^p, \varepsilon_{xy}^p$  为拟塑性变形。

对于理想弹塑性材料，Mises屈服条件为

$$\frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 = \tau_0^2$$

式中  $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$ ， $\tau_0$  为材料屈服限。将 (6.24) 式  $\sigma_x$  代入上式并化简后，得到

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_{xy}^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \nu\right)^2(\sigma_x + \sigma_y - \sigma_p)^2 = \tau_0^2 \quad (6.33)$$

以后我们以应力函数  $\phi$  为未知函数，求解时需要利用变形协调方程 (6.16)。

将 (6.31) 的  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  代入协调方程 (6.16)，其中拟弹性变形  $\varepsilon_x^e, \varepsilon_y^e, \varepsilon_{xy}^e$  利用 (6.28) 与 (6.14) 通过应力函数  $\phi$  表示，则协调方程 (6.16) 成为：

$$\frac{1 - \nu^2}{E} \nabla^2 \nabla^2 \phi + P(\varepsilon^p) = 0 \quad (6.34)$$

式中记号  $P(\varepsilon^p)$  表示：

$$P(\varepsilon^p) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x^p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^p}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^p}{\partial x \partial y} \quad (6.35)$$

在正交曲线坐标  $\alpha, \beta$  中， $P(\varepsilon^p)$  的表达式为：



$$\begin{aligned}
P(\varepsilon^p) = & \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B\varepsilon_\beta^p) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_\alpha^p \right. \right. \\
& \left. \left. - A \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^p}{\partial \beta} - 2 \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^p \right] \right\} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \\
& \times \left\{ \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} (A\varepsilon_\alpha^p) - \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_\beta^p - B \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}^p}{\partial \alpha} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_{\alpha\beta}^p \right] \right\} \quad (6.36)
\end{aligned}$$

可以看出, (6.36) 就是协调方程 (6.6)' 左端的塑性部分 (除以  $AB$ )。

在  $n, s$  坐标中,  $P(\varepsilon^p)$  的表达式则为:

$$\begin{aligned}
P(\varepsilon^p) = & \frac{1}{B} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial n^2} (B\varepsilon_s^p) - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{R_{20}} \varepsilon_n^p \right) \right. \\
& - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ns}^p}{\partial n \partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial s} \right) \\
& \left. - 2 \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{BR_{20}} \varepsilon_{rs}^p \right) \right\} \\
= & \frac{1}{B} \left\{ B \frac{\partial^2 \varepsilon_s^p}{\partial n^2} + \frac{2}{R_{20}} \frac{\partial \varepsilon_s^p}{\partial n} - \frac{1}{R_{20}} \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial n} \right. \\
& - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ns}^p}{\partial n \partial s} + \frac{1}{B} \frac{\partial^2 \varepsilon_n^p}{\partial s^2} - \frac{n}{B^2} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial s} \\
& - \frac{2}{BR_{20}} \frac{\partial \varepsilon_{ns}^p}{\partial s} - \frac{2}{B} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \varepsilon_{ns}^p \\
& \left. + \frac{2n}{B^2 R_{20}} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \varepsilon_{ns}^p \right\} \quad (6.36)'
\end{aligned}$$

可以看出, (6.36)' 就是协调方程 (6.11) 或 (6.11)' 左部

的塑性部分（除以  $B = 1 + \frac{n}{R_2}$ ）。

类似于 §4 Ⅲ型裂纹情况的 (4.10) 式，以后有时为了方便，我们不求解协调方程 (6.34) 本身，而求解“协调方程率”。由定常条件，“协调方程率”也就是协调方程 (6.34) 对  $x$  的负导数，即

$$\frac{1-\nu^2}{E} \nabla^2 \nabla^2 \dot{\phi} + P(\dot{\epsilon}^p) = 0 \quad (6.37)$$

式中  $\dot{\phantom{x}} = d/dt = d/da = -\partial/\partial x$ ,

$$\dot{\phi} = -\partial\phi/\partial x$$

$$\begin{aligned} P(\dot{\epsilon}^p) &= \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_x^p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_y^p}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{xy}^p}{\partial x \partial y} \\ &= - \left[ \frac{\partial}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \epsilon_x^p}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \epsilon_y^p}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial \epsilon_{xy}^p}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.38)$$

由 (6.32) 与 (6.26)，可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x^p &= -\frac{\partial \epsilon_x^p}{\partial x} \\ &= \lambda \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) + \frac{2}{3}\epsilon^2(\sigma_x + \sigma_y - \sigma_p) \right\} \\ \dot{\epsilon}_y^p &= -\frac{\partial \epsilon_y^p}{\partial x} \\ &= \lambda \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) + \frac{2}{3}\epsilon^2(\sigma_x + \sigma_y - \sigma_p) \right\} \\ \dot{\epsilon}_{xy}^p &= -\frac{\partial \epsilon_{xy}^p}{\partial x} = \lambda \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

式中及以后为了书写简单起见, 记  $\epsilon = \frac{1}{2} - \nu$ 。将 (6.39) 式代入 (6.38) 式后, 得到

$$\begin{aligned}
 P(\epsilon^p) = & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \sigma_y + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \sigma_x - 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} \sigma_{xy} \\
 & - \frac{1}{2} (\nabla^2 \lambda) \left\{ \left( 1 - \frac{4}{3} \epsilon^2 \right) (\sigma_x + \sigma_y) \right. \\
 & \left. + \frac{4}{3} \epsilon^2 \sigma_p \right\} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \left\{ \left( 1 + \frac{4}{3} \epsilon^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \right. \\
 & \times (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{4}{3} \epsilon^2 \frac{\partial \sigma_p}{\partial x} \left. \right\} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \left\{ \left( 1 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{4}{3} \epsilon^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{4}{3} \epsilon^2 \frac{\partial \sigma_p}{\partial y} \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \lambda \left\{ \left( 1 + \frac{4}{3} \epsilon^2 \right) \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) \right. \\
 & \left. - \frac{4}{3} \epsilon^2 \nabla^2 \sigma_p \right\}
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

在正交曲线坐标  $\alpha, \beta$  中 (6.38) — (6.40) 的形式各为

$$\begin{aligned}
 P(\epsilon^p) = & \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B \epsilon_{\beta}^p) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \epsilon_{\beta}^p \right. \right. \\
 & \left. \left. - A \frac{\partial \epsilon_{\alpha \beta}^p}{\partial \beta} - 2 \frac{\partial A}{\partial \beta} \epsilon_{\alpha \beta}^p \right] \right\} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \\
 & \times \left\{ \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} (A \epsilon_{\alpha}^p) - \frac{\partial A}{\partial \beta} \epsilon_{\alpha}^p - B \frac{\partial \epsilon_{\alpha \beta}^p}{\partial \alpha} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \epsilon_{\alpha \beta}^p \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{6.38}'$$

$$\left. \begin{aligned}
\dot{e}_a^p &= -\frac{\partial e_a^p}{\partial x} \\
&= \lambda \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_a - \sigma_\beta) + \frac{2}{3}\epsilon^2(\sigma_a + \sigma_\beta - \sigma_p) \right\} \\
\dot{e}_\beta^p &= -\frac{\partial e_\beta^p}{\partial x} \\
&= \lambda \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_\beta - \sigma_a) + \frac{2}{3}\epsilon^2(\sigma_a + \sigma_\beta - \sigma_p) \right\} \\
\dot{e}_{a\beta}^p &= -\frac{\partial e_{a\beta}^p}{\partial x} = \lambda \sigma_{a\beta}
\end{aligned} \right\} \quad (6.39)'$$

及

$$\begin{aligned}
P(\dot{e}^p) &= \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \right\} \sigma_\beta \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \right\} \\
&\quad \times \sigma_a - \frac{2}{AB} \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \right) \sigma_{a\beta} - \frac{1}{2} (\nabla^2 \lambda) \left\{ \left( 1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{4}{3} \epsilon^2 \right) (\sigma_a + \sigma_\beta) + \frac{4}{3} \epsilon^2 \sigma_p \right\} + \frac{1}{A^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \\
&\quad \times \left\{ \left( 1 + \frac{4}{3} \epsilon^2 \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sigma_a + \sigma_\beta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3} \epsilon^2 \frac{\partial \sigma_p}{\partial \alpha} \right\} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} \left\{ \left( 1 + \frac{4}{3} \epsilon^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\partial}{\partial \beta} (\sigma_a + \sigma_\beta) - \frac{4}{3} \epsilon^2 \frac{\partial \sigma_p}{\partial \beta} \right\} + \frac{1}{2} \lambda \left\{ \left( 1 + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{3} \epsilon^2 \nabla^2 (\sigma_n + \sigma_p) - \frac{4}{3} \epsilon^2 \nabla^2 \sigma_p \quad (6.40)'$$

在  $n, s$  坐标的形式亦易写出。

### 3. 连接条件

以  $\Gamma$  表示某一时刻的区域交界线。采用图 4.3 所示的基于  $\Gamma$  的  $n, s$  坐标。在交界面上作用的面力显然应连续, 即

$$[\sigma_n]_{\Gamma} = 0, \quad [\sigma_{ns}]_{\Gamma} = 0 \quad (6.41)$$

此式称为应力连接条件。因在应力分量  $\sigma_n$  与  $\sigma_{ns}$  通过应力函数  $\phi$  的表达式 (6.12) 中只涉及  $\phi$  本身与  $\phi$  对  $n$  的一阶导数 (以及它们对  $s$  的导数), 因此 (6.41) 式要求

$$[\phi]_{\Gamma} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0 \quad (6.42)$$

此两式各称为第一与第二连接条件, 它们是由应力连接条件导出的。

由于位移必须为连续,

$$[u]_{\Gamma} = 0, \quad [v]_{\Gamma} = 0 \quad (6.43)$$

在应变分量表达式 (6.10 a) 中,  $\epsilon_s$  式只包含  $u, v$  及其对  $s$  的导数, 而不包含对  $n$  的导数, 故由 (6.43) 可导出

$$[\epsilon_s]_{\Gamma} = 0 \quad (6.44)$$

此条件的几何意义是很显然的:  $\Gamma$  上的线段是同时属于两个相邻的区域, 因此两区域在  $\Gamma$  处的  $\epsilon_s$  值应该是共同的, 而不应该有间断。以同样明显的理由, 或者从 (6.10 b) 中转角分量  $\omega_s$  的表达式可以看出

$$[\omega_s]_{\Gamma} = 0 \quad (6.45)$$

再取恒等式 (6.10 c) 第二式在  $\Gamma$  处 ( $n = 0$ ) 的间断, 并注意 (6.44) 与 (6.45) 式得到

$$\left[ \frac{\partial e_s}{\partial n} \right]_{\Gamma} - 2 \frac{d}{ds} [\varepsilon_{ns}]_{\Gamma} - \frac{1}{R_{20}} [\varepsilon_n]_{\Gamma} = 0 \quad (6.46)$$

(6.44) 与 (6.45) 可合称为应变连接条件。

由 (6.41) 式, 应力分量  $\sigma_n$  与  $\sigma_{ns}$  均为连续的; 现在我们来讨论应力分量  $\sigma_s$  间断的可能性。从纯静力学的角度来看,

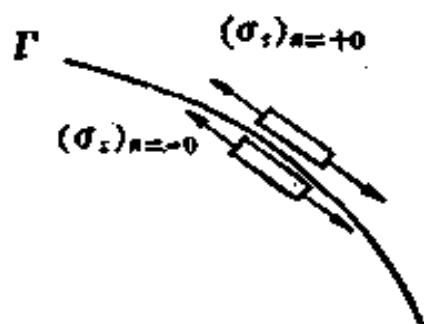


图 6.2  $\sigma_s$  的间断

看,  $\sigma_s$  的间断是可能的, 因为在  $\Gamma$  的两侧  $\sigma_s$  作用于不同的截面 (图 6.2)。在塑性极限平衡理论中就有  $\sigma_s$  间断的例子 (例如在梁的中性轴两侧, 一侧的  $\sigma_s$  为拉伸屈服限, 另一侧为压缩屈服限)。但是在塑性极限

平衡理论的  $\sigma_s$  间断都是指的弹性核逐渐缩小而趋近于间断线, 我们这里研究的却是不断在移动着的区域分界线, 这是两种完全不同的情况。我们假定在  $\Gamma$  的两侧 (即  $n = +0$  与  $n = -0$ ) 都满足 Mises 塑性条件 (6.33) 式<sup>1)</sup>。在  $n, s$  坐标中, (6.33) 可写作:

$$\frac{1}{4}(\sigma_n - \sigma_s)^2 + \sigma_{ns}^2 + \frac{1}{3}\epsilon^2(\sigma_n + \sigma_s - \sigma_p)^2 = \tau_0^2 \quad (6.47)$$

以上标 “+” 与 “-” 各表示在  $\Gamma$  的  $n = +0$  与  $n = -0$  侧的值, 则有

1) 无论间断线  $\Gamma$  是出现在塑性区内部, 还是出现在塑性区与其它区 (例如弹性区或卸载区) 的交界线, 在  $\Gamma$  的两侧都应满足塑性条件。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{4}(\sigma_n^+ - \sigma_s^+) + (\sigma_{ns}^+)^2 + \frac{1}{3}\epsilon^2(\sigma_n^+ \\ & + \sigma_s^+ - \sigma_p^+)^2 = \tau_n^+ \\ & \frac{1}{4}(\sigma_n^- - \sigma_s^-) + (\sigma_{ns}^-)^2 + \frac{1}{3}\epsilon^2(\sigma_n^- \\ & + \sigma_s^- - \sigma_p^-)^2 = \tau_n^- \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

其中, 因 $\sigma_n$ 与 $\sigma_{ns}$ 为连续

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^- = \sigma_n, \quad \sigma_{ns}^+ = \sigma_{ns}^- = \sigma_{ns}$$

记 $\bar{\sigma}_s$ 与 $\bar{\sigma}_p$ 各为两侧 $\sigma_s$ 与 $\sigma_p$ 之平均值:

$$\bar{\sigma}_s = \frac{1}{2}(\sigma_s^+ + \sigma_s^-), \quad \bar{\sigma}_p = \frac{1}{2}(\sigma_p^+ + \sigma_p^-)$$

而 $[\sigma_s]$ 与 $[\sigma_p]$ 则各为 $\sigma_s$ 与 $\sigma_p$ 的间断值:

$$[\sigma_s]_r = \sigma_s^+ - \sigma_s^-, \quad [\sigma_p]_r = \sigma_p^+ - \sigma_p^-$$

取 (6.48) 两式之差, 得到

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\sigma_n - \bar{\sigma}_s) [\sigma_s]_r + \frac{2}{3}\epsilon^2(\sigma_s - \\ & - \bar{\sigma}_p) ([\sigma_s]_r - [\sigma_p]_r) = 0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

(6.49) 式说明在 $[\sigma_s]_r$ 与 $[\sigma_p]_r$ 之间存在着一定的关系。

(6.44) 式说明 $\epsilon_s$ 连续。从纯几何的角度来看,  $\epsilon_n$ 与 $\epsilon_{ns}$ 的间断也是可能的, 因为在 $\Gamma$ 的两侧 $(e_n)_{n \rightarrow +0}$ 与 $(e_n)_{n \rightarrow -0}$ 代表两侧不同的法向线段的伸长,  $(e_{ns})_{n \rightarrow +0}$ 与 $(e_{ns})_{n \rightarrow -0}$ 代表着两侧不同角度的变化。下面证明 $\epsilon_n$ 的间断 $[\epsilon_n]_r$ 可以通过 $[\sigma_s]_r$ 与 $[\sigma_p]_r$ 表示 (见 (6.51) 式)。由 (6.31) 式, 利用 (6.28) 与 (6.32) 式, 可求出面积应变 $\epsilon_x + \epsilon_y$ :

$$\epsilon_x + \epsilon_y = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y) +$$

$$+ 2\left(\frac{1}{2} - \nu\right)^2 \frac{1}{E} \sigma_p$$

在  $n, s$  坐标中, 此式可写成

$$\begin{aligned} e_n + e_s = & \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} (\sigma_n + \sigma_s) \\ & + 2\left(\frac{1}{2} - \nu\right)^2 \frac{1}{E} \sigma_p \end{aligned} \quad (6.50)$$

取 (6.50) 式在  $\Gamma$  两侧之间断, 并注意  $[e_s]_\Gamma = 0$  与  $[\sigma_n]_\Gamma = 0$ , 得到

$$[e_n]_\Gamma = \frac{2(1+\nu)}{E} \epsilon [\sigma_s]_\Gamma + \frac{2}{E} \epsilon^2 [\sigma_p]_\Gamma \quad (6.51)$$

本节以后仅限于讨论  $\nu = 1/2$  的情况 (此后凡出现  $\nu$  均理解为  $1/2$ )。因此  $\epsilon = \frac{1}{2} - \nu = 0$ , 此时由 (6.24) 式, 恒有  $\sigma_s = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ 。而屈服条件则简化为,

$$\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_{xy}^2 = \tau_0^2 \quad (6.33)'$$

假定我们只考虑由于存在  $\sigma_p$  的间断  $[\sigma_p]_\Gamma$  所引起的  $\sigma_s$  间断  $[\sigma_s]_\Gamma$  (即不考虑象塑性极限平衡理论中满足条件  $\sigma_n - \bar{\sigma}_s = 0$  的应力间断), 由 (6.49) 式可得

$$[\sigma_s]_\Gamma = 0 \quad (6.52)$$

因此全部应力分量  $\sigma_n, \sigma_s, \sigma_{ns}$  均连续, 由 (6.28) 式, 拟弹性应变分量  $e_n^e, e_s^e, e_{ns}^e$  亦连续, 即

$$[e_n^e]_\Gamma = [e_s^e]_\Gamma = [e_{ns}^e]_\Gamma = 0 \quad (6.53)$$

而由 (6.51) 式, 得到

$$[e_n]_\Gamma = 0 \quad (6.54)$$

故由 (6.44), (6.53), (6.54)



$$[e_n^p]_r = [e_s^p]_r = 0, \quad [\varepsilon_{ns}]_r = [e_{ns}^p]_r \quad (6.55)$$

而应变连接条件 (6.46) 则成为:

$$\left[ \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial n} \right]_r - 2 \frac{d}{ds} [\varepsilon_{ns}]_r = 0 \quad (6.56)$$

因此除了剪应变分量可能有间断  $[\varepsilon_{ns}]_r$  以外, 其他一切的应力与应变分量均为连续的。  $[\varepsilon_{ns}]_r \neq 0$  的情况称为强间断; 反之,  $[\varepsilon_{ns}]_r = 0$  的情况称为弱间断。

第一与第二连接条件 (6.42) 规定  $\phi$  本身与它对  $n$  的一阶导数为连续。由连接条件 (6.52), 利用 (6.12) 式, 可得<sup>1)</sup>

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_r = 0 \quad (6.57)$$

即  $\phi$  的二阶  $n$ -导数亦为连续。(6.57) 式称为第三连接条件。至于有关  $\phi$  的三阶  $n$ -导数的连接条件, 则应由 (6.56) 式得到。

现在来计算 (6.56) 式。其左端第一项为

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon_s^e}{\partial n} + \frac{\partial \varepsilon_s^p}{\partial n}$$

利用拟弹性变形与应力分量的关系 (6.28) 式与 (6.12), 得到

---

1) 高玉臣与黄克智 (1961, 1972) 证明不仅对于  $\nu = \frac{1}{2}$  的理想弹塑性材料, 而且对于  $\nu < \frac{1}{2}$  的理想弹塑性材料及硬化材料, 通过移动着的间断线  $\Gamma$  时  $\sigma_s$  应连续, 即  $[\sigma_s]_r = 0$ 。

$$\begin{aligned}
e_s^e &= \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_s - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_n \\
&= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial}{\partial s} \right. \\
&\quad \left. \times \left( \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) + \frac{1}{R_{20} + n} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\}
\end{aligned}$$

对  $n$  求导一次，取其在  $\Gamma$  之间断，并注意  $\phi$  本身及其第一、第二阶  $n$ -导数均为连续（见（6.12），（6.57）式），得

$$\left[ \frac{\partial e_s^e}{\partial n} \right]_r = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r$$

由于（6.41）， $[\sigma_{ns}]_r = 0$ ，及由（6.55）， $[e_{ns}]_r = [e_{ns}^p]_r$ ，（6.56）式左端第二项为  $-2d[e_{ns}^p]_r/ds$ 。所以，应变连接条件（6.56）的另一形式为

$$\frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r + \left[ \frac{\partial e_s^p}{\partial n} \right]_r - 2 \frac{d}{ds} [e_{ns}^p]_r = 0 \quad (6.58)$$

此式称为第四连接条件。该式的  $[\partial e_s^p / \partial n]_r$  还可计算如下。平面内塑性应变张量  $e^p$  可写成并矢形式：

$$e^p = e_n^p i_n i_n + e_s^p i_s i_s + e_{ns}^p (i_n i_s + i_s i_n) \quad (6.59)$$

将上式对坐标  $n, s$  求导，并利用单位矢量的求导公式（4.28），得

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \epsilon^p}{\partial n} &= \frac{\partial \epsilon_n^p}{\partial n} \mathbf{i}_n \mathbf{i}_n + \frac{\partial \epsilon_s^p}{\partial n} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_s \\
 &\quad + \frac{\partial \epsilon_{ns}^p}{\partial n} (\mathbf{i}_n \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_s \mathbf{i}_n) \\
 \frac{\partial \epsilon^p}{\partial s} &= \left( \frac{\partial \epsilon_n^p}{\partial s} - 2 \frac{\epsilon_{ns}^p}{R_{20}} \right) \mathbf{i}_n \mathbf{i}_n + \left( \frac{\partial \epsilon_s^p}{\partial s} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\epsilon_{ns}^p}{R_{20}} \right) \mathbf{i}_s \mathbf{i}_s + \left( \frac{\partial \epsilon_{ns}^p}{\partial s} + \frac{\epsilon_n^p - \epsilon_s^p}{R_{20}} \right) \\
 &\quad \times (\mathbf{i}_n \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_s \mathbf{i}_n)
 \end{aligned} \right\} \quad (6.59)'$$

利用定常条件 (4.6) 式, 塑性变形律 (6.39)' 式 (其中  $\epsilon = \frac{1}{2} - \nu = 0$ ) 可写作:

$$\dot{\epsilon}^p = - \frac{\partial \epsilon^p}{\partial x} = \lambda \Sigma' \quad (6.60)$$

式中  $\Sigma'$  表示应力偏斜张量:

$$\begin{aligned}
 \Sigma' &= \frac{1}{2} (\sigma_n - \sigma_s) \mathbf{i}_n \mathbf{i}_n + \frac{1}{2} (\sigma_s - \sigma_n) \mathbf{i}_s \mathbf{i}_s \\
 &\quad + \sigma_{ns} (\mathbf{i}_n \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_s \mathbf{i}_n)
 \end{aligned} \quad (6.61)$$

利用方向导数的关系, (6.60) 式又可写作:

$$-\cos\theta \frac{\partial \epsilon^p}{\partial n} + \frac{\sin\theta}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \epsilon^p}{\partial s} = \lambda \Sigma' \quad (6.62)$$

取 (6.62) 式的  $\mathbf{i}_n \mathbf{i}_n$ ,  $\mathbf{i}_s \mathbf{i}_s$  与  $(\mathbf{i}_n \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_s \mathbf{i}_n)$  分量, 得到

$$\begin{aligned}
 &-\cos\theta \frac{\partial \epsilon_n^p}{\partial n} + \frac{\sin\theta}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \left( \frac{\partial \epsilon_n^p}{\partial s} - 2 \frac{\epsilon_{ns}^p}{R_{20}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \lambda (\sigma_n - \sigma_s)
 \end{aligned} \quad (6.63a)$$

$$\begin{aligned}
& -\cos\vartheta \frac{\partial e_s^p}{\partial n} + \frac{\sin\vartheta}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \left( \frac{\partial e_s^p}{\partial s} + 2 \frac{e_{ns}^p}{R_{20}} \right) \\
& = -\frac{1}{2} \lambda (\sigma_s - \sigma_n) \quad (6.63b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos\vartheta \frac{\partial e_{ns}^p}{\partial n} + \frac{\sin\vartheta}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \left( \frac{\partial e_{ns}^p}{\partial s} + \frac{e_n^p - e_s^p}{R_{20}} \right) = \lambda \sigma_{ns} \\
& \quad (6.63c)
\end{aligned}$$

取 (6.63) 每个式子在  $\Gamma$  处 ( $n=0$ ) 之间断, 并注意式中  $e_n^p$ ,  $e_s^p$ ,  $\sigma_n$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{ns}$  为连续, 得到

$$\begin{aligned}
& -\cos\vartheta \left[ \frac{\partial e_n^p}{\partial n} \right]_r - \frac{2}{R_{20}} \sin\vartheta [e_{ns}^p]_r \\
& = -\frac{1}{2} [\lambda]_r (\sigma_n - \sigma_s) \quad (6.63a)'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos\vartheta \left[ \frac{\partial e_s^p}{\partial n} \right]_r + \frac{2}{R_{20}} \sin\vartheta [e_{ns}^p]_r \\
& = \frac{1}{2} [\lambda]_r (\sigma_s - \sigma_n) \quad (6.63b)'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos\vartheta \left[ \frac{\partial e_{ns}^p}{\partial n} \right]_r + \sin\vartheta \frac{d}{ds} [e_{ns}^p]_r = [\lambda]_r \sigma_{ns} \\
& \quad (6.63c)'
\end{aligned}$$

由 (6.63b)' 式解出  $[\partial e_s^p / \partial n]_r$ , 代入 (6.58), 得到第四连接条件的另一形式:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1-\nu}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r = \frac{\sigma_s - \sigma_n}{2 \cos\vartheta} [\lambda]_r - \frac{2}{R_{20}} \tan\vartheta [e_{ns}^p]_r + \\
& \quad + 2 \frac{d}{ds} [e_{ns}^p]_r \quad (6.64)
\end{aligned}$$

对于强间断情况 ( $[\varepsilon_{ns}^p]_r \neq 0$ )，我们可以把间断线想象成一薄层，当此薄层在平面上移动扫过某一物质质点时，此质点的  $\varepsilon_{ns}^p = \infty$ ，因此  $\varepsilon_{ns}^p : \varepsilon_n^p : \varepsilon_s^p = 1:0:0$ ，由拟塑性变形律 (6.39)'，设  $\epsilon = \frac{1}{2} - \nu = 0$ ，可得

$$\sigma_{ns} : \frac{1}{2}(\sigma_n - \sigma_s) : \frac{1}{2}(\sigma_s - \sigma_n) = 1:0:0$$

再考虑屈服条件，得到出现强间断的条件：

$$|\sigma_{ns}| = \tau_0, \quad \sigma_n = \sigma_s \quad (6.65)$$

因此强间断只能出现在滑移线上。对于强间断第四连接条件 (6.64) 成为

$$\frac{1-\nu}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r = -\frac{2}{R_{20}} \tan \theta [\varepsilon_{ns}^p]_r + 2 \frac{d}{ds} [\varepsilon_{ns}^p]_r$$

(强间断) (6.66)

而对于弱间断情况 ( $[\varepsilon_{ns}^p]_r = 0$ )，第四连接条件则简化为

$$\frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r = \frac{\sigma_s - \sigma_n}{2 \cos \theta} [\lambda], \quad (6.67)$$

协调方程 (6.34) 是  $\phi$  的四阶微分方程，因此在由 (6.34) 式求解  $\phi$  时，需要用到关于  $\phi$  本身与它的前三阶  $n$ -导数的连接条件，即第一至第四连接条件 (6.42)，(6.57) 与 (6.64)。

但是我们有时求解协调方程率 (6.37)， $\phi$  改为  $-\partial\phi/\partial x$  后，它是  $\phi$  的五阶微分方程，因此还需要关于  $\phi$  的第四阶  $n$ -导数的连接条件——第五连接条件。与在 § 4 第 2 小节之 (2) 中所讨论的 III 型裂纹类似，这里的第五连接条件就是协调方程 (6.34) 在  $\Gamma$  两侧的间断值。下面我们来推导这第五连接条件。

由 (6.34), (6.36)', 在  $n, s$  坐标中的协调方程为

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu^2}{E} \nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{\partial^2 \varepsilon_s^p}{\partial n^2} + \frac{2}{BR_{20}} \frac{\partial \varepsilon_s^p}{\partial n} \\ & - \frac{1}{BR_{20}} \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial n} - \frac{2}{B} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ns}^p}{\partial n \partial s} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_n^p}{\partial s^2} \\ & - \frac{n}{B^3} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial s} - \frac{2}{B^2 R_{20}} \frac{\partial \varepsilon_{ns}^p}{\partial s} - \frac{2}{B^2} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \varepsilon_{ns}^p \\ & + \frac{2n}{B^3 R_{20}} \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} \varepsilon_{ns}^p = 0 \end{aligned} \quad (6.68)$$

式中  $1/R_{20} \approx d\vartheta/ds$ ,  $B = 1 + n/R_{20}$ . 由 (6.9) 式,

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial}{\partial s} \right) \\ &+ \frac{1}{R_{20} + n} \frac{\partial}{\partial n} \\ \nabla^2 \nabla^2 \phi &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial n^4} + \frac{2}{R_{20} + n} \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} + \dots \end{aligned} \quad (6.69)$$

这里...表示只含  $\phi$  对  $n$  二阶及二阶以下导数的项, 它们通过  $\Gamma$  的间断量均为零 (见 (6.42) 与 (6.57) 式)。取 (6.68) 式通过  $\Gamma$  ( $n=0$ ) 之间断量, 并注意  $[\varepsilon_n^p]_r = 0$  (见 (6.55) 式), 得

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu^2}{E} \left( \left[ \frac{\partial^4 \phi}{\partial n^4} \right]_r + \frac{2}{R_{20}} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r \right) + \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_s^p}{\partial n^2} \right]_r \\ & + \frac{2}{R_{20}} \left[ \frac{\partial \varepsilon_s^p}{\partial n} \right]_r - \frac{1}{R_{20}} \left[ \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial n} \right]_r - 2 \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ns}^p}{\partial n \partial s} \right]_r \\ & - \frac{2}{R_{20}} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{ns}^p}{\partial s} \right]_r - 2 \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} [\varepsilon_{ns}^p]_r = 0 \end{aligned} \quad (6.70)$$

今化简上式。先计算  $[\partial^2 \varepsilon_s^p / \partial n^2]_r$  项。将 (6.63 b) 式对  $n$  求导, 得:

$$\begin{aligned} & -\cos\vartheta \frac{\partial^2 \varepsilon_s^p}{\partial n^2} + \frac{\sin\vartheta}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_s^p}{\partial n \partial s} + \frac{2}{R_{20}} \frac{\partial \varepsilon_{ns}^p}{\partial n} \right) \\ & - \frac{\sin\vartheta}{R_{20} \left( 1 + \frac{n}{R_{20}} \right)}, \left( \frac{\partial \varepsilon_s^p}{\partial s} + 2 \frac{\varepsilon_{ns}^p}{R_{20}} \right) \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} (\lambda(\sigma_s - \sigma_n)) \end{aligned}$$

取此式通过  $\Gamma(n=0)$  之间断值, 得

$$\begin{aligned} & -\cos\vartheta \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_s^p}{\partial n^2} \right]_r + \sin\vartheta \left( \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_s^p}{\partial n \partial s} \right]_r + \frac{2}{R_{20}} \left[ \frac{\partial \varepsilon_{ns}^p}{\partial n} \right]_r \right) \\ & - \frac{2}{R_{20}^2} \sin\vartheta [\varepsilon_{ns}^p]_r = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (\lambda(\sigma_s - \sigma_n)) \right]_r \end{aligned}$$

由此式解出  $[\partial^2 \varepsilon_s^p / \partial n^2]_r$ , 代入 (6.70) 式, 并重新组合各项得:

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\partial^4 \phi}{\partial n^4} \right]_r + \frac{2}{R_{20}} \left\{ \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\partial \varepsilon_s^p}{\partial n} \right]_r \right\} + \frac{1}{\cos\vartheta} \left\{ \sin\vartheta \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_s^p}{\partial n \partial s} \right]_r \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (\lambda(\sigma_s - \sigma_n)) \right] \right\} - \frac{1}{R_{20} \cos\vartheta} \left\{ \frac{2}{R_{20}} \right. \\ & \times \sin\vartheta [\varepsilon_{ns}^p]_r + \cos\vartheta \left[ \frac{\partial \varepsilon_n^p}{\partial n} \right]_r \left. \right\} + \frac{2}{\cos\vartheta} \left\{ \frac{\sin\vartheta}{R_{20}} \right. \\ & \times \left[ \frac{\partial \varepsilon_{ns}^p}{\partial n} \right]_r - \cos\vartheta \left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_{ns}^p}{\partial n \partial s} \right]_r \left. \right\} - \frac{2}{R_{20}} \frac{d}{ds} [\varepsilon_{ns}^p]_r \end{aligned}$$

$$-2 \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} [e_{ns}^p]_r = 0 \quad (6.70)'$$

再利用以下的几个等式来化简 (6.70)'。由 (6.58)

$$\left\{ \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r + \left[ \frac{\partial e_s^p}{\partial n} \right]_r \right\} = 2 \frac{d}{ds} [e_{ns}^p]_r \quad (a)$$

取 (6.63) (a) 式通过  $\Gamma (n=0)$  之间断, 即 (6.63)' (a),

$$\begin{aligned} & - \left\{ \frac{2}{R_{20}} \sin \vartheta [e_{ns}^p]_r + \cos \vartheta \left[ \frac{\partial e_n^p}{\partial n} \right]_r \right\} \\ & = \frac{1}{2} [\lambda]_r (\sigma_n - \sigma_s) \end{aligned} \quad (b)$$

式中  $\sigma_n, \sigma_s$  为  $\sigma_n, \sigma_s$  取在  $\Gamma$  上的值。取 (6.63 c) 式对  $s$  的导数通过  $\Gamma (n=0)$  之间断, 得

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\sin \vartheta}{R_{20}} \left[ \frac{\partial e_{ns}^p}{\partial n} \right]_r - \cos \vartheta \left[ \frac{\partial^2 e_{ns}^p}{\partial n \partial s} \right]_r \right\} \\ & = - \sin \vartheta \frac{d^2}{ds^2} [e_{ns}^p]_r - \frac{\cos \vartheta}{R_{20}} \frac{d}{ds} [e_{ns}^p]_r + \\ & \quad + \frac{d}{ds} ([\lambda]_r \sigma_{ns}) \end{aligned} \quad (c)$$

式中  $\sigma_{ns}$  取  $\sigma_{ns}$  在  $\Gamma$  上的值。

将 (a), (b), (c) 代入 (6.70)' 式, 并整理后, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\partial^4 \phi}{\partial n^4} \right]_r + \tan \vartheta \left\{ \left[ \frac{\partial^2 e_s^p}{\partial n \partial s} \right]_r - \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{d^2}{ds^2} [e_{ns}^p]_r \right\} - \frac{1}{2 \cos \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (\lambda (\sigma_n - \right. \\ & \quad \left. - \sigma_s)) \right]_r + \frac{1}{2 R_{20} \cos \vartheta} [\lambda]_r (\sigma_n - \sigma_s) \end{aligned}$$



$$+ \frac{2}{\cos \vartheta} \frac{d}{ds} ([\lambda]_r \sigma_{ns}) - 2 \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} [\varepsilon_{ns}^p]_r = 0 \quad (6.70)''$$

上式中第二项可利用 (6.58) 式对  $s$  求导一次后化简的结果, 即

$$\left[ \frac{\partial^2 \varepsilon_s^p}{\partial n \partial s} \right]_r - 2 \frac{d^2}{ds^2} [\varepsilon_{ns}^p]_r = - \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r$$

最后得到

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ \frac{\partial^4 \phi}{\partial n^4} \right]_r - \frac{1 - \nu^2}{E} \tan \vartheta \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r \\ & - \frac{1}{2 \cos \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial n} (\lambda (\sigma_s - \sigma_n)) \right]_r \\ & + \frac{1}{2 R_{20} \cos \vartheta} [\lambda]_r (\sigma_n - \sigma_s) + \frac{2}{\cos \vartheta} \frac{d}{ds} ([\lambda]_r \sigma_{ns}) \\ & - 2 \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} [\varepsilon_{ns}^p]_r = 0 \end{aligned} \quad (6.71)$$

式中  $1/R_{20} = d\vartheta/ds$ 。(6.71) 式就是第五连接条件。在求解协调方程率 (6.37) 时, 必须使用此条件。

在下一节 (§ 7) 讨论平面应变 I 型裂纹定常扩展问题时, 将采用以所讨论时刻的裂纹尖端为原点的极坐标 (图 6.3)。设在所讨论的时刻, 有一间断线 (区域分界线)  $\Gamma$  通过裂纹尖端。上面的第一至第五连接条件 (6.42), (6.57), (6.64) 与 (6.71), 都是通过基于  $\Gamma$  的  $n, s$  坐标表示的, 必须转换到  $r, \theta$  坐标上来。 $r, \theta$  坐标与  $n, s$  坐标的关系如图 6.3。设对任一  $P$  点,  $r$  方向与  $s$  方向的夹角为  $\phi$ , 则

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \vartheta(s) - \theta \quad (6.72)$$

以 $\theta_0$ 表示 $\Gamma$ 在尖端处的切线与 $x$ 轴的夹角。则当 $P$ 点沿着 $\Gamma$ 曲

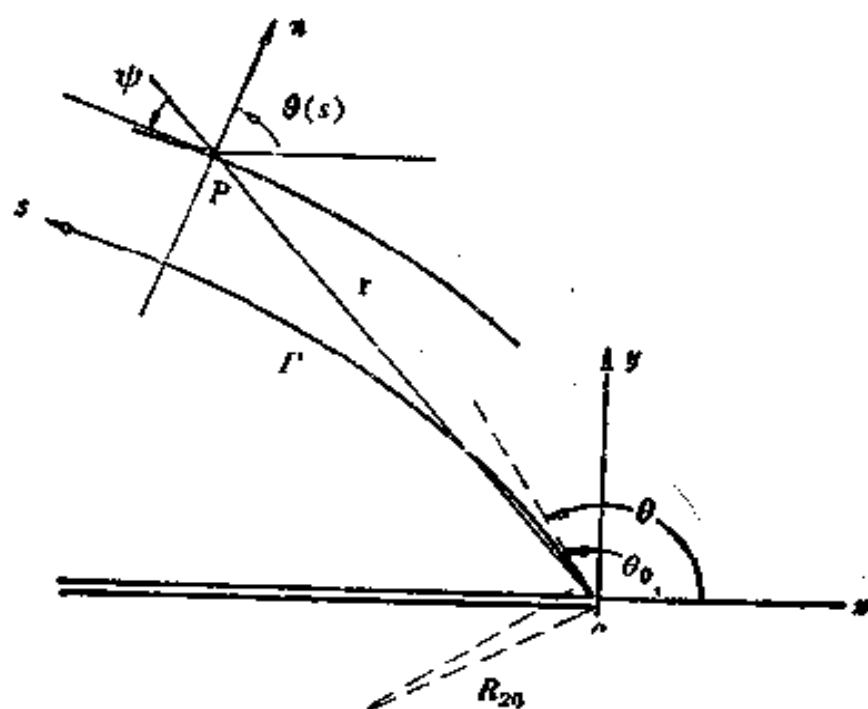


图 6.3  $r, \theta$ 与 $n, s$ 坐标

线趋近于尖端 ( $r \rightarrow 0$ ) 时,  $\theta \rightarrow \theta_0$ 。同时 $r$ 方向与 $s$ 方向趋近于一致,  $\theta$ 方向与 $n$ 方向趋近于相反。故当 $r \rightarrow 0$

$$\theta \rightarrow \theta_0, \quad \phi \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow \theta_0 - \pi/2 \quad (6.73)$$

在任一 $P$ 点处, 偏导数运算之间的关系为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \sin\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{2n}}} \frac{\partial}{\partial s} &= \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (6.74)$$

对于一阶导数之间关系为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ \frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \phi}{\partial s} &= \cos \phi \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

当  $P$  沿着  $\Gamma$  线趋近于尖端 ( $r \rightarrow 0$ ) 时,  $\phi \rightarrow 0$ , 故

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \rightarrow -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (6.76)$$

因此在求局部解时, 第一与第二连接条件 (6.42) 可取作

$$[\phi]_r = 0, \quad \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right]_r = 0 \quad (6.77)$$

$\partial \phi / \partial s$  为连续的条件改为  $\partial \phi / \partial r$  连续, 即

$$[\partial \phi / \partial r]_r = 0 \quad (6.78)$$

为了便于计算高阶导数, 我们也可以把  $r, \theta$  坐标中的偏导数与  $n, s$  坐标中的偏导数都和直角坐标  $x, y$  中的偏导数联系起来。对于一阶导数, 关系为

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1r} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{1}{r} \phi_{1\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6.79a)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1n} &= \frac{\partial \phi}{\partial n} = \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \phi_{1s} &= \frac{\partial \phi}{\partial s} = \left( 1 + \frac{n}{R_{20}} \right) \left\{ -\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.79b)$$

当  $P$  点沿  $\Gamma$  线 ( $n=0$ ) 趋近于尖端 ( $r \rightarrow 0$  时), 考虑到

(6.73) 式当  $r \rightarrow 0$  时的关系, 我们也能由 (6.79) 得到 (6.76) 式。

二阶导数之间有以下的关系<sup>1)</sup> :

$$\begin{aligned}
 \phi_{1,1} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\
 &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\
 \frac{1}{r} \phi_{1,\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\
 &= -\sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (\cos^2 \theta \\
 &\quad - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\
 \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
 &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\
 \phi_{1,nn} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\
 &\quad + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}
 \end{aligned} \tag{6.80a}$$

1) (6.80a) 与 (6.80b) 各为  $\phi$  在  $(r, \theta)$  与  $(n, s)$  坐标中的二阶协变导数 (物理分量)。以后用分号 “;” 表示协变导数。

$$\begin{aligned}
\phi_{,ns} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial s} - \frac{1}{n + R_{20}} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\
&= \left(1 + \frac{n}{R_{20}}\right) \left\{ -\sin \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right. \\
&\quad \left. + (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \sin \vartheta \cos \vartheta \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} \quad (6.80b) \\
\phi_{,ss} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \left(1 + \frac{n}{R_{20}}\right) \frac{1}{R_{20}} \frac{\partial \phi}{\partial n} \\
&\quad - \frac{n}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{R_{20}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial s} \\
&= \left(1 + \frac{n}{R_{20}}\right)^2 \left\{ \sin^2 \vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \cos^2 \vartheta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\}
\end{aligned}$$

当  $P$  点沿  $\Gamma$  线 ( $n=0$ ) 趋近于尖端 ( $r \rightarrow 0$ ) 时, 利用 (6.73) 式的极限关系, 由 (6.80) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} &\rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial n} - \frac{1}{R_{20}} \frac{\partial \phi}{\partial s} &\rightarrow - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{1}{R_{20}} \frac{\partial \phi}{\partial n} &\rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}
\end{aligned}$$

因此在求局部解时, 考虑到 (6.42), (6.77) 与 (6.78)

式可得

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right]_r = \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right]_r \quad (6.81)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right]_r = 0, \quad \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right]_r = 0 \quad (6.82)$$

利用 (6.81) 式, 第三连接条件 (6.57) 成为

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right]_r = 0 \quad (6.83)$$

对于三阶导数, 我们只举以下部分关系<sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \phi_{;r\theta\theta} &= \frac{1}{\partial r^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ &= \sin^2 \theta \cos \theta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - (2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta) \\ &\quad \times \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} + (\cos^3 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta) \\ &\quad \times \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + \cos^2 \theta \sin \theta \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \\ \frac{1}{r^3} \phi_{;r\theta\theta\theta} &= \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ &= -\sin^3 \theta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + 3 \sin^2 \theta \cos \theta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \\ &\quad - 3 \sin \theta \cos^2 \theta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + \cos^3 \theta \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \end{aligned} \quad (6.84a)$$

1) (6.84a) 与 (6.84b) 各为  $\phi$  在  $(r, \theta)$  与  $(n, s)$  坐标中某些三阶协变导数 (物理分量)。

$$\begin{aligned}
\phi_{:nnn} &= \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^2 \partial s} - \frac{2}{R_{20} + n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial s} \\
&\quad + \frac{2}{(R_{20} + n)^2} \frac{\partial \phi}{\partial s} \\
&= \left(1 + \frac{n}{R_{20}}\right) \left\{ -\sin \vartheta \cos^2 \vartheta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right. \\
&\quad - (2\sin^2 \vartheta \cos \vartheta - \cos^3 \vartheta) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \\
&\quad + (-\sin^3 \vartheta + 2\sin \vartheta \cos^2 \vartheta) \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} \\
&\quad \left. + \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right\}
\end{aligned} \tag{6.84b}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{:nnn} &= \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \\
&= \cos^3 \vartheta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + 3\sin \vartheta \cos^2 \vartheta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} \\
&\quad + 3\sin^2 \vartheta \cos \vartheta \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} + \sin^3 \vartheta \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}
\end{aligned}$$

因此, 当  $P$  沿  $\Gamma$  线 ( $n=0$ ) 趋近于尖端 ( $r \rightarrow 0$ ) 时, 利用 (6.73) 式, 由 (6.84) 式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 \phi}{\partial n^2 \partial s} - \frac{2}{R_{20}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial s} + \frac{2}{R_{20}^2} \frac{\partial \phi}{\partial s} \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \theta^2} - \\
&- \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\
&\frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \rightarrow - \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

在求局部解时，由于 (6.77)，(6.78)，(6.82)，(6.83) 的关系，上面两式右端第一项后面各项均为连续。故在求局部解时，可令

$$\left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r = - \left[ \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \theta^3} \right]_r \quad (6.85)$$

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \theta^2} \right]_r = 0 \quad (6.86)$$

故第四连接条件 (6.64) 左端的  $[\partial^3 \phi / \partial n^3]_r$  可用  $-[(1/r^3) \cdot \partial^3 \phi / \partial \theta^3]_r$  代替。

同样，对于四阶导数，有以下的关系：

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^4} \phi_{; \theta \theta \theta \theta} &= \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta^4} + \frac{6}{r^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{8}{r^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ &= \sin^4 \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 4 \sin^3 \theta \cos \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial y} \\ &\quad + 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 4 \sin \theta \cos^3 \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial x \partial y^3} \\ &\quad + \cos^4 \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \end{aligned} \quad (6.87a)$$

$$\begin{aligned} \phi_{; n n n n} &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial n^4} \\ &= \cos^4 \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 4 \sin \theta \cos^3 \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial y} \\ &\quad + 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 \sin^3 \theta \cos \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial x \partial y^3} \end{aligned}$$



$$+ \sin^4 \theta \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \quad (6.87b)$$

因此, 当  $P$  沿  $\Gamma$  线 ( $n=0$ ) 趋近于尖端 ( $r \rightarrow 0$ ) 时,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \phi}{\partial n^4} \rightarrow & \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta^4} + \frac{6}{r^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{8}{r^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ & + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{aligned}$$

取上式之间断, 并注意 (6.83) 与 (6.86) 式, 可知在求局部解时可令

$$\left[ \frac{\partial^4 \phi}{\partial n^4} \right]_r = \left[ \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \theta^4} \right]_r \quad (6.88)$$

因此第五连接条件 (6.71) 中的  $[\partial^4 \phi / \partial n^4]_r$  可用上式右端的  $[(1/r^4) \partial^4 \phi / \partial \theta^4]_r$  代替。综上所述, 在连接条件中的  $[\partial^i \phi / \partial n^i]_r$ , ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 均可以用  $[(1/r^i) \partial^i \phi / \partial \theta^i]_r$  来代替。

至于应力分量, 则由图6.3与 (6.73) 式, 当  $P$  点沿  $\Gamma$  线 ( $n=0$ ) 趋近于尖端 ( $r \rightarrow 0$ ) 时, 显然有

$$\sigma_n \rightarrow \sigma_\theta, \quad \sigma_s \rightarrow \sigma_r, \quad \sigma_{ns} \rightarrow \sigma_{r\theta} \quad (6.89)$$

但是在第五连接条件 (6.71) 中还出现应力分量对坐标  $n$ ,  $s$  的导数, 在转换到极坐标  $r$ ,  $\theta$  时必须特别当心, 避免错误。以  $\Sigma$  表示应力张量, 其并矢表示为

$$\Sigma = \sigma_n i_n i_n + \sigma_s i_s i_s + \sigma_{ns} (i_n i_s + i_s i_n) \quad (6.90a)$$

$$= \sigma_r i_r i_r + \sigma_\theta i_\theta i_\theta + \sigma_{r\theta} (i_r i_\theta + i_\theta i_r) \quad (6.90b)$$

单位矢量  $i_n$ ,  $i_s$  对坐标  $n$ ,  $s$  的导数已见 (4.28) 式。单位矢量  $i_r$ ,  $i_\theta$  对坐标  $r$ ,  $\theta$  的导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{i}_\theta, & \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{i}_r \end{aligned} \right\} \quad (6.91)$$

利用两个坐标系中偏导数运算关系 (6.74) 式与 (6.91) 式可计算出  $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta$  对坐标  $n, s$  的导数:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial n} &= -\frac{\cos \phi}{r} \mathbf{i}_\theta, & \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial n} &= \frac{\cos \phi}{r} \mathbf{i}_r \\ \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial s} &= \left(1 + \frac{n}{R_{20}}\right) \frac{\sin \phi}{r} \mathbf{i}_\theta \\ \frac{\partial \mathbf{i}_\theta}{\partial s} &= -\left(1 + \frac{n}{R_{20}}\right) \frac{\sin \phi}{r} \mathbf{i}_r \end{aligned} \right\} \quad (6.92)$$

按 (6.90a) 式计算应力张量  $\Sigma$  对坐标  $n, s$  的导数, 利用 (4.28) 式, 仿照 (6.59)' 式的推导, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial n} &= \frac{\partial \sigma_n}{\partial n} \mathbf{i}_n \mathbf{i}_n + \frac{\partial \sigma_s}{\partial n} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_s + \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial n} (\mathbf{i}_n \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_s \mathbf{i}_n) \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial s} &= \left( \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} - 2 \frac{\sigma_{ns}}{R_{20}} \right) \mathbf{i}_n \mathbf{i}_n + \left( \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial \sigma_{ns}}{R_{20}} \right) \mathbf{i}_s \mathbf{i}_s + \left( \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial s} + \frac{\sigma_n - \sigma_s}{R_{20}} \right) \\ &\quad \times (\mathbf{i}_n \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_s \mathbf{i}_n) \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$

另外, 按 (6.90b) 式计算同一应力张量  $\Sigma$  对坐标  $n, s$  的导数, 利用 (6.92) 式与偏导数运算关系 (6.74) 式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial n} &= \left\{ \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sigma_r + 2 \frac{\sigma_{r\theta} \cos \phi}{r} \right\} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_r \\ &\quad + \left\{ \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sigma_\theta - 2 \frac{\sigma_{r\theta} \cos \phi}{r} \right\} \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left( \sin\psi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\psi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sigma_{,s} \right. \\
& \left. + \frac{(\sigma_{\theta} - \sigma_r) \cos\psi}{r} \right\} (\mathbf{i}_s \mathbf{i}_{\theta} + \mathbf{i}_{\theta} \mathbf{i}_s)
\end{aligned} \tag{6.94}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 + \frac{n}{R_{20}}} \frac{\partial \Sigma}{\partial s} = & \left\{ \left( \cos\psi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\psi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sigma_r \right. \\
& - 2 \frac{\sigma_{,s} \sin\psi}{r} \left. \right\} \mathbf{i}_r \mathbf{i}_r + \left\{ \left( \cos\psi \frac{\partial}{\partial r} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sin\psi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sigma_{\theta} + 2 \frac{\sigma_{,s} \sin\psi}{r} \right\} \mathbf{i}_s \mathbf{i}_s \\
& + \left\{ \left( \cos\psi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\psi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \sigma_{,s} \right. \\
& \left. + \frac{(\sigma_r - \sigma_{\theta}) \sin\psi}{r} \right\} (\mathbf{i}_r \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_s \mathbf{i}_r)
\end{aligned}$$

由图6.3可看出两坐标系单位矢量的关系:

$$\mathbf{i}_n = \sin\psi \mathbf{i}_r - \cos\psi \mathbf{i}_{\theta}, \quad \mathbf{i}_s = \cos\psi \mathbf{i}_r + \sin\psi \mathbf{i}_{\theta} \tag{6.95a}$$

$$\text{或 } \mathbf{i}_r = \sin\psi \mathbf{i}_n + \cos\psi \mathbf{i}_s, \quad \mathbf{i}_{\theta} = -\cos\psi \mathbf{i}_n + \sin\psi \mathbf{i}_s \tag{6.95b}$$

利用 (6.95), 可以建立 (6.93) 与 (6.94) 式在不同坐标中分量的关系, 在求局部解 ( $r \rightarrow 0$ ) 时,

$$\mathbf{i}_r \rightarrow \mathbf{i}_s, \quad \mathbf{i}_{\theta} \rightarrow \mathbf{i}_n$$

比较应力张量导数两个表达式 (6.93) 与 (6.94) 的对应分量, 则可得到当  $P$  点沿  $\Gamma$  线 ( $n = 0$ ) 趋近于尖端 ( $r \rightarrow 0$ ) 时的关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_n}{\partial n} &\rightarrow -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} - 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_s}{\partial n} &\rightarrow -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial n} &\rightarrow +\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{r} \end{aligned} \right\} (6.96a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} - 2 \frac{\sigma_{ns}}{R_{20}} &\rightarrow \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} \\ \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + 2 \frac{\sigma_{ns}}{R_{20}} &\rightarrow \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \\ \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial s} + \frac{\sigma_n - \sigma_s}{R_{20}} &\rightarrow -\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} \end{aligned} \right\} (6.96b)$$

此 (b) 式可利用 (6.89) 改写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_n}{\partial s} &\rightarrow \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} - 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{R_{20}} \\ \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} &\rightarrow \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{R_{20}} \\ \frac{\partial \sigma_{ns}}{\partial s} &\rightarrow -\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{\sigma_n - \sigma_r}{R_{20}} \end{aligned} \right\} (6.96b)'$$

式中  $R_{20}$  为间断线  $\Gamma$  在裂纹尖端处之曲率半径 (图6.3)。因此, 在第五连接条件 (6.71) 中出现的  $\partial(\sigma_r - \sigma_n)/\partial n$ , 在极坐标中应转换为

$$\frac{\partial}{\partial n} (\sigma_r - \sigma_n) \rightarrow -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_r - \sigma_\theta) + 4 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \quad (6.97)$$

而  $\frac{d}{ds} \sigma_{ns}$  则按 (6.96b)' 第三式转换。

最后，我们讨论一下位移率的间断问题。位移本身必为连续，间断量为零（见（6.43）式）。但位移率  $\dot{u}$ ， $\dot{v}$  却可能间断。为了说明简单起见，假定间断线  $\Gamma$  为  $y$  轴，同时间断线以速度  $V$  向  $x$  方向移动（图 6.4）。以  $u_x$  与  $u_y$  表示沿  $x$  方向（垂直于间断线）与沿  $y$  方向（平行于间断线）的位移。由（6.43）式，

$$[u_x]_{\Gamma} = 0, \quad [u_y]_{\Gamma} = 0 \quad (6.98)$$

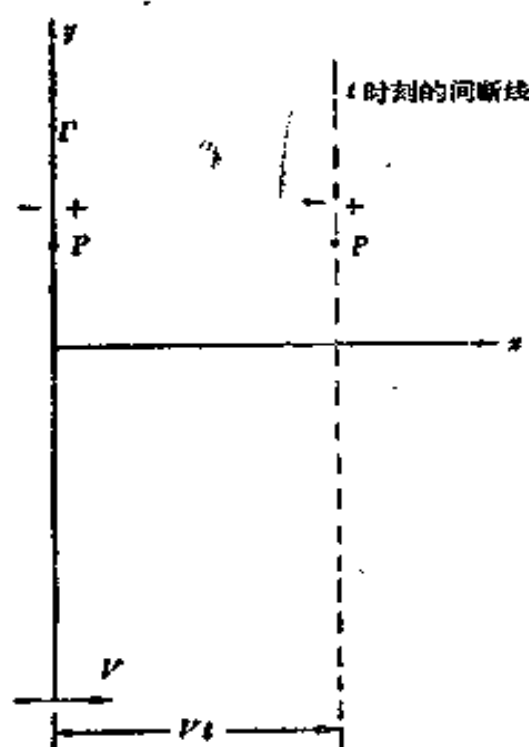


图 6.4 移动着的间断线

我们来考察间断面上的点  $P$

（不是同一质点），这  $P$  点的位置也随着间断线向右运动。取  $P$  点位移矢量  $\mathbf{u}$  的“随动变化率”（参考（3.55）式）

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad (6.99)$$

由于  $\mathbf{u}$  为连续，故随动变化率在间断线  $\Gamma$  两侧的值应相等，即

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^+ + V \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^+ = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^- + V \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^-$$

故有间断量关系：

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right]_{\Gamma} = -V \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right]_{\Gamma} \quad (6.100)$$

其分量形式为

$$\left[ \frac{\partial u_x}{\partial t} \right]_r = -V \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \right]_r,$$

$$\left[ \frac{\partial u_y}{\partial t} \right]_r = -V \left[ \frac{\partial u_y}{\partial t} \right]_r \quad (6.100)^*$$

此式也可写作（注意  $[2\varepsilon_{xy}]_r = [\partial u_y / \partial x]_r$ ，因为  $[\partial u_x / \partial y]_r = 0$ ）：

$$[\dot{u}_x]_r = -V[\varepsilon_x]_r \quad [\dot{u}_y]_r = -V[2\varepsilon_{xy}]_r \quad (6.101)$$

这说明位移率的间断只可能出现在应变的强间断情况<sup>1)</sup>。

## § 7 理想弹塑性材料 ( $\nu = 1/2$ ) 平面

### 应变 I 型定常扩展裂纹的局部解

在求局部解时，取图 6.1 在裂纹尖端的局部分区情况如图 7.1 所示。

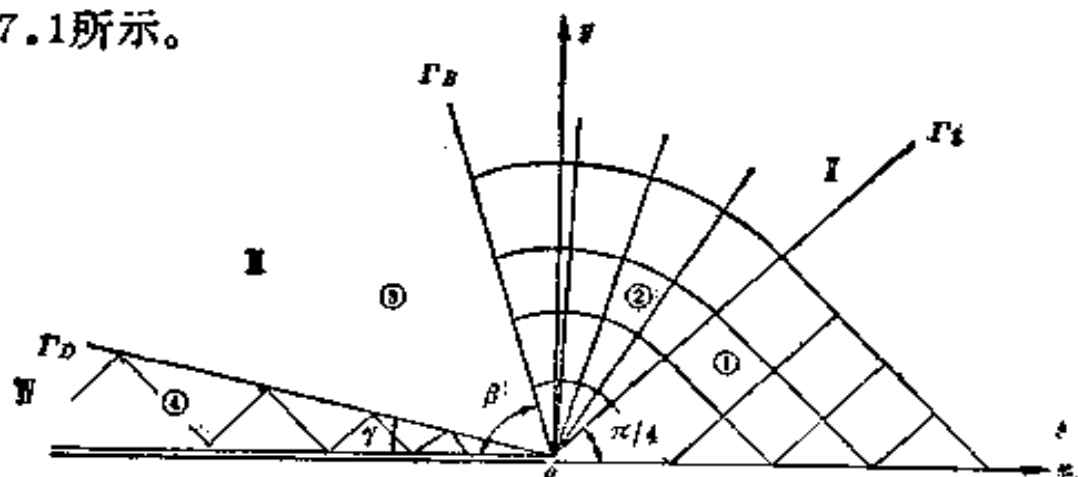


图 7.1 裂纹尖端附近的分区

**I** = ① + ② 为主塑性区（其中①为均匀应力区，②为扇形区）；**II** = ③ 为卸载区；**IV** = ④ 第二塑性区。

1) 由 (6.44) 式，这里  $[\varepsilon_y]_r = 0$ ，只有  $\varepsilon_x$  与  $\varepsilon_{xy}$  可以有间断。

## 1. 各区内的应力函数解

仿照静止裂纹的Prandtl场（第二章 § 6）主塑性区分为均匀应力区①与扇形区③两个部分，卸载区Ⅲ记作③区，第二塑性区Ⅳ记作④区<sup>1)</sup>。

由于理想弹塑性材料中应力值为有限值，故可设应力函数 $\phi$ 局部解的形式为

$$\phi = r^2 f_0(\theta) \quad (7.1)$$

实际上 (7.1) 式只是应力函数 $\phi$ 在裂纹尖端附近展开式的主项。在极坐标  $r, \theta$  中，应力分量通过应力函数的表达式 (6.8) 式成为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r,\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

将 (7.1) 代入 (7.2) 式，得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2f_0(\theta) + f_0''(\theta), \\ \sigma_\theta &= 2f_0(\theta), \quad \sigma_{r,\theta} = -f_0'(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

因 $\nu = 1/2$ ，屈服条件如 (6.33)' 式，在极坐标中可表示为

$$\frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \sigma_{r,\theta}^2 = \tau_0^2 \quad (7.4)$$

1) Prandtl 场不能全部适用于扩展裂纹，因为如果把 Prandtl 场当作扩展裂纹的解，则在扇形区与尖端后方均匀应力区的交界线 ( $\theta = 3\pi/4$ ) 处将出现使塑性功为负的剪应变强间断（见本节 (7.55)' 式后面的讨论）。

即

$$\frac{1}{4}\{f_0''(\theta)\}^2 + \{f_0'(\theta)\}^2 = \tau_0^2 \quad (7.5)$$

在主塑性区 II 的均匀应力区 ① ( $0 \leq \theta \leq \pi/4$ ) 中, 直角坐标应力分量为

$$\sigma_x = \tau_0(b-1), \quad \sigma_y = \tau_0(b+1), \quad \sigma_{xy} = 0 \quad (7.6)$$

式中  $b$  为待定常数, 与①区中的双轴平均应力有关。故极坐标应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \tau_0(b - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r,\theta} &= \tau_0 \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \tau_0(b + \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (7.6)'$$

(7.6)' 相当于在 (7.3) 式中取

$$f_0(\theta) = \frac{\tau_0}{2}(b + \cos 2\theta) \quad (7.7)$$

同 Prandtl 场的扇形区类似, 在主塑性区 II 的扇形区 ② ( $\pi/4 \leq \theta \leq \pi - \beta$ ) 中, 极坐标应力分量为

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_0 \left\{ b - 2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \quad \sigma_{r,\theta} = \tau_0 \quad (7.8)$$

这相当于在 (7.3) 式中取

$$f_0(\theta) = \frac{\tau_0}{2} \left\{ b - 2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad (7.9)$$

由 (7.8) 式, 易算得②区中的直角坐标应力分量:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \tau_0 \left\{ b - 2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) - \sin 2\theta \right\} \\ \sigma_y &= \tau_0 \left\{ b - 2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) + \sin 2\theta \right\} \\ \sigma_{xy} &= \tau_0 \cos 2\theta \end{aligned} \quad (7.8)'$$



对于静止裂纹的 Prandtl 场 (第二章 § 6), 常数  $b = \pi + 1$ 。但这里对于定常扩展裂纹,  $b$  值则略有不同, 将由本节后面讨论的连接条件决定 (见后 (7.85) 式)。

均匀应力区①与扇形区②只能在  $\theta = \pi/4$  处的射线 (即滑移线) 处相连接, 在交界线  $\Gamma_1$  上的三个应力分量全为连续, 即无间断。

第二塑性区④ ( $\pi - \gamma \leq \theta \leq \pi$ ) 与裂纹的自由表面毗连, 故在④区中为均匀应力状态,  $\sigma_x = \pm 2\tau_0$ 。关于正负符号的选择, 我们作以下的考虑。对于定常扩展问题, 物质质点从在距裂纹前方远处的弹性状态开始, 随着裂纹的扩展, 进入主塑性区①与②以后已经积累了很大的塑性变形。由于在①与②中  $\sigma_y > \sigma_x$  (注意, 对于  $\nu = 1/2$  的材料, 由 (6.24) 式  $\sigma_x = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ ,  $\varepsilon_x^e = \varepsilon_y^e = 0$ ),  $\varepsilon_y^p > 0$ ,  $\varepsilon_x^p < 0$ , 在  $x$  方向的塑性变形为负 (表示缩短), 而且由于在扇形区②中的塑性变形具有奇异性, 质点的高度 (相对于裂纹面) 越矮 (即  $|\gamma|$  越小), 塑性变形越剧。在质点处于卸载区③内时, 塑性变形保持不变, 而在进入第二塑性区④后, 新的塑性变形必与在①, ②区内所积累的塑性变形符号相反, 以使塑性变形得到部分的恢复。因此在④区中必有  $\varepsilon_y^p < 0$ ,  $\varepsilon_x^p > 0$ , 故  $\sigma_x > \sigma_y = 0$ , 沿裂纹面方向应为拉伸。第二塑性区④中的均匀应力状态应为

$$\sigma_x = +2\tau_0, \quad \sigma_y = \sigma_{xy} = 0 \quad (7.10)$$

相应的极坐标应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \tau_0(1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_\theta &= \tau_0(1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= -\tau_0 \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (7.10')$$

这相当于在 (7.3) 式中取

$$f_0(\theta) = \frac{1}{2} \tau_0 (1 - \cos 2\theta) \quad (7.11)$$

现在来求卸载区③ ( $\pi - \beta \leq \theta \leq \pi - \gamma$ ) 中的应力函数  $\phi$ 。由于在卸载区中塑性流动因子  $\lambda \equiv 0$ , 故由 (6.32) 式拟塑性应变分量  $\varepsilon_x^p$ ,  $\varepsilon_y^p$ ,  $\varepsilon_{xy}^p$  只是  $y$  的函数而与  $x$  无关, 即

$$\varepsilon_x^p = \varepsilon_x^p(y), \quad \varepsilon_y^p = \varepsilon_y^p(y), \quad \varepsilon_{xy}^p = \varepsilon_{xy}^p(y) \quad (7.12)$$

因此协调方程 (6.34) 的形式为

$$\frac{1-\nu^2}{E} \nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{d^2}{dy^2} \varepsilon_x^p(y) = 0 \quad (7.13)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

应力函数  $\phi$  已设成 (7.1) 的形式, 故

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} + 4 \right) f_0(\theta) \quad (7.14)$$

卸载区③中塑性应变起着残余应变 (或“初应变”) 的作用, 在协调方程 (7.13) 中弹性应变与塑性应变相耦合, 因此出现在方程中的项应具有相同量级的奇异性。故可设

$$\frac{d^2}{dy^2} \varepsilon_x^p(y) = \frac{D_0}{y^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} D_0 \quad (7.15)$$

式中  $D_0$  为一待定常数。于是协调方程 (7.13) 成为

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} + 4 \right) f_0(\theta) + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (7.16)$$

这是  $f_0(\theta)$  的四阶常微分方程, 其解为

$$f_0(\theta) = C_1 + C_2 \theta + C_3 \cos 2\theta + C_4 \sin 2\theta + f_0^*(\theta) \quad (7.17)$$

式中  $C_1, C_2, C_3, C_4$  为积分常数。

$$f_0^*(\theta) = -\frac{ED_0}{4(1-\nu^2)} \left[ (\cos 2\theta - 1) \ln \sin \theta + \left( \theta + \frac{1}{2} \cot \theta \right) \sin 2\theta \right] \quad (7.18)$$

以后需要用的  $f_0^*(\theta)$  各阶导数表达式有:

$$\frac{d}{d\theta} f_0^*(\theta) = -\frac{ED_0}{4(1-\nu^2)} [-2\sin 2\theta \ln \sin \theta - \sin 2\theta + 2\theta \cos 2\theta] \quad (a)$$

$$\left( \frac{d^2}{d\theta^2} + 4 \right) f_0^*(\theta) = \frac{ED_0}{1-\nu^2} \ln \sin \theta$$

$$\left( \frac{d^2}{d\theta^2} + 4 \right) f_0(\theta) = 4(C_1 + C_2\theta) + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \ln \sin \theta \quad (b)$$

$$\left( \frac{d^3}{d\theta^3} + 4 \frac{d}{d\theta} \right) f_0^*(\theta) = \frac{ED_0}{1-\nu^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\left( \frac{d^3}{d\theta^3} + 4 \frac{d}{d\theta} \right) f_0(\theta) = 4C_2 + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (c)$$

$$\left( \frac{d^4}{d\theta^4} + 4 \frac{d^2}{d\theta^2} \right) f_0^*(\theta) = -\frac{ED_0}{1-\nu^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} & \cos 2\theta \frac{d^2}{d\theta^2} f_0^*(\theta) + 2\sin 2\theta \frac{d}{d\theta} f_0^*(\theta) \\ &= \frac{ED_0}{1-\nu^2} (\ln \sin \theta + \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (e)$$

$$\begin{aligned} & \sin 2\theta \frac{d^2}{d\theta^2} f_0^*(\theta) - 2\cos 2\theta \frac{d}{d\theta} f_0^*(\theta) \\ &= \frac{ED_0}{1-\nu^2} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \end{aligned} \quad (7.18)'$$

将 (7.17) 式代入 (7.3), 得卸载区③中的极坐标应力分

量:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= 2f_0(\theta) + f_0''(\theta) \\
 &= 2C_1 + 2C_2\theta - 2C_3\cos 2\theta - 2C_4\sin 2\theta \\
 &\quad + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \left[ \cos^2\theta \ln \sin \theta + \frac{1}{2}\theta \sin 2\theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}\cos^2\theta \right] \\
 \sigma_\theta &= 2f_0(\theta) \\
 &= 2C_1 + 2C_2\theta + 2C_3\cos 2\theta + 2C_4\sin 2\theta \\
 &\quad + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \left[ \sin^2\theta \ln \sin \theta - \frac{1}{2}\theta \sin 2\theta \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}\cos^2\theta \right] \\
 \sigma_{r,\theta} &= -f_0'(\theta) \\
 &= -C_2 + 2C_3\sin 2\theta - 2C_4\cos 2\theta \\
 &\quad + \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)} \left[ -2\sin 2\theta \ln \sin \theta - \sin 2\theta \right. \\
 &\quad \left. + 2\theta \cos 2\theta \right]
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

经过坐标转换后, 可得直角坐标应力分量:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= 2f_0(\theta) + f_0'(\theta)\sin 2\theta + f_0''(\theta)\cos^2\theta \\
 \sigma_y &= 2f_0(\theta) - f_0'(\theta)\sin 2\theta + f_0''(\theta)\sin^2\theta \\
 \sigma_{xy} &= -f_0'(\theta)\cos 2\theta + \frac{1}{2}f_0''(\theta)\sin 2\theta
 \end{aligned} \right\} \tag{7.19}'$$

在卸载区③要求不破坏屈服条件 (6.33)', 即

$$K_0(\theta) \leq \tau_0^2 \tag{7.20a}$$

式中  $K_0(\theta)$  为最大剪应力的平方:

$$\begin{aligned}
 K_0(\theta) &= \frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \sigma_z^2 \\
 &= \frac{1}{4}\{f_0''(\theta)\}^2 + \{f_0'(\theta)\}^2 \quad (7.20b)
 \end{aligned}$$

以后需要 $K_0(\theta)$ 的一阶与二阶导数表示式。

$$K_0'(\theta) = -\frac{1}{2}\{f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta)\}f_0''(\theta) \quad (7.21)$$

将(7.16)式代入, 并利用(7.18)'的(c)式, 得

$$K_0'(\theta) = 2\left\{C_2 + \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)}\cot\theta\right\}f_0''(\theta) \quad (7.21)'$$

故

$$\begin{aligned}
 K_0''(\theta) &= 2\left\{C_2 + \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)}\cot\theta\right\}f_0'''(\theta) \\
 &\quad - 2\frac{ED_0}{4(1-\nu^2)}\csc^2\theta f_0''(\theta) \quad (7.22)
 \end{aligned}$$

附带指出, 塑性区①、②与④中的 $f_0(\theta)$ , (7.7)、(7.9)与(7.11)式, 均满足屈服条件:

$$K_0(\theta) = \tau_0^2 \quad (7.23)$$

因此, 在塑性区①、②、④中

$$K_0'(\theta) = -\frac{1}{2}\{f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta)\}f_0''(\theta) = 0$$

$$K_0''(\theta) = 0 \quad (7.24)$$

在均匀应力区①与④,  $f_0(\theta)$ 使(7.24)式中 $K_0'(\theta)$ 的第一个因子为零, 即 $f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta) = 0$ , 而在扇形区③,  $f_0(\theta)$ 则使 $K_0'(\theta)$ 的第二个因子为零, 即 $f_0''(\theta) = 0$ 。

至此, 我们一共有 $b$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $D_0$ 六个常数和两个角度 $\beta$ ,  $\gamma$ (图7.1), 即一共八个常数需要确定。为了

确定它们需要考虑区域之内的连接条件。至于应力边界条件，在 $\theta = 0$ 处的对称条件 $\sigma_{r\theta} = 0$ （或 $\sigma_{xy} = 0$ ）与在 $\theta = \pi$ 处的裂纹表面自由条件 $\sigma_\theta = \sigma_{r\theta} = 0$ （或 $\sigma_y = \sigma_{xy} = 0$ ）已各由①区与④区的应力状态（7.6）与（7.10）式所满足。

## 2. 连接条件

在极坐标 $r, \theta$ 中第一与第二连接条件（6.42）取（6.77）的形式，以（7.1）式的 $\phi = r^2 f_0(\theta)$ 代入后，它们成为

$$[f_0(\theta)]_r = 0, \quad [f_0'(\theta)]_r = 0 \quad (7.25)$$

第三连接条件（6.57）则取（6.83）的形式，故

$$[f_0''(\theta)]_r = 0 \quad (7.26)$$

考虑到当 $r \rightarrow 0$ 时，间断线的 $s$ 与 $n$ 方向各与极坐标的 $r$ 与 $-\theta$ 方向趋近于一致（见（6.73）、（6.89）以及（6.85）式），在极坐标中第四连接条件（6.64）的形式为

$$\begin{aligned} -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{r} [f_0'''(\theta)]_r &= \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sin\theta_0} [\lambda]_r - \frac{2}{R_{20}} \cot\theta_0 [e_{r\theta}^p]_r \\ &\quad - 2 \frac{d}{dr} [e_{r\theta}^p]_r \end{aligned} \quad (7.27)$$

式中 $\theta_0$ 与 $R_{20}$ 各为间断线 $\Gamma$ 在裂纹尖端处的极角与曲率半径（图6.3）。对于强间断（见（6.66）式），必有 $\sigma_r - \sigma_\theta = 0$ ，而对于弱间断（见（6.67）式）则 $[e_{r\theta}^p]_r = 0$ 。第五连接条件（6.71）式的各项可计算如下。利用（6.88）、（7.1）式，得

$$\frac{1-\nu^2}{E} \left[ \frac{\partial^4 \phi}{\partial n^4} \right]_r \rightarrow \frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{r^2} [f_0^{(4)}(\theta)]_r$$

利用（6.73）、（6.85）、（7.1）式，得

$$-\frac{1-\nu^2}{E} \tan\theta \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial n^3} \right]_r \rightarrow -\frac{1-\nu^2}{E} (-\cot\theta_0) \frac{d}{dr}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ -\frac{1}{r} f_0'''(\theta) \right]_r \\ & = \frac{1-v^2}{E} \cot \theta_0 \frac{1}{r^2} [f_0'''(\theta)]_r \end{aligned}$$

利用 (6.73), (6.89), (7.3) 式, 得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\cos\vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial n} [\lambda(\sigma_s - \sigma_n)] \right]_r = -\frac{1}{2\cos\vartheta} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial n} (\sigma_s - \sigma_n) \right. \\ & \quad \left. + \lambda \frac{\partial}{\partial n} (\sigma_s - \sigma_n) \right]_r \rightarrow \\ & \rightarrow -\frac{1}{2\sin\theta_0} \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \lambda \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{4\sigma_{r\theta}}{r} \right) \right]_r \\ & = \frac{1}{2\sin\theta_0} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} f_0''(\theta) + \frac{\lambda}{r} f_0'''(\theta) + \frac{4\lambda}{r} f_0'(\theta) \right]_r \end{aligned}$$

利用 (6.73), (7.3) 式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2R_{20}'\cos\vartheta} [\lambda]_r (\sigma_n - \sigma_s) \rightarrow \frac{1}{2R_{20}\sin\theta_0} [\lambda]_r (\sigma_\theta - \sigma_r) \\ & = -\frac{1}{2R_{20}\sin\theta_0} [\lambda]_r f_0''(\theta) \end{aligned}$$

利用 (6.73), (6.89), (6.96), (7.3) 式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\cos\vartheta} \frac{d}{ds} ([\lambda]_r \sigma_{ns}) = \frac{2}{\cos\vartheta} \left( \frac{d[\lambda]_r}{ds} \sigma_{ns} + [\lambda]_r \frac{d\sigma_{ns}}{ds} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{2}{\sin\theta_0} \left\{ \frac{d[\lambda]_r}{dr} (-\sigma_{r\theta}) - [\lambda]_r \left( \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{R_{20}} \right) \right\} \\ & = \frac{2}{\sin\theta_0} \left\{ \frac{d[\lambda]_r}{dr} f_0'(\theta) + [\lambda]_r \frac{f_0''(\theta)}{R_{20}} \right\} \end{aligned}$$

利用 (6.73) 式, 得

$$-2 \frac{d^2 \theta}{ds^2} [e_{n,s}^p]_r \rightarrow 2 \frac{d^2 \theta_0}{ds^2} [e_{r,\theta}^p]_r$$

因此第五连接条件 (6.71), 乘以  $\sin \theta_0$  后成为

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\sin \theta_0}{r^2} [f_0''(\theta)]_r + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\cos \theta_0}{r^2} [f_0'''(\theta)]_r \\ & + \frac{1}{2r} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} f_0''(\theta) + \lambda f_0'''(\theta) + 4\lambda f_0'(\theta) \right]_r \\ & - \frac{1}{2R_{20}} [\lambda]_r f_0''(\theta) + 2 \left\{ \frac{d[\lambda]_r}{dr} f_0'(\theta) + [\lambda]_r \frac{f_0''(\theta)}{R_{20}} \right\} \\ & + 2 \sin \theta_0 \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{R_{20}} \right) [e_{r,\theta}^p]_r = 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

式中  $1/R_{20}$ ,  $d(1/R_{20})/ds$  均取间断线  $\Gamma$  在裂纹尖端处的值。

以上 (7.25) — (7.28) 式就是第一至第五连接条件在裂纹尖端附近 ( $r \rightarrow 0$ ) 的极坐标形式。可以看出, 第四连接条件 (7.27) 式与第五连接条件 (7.28) 式除了  $f_0(\theta)$  函数以外还涉及到塑性流动因子与塑性应变间断  $[\lambda]_r$  以及  $[e_{r,\theta}^p]_r$ 。

### 3. 常数的确定

为了确定前述的八个待定常数, 先写下每个间断线处 (图7.1) 的前三个连接条件 (7.25) 与 (7.26)。至于第四与第五连接条件, 即 (7.27) 与 (7.28), 则可用于求  $\lambda$  与  $e_{r,\theta}^p$  的间断。如前所述, 在主塑性区 II 中均匀应力区①与扇形区②的分界线  $\Gamma_1$  处应力分量全连续。故前三个连接条件已经满足。需要满足的只是卸载边界  $\Gamma_B$  处 ( $\theta = \pi - \beta$ ) 与二次加载边界  $\Gamma_D$  处 ( $\theta = \pi - \gamma$ ) 的前三个连接条件。

利用 (7.9) 与 (7.17) 式, 在卸载边界  $\Gamma_B$  处的前三个连接条件  $[f_0(\theta)]_{rB} = 0$ ,  $[f_0'(\theta)]_{rB} = 0$ ,  $[f_0''(\theta)]_{rB} = 0$  各



为

$$C_1 + C_2(\pi - \beta) + C_3 \cos 2(\pi - \beta) + C_4 \sin 2(\pi - \beta) + f_0^*(\pi - \beta) = \frac{1}{2} \tau_0 \left\{ b - 2 \left( \pi - \beta - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad (7.29)$$

$$C_2 - 2C_3 \sin 2(\pi - \beta) + 2C_4 \cos 2(\pi - \beta) + f_0^{*'}(\pi - \beta) = -\tau_0 \quad (7.30)$$

$$-4C_3 \cos 2(\pi - \beta) - 4C_4 \sin 2(\pi - \beta) + f_0^{*''}(\pi - \beta) = 0 \quad (7.31)$$

利用 (7.11) 与 (7.17) 式, 在卸载边界  $\Gamma_D$  处的 前三 个连接条件  $[f_0(\theta)]_{\Gamma_D} = 0$ ,  $[f_0'(\theta)]_{\Gamma_D} = 0$ ,  $[f_0''(\theta)]_{\Gamma_D} = 0$  则各为

$$C_1 + C_2(\pi - \gamma) + C_3 \cos 2(\pi - \gamma) + C_4 \sin 2(\pi - \gamma) + f_0^*(\pi - \gamma) = \frac{1}{2} \tau_0 [1 - \cos 2(\pi - \gamma)] \quad (7.32)$$

$$C_2 - 2C_3 \sin 2(\pi - \gamma) + 2C_4 \cos 2(\pi - \gamma) + f_0^{*'}(\pi - \gamma) - \tau_0 \sin 2(\pi - \gamma) \quad (7.33)$$

$$-4C_3 \cos 2(\pi - \gamma) - 4C_4 \sin 2(\pi - \gamma) + f_0^{*''}(\pi - \gamma) = 2\tau_0 \cos 2(\pi - \gamma) \quad (7.34)$$

因此为了确定八个常数, 我们只有 (7.29) — (7.34) 式六个方程。所缺的两个方程, 其中一个可以仿照Ⅲ型裂纹 (4.73) 式的推导, 根据卸载区中不破坏屈服条件 (7.20) 式的要求同塑性功增量恒为正 (或零) 的要求得到。而另一个则可根据 (7.15) 式得到, 即把以后求得的③区塑性应变分量  $\varepsilon_x^p(y)$  代回到 (7.15) 式所设的式。在推导这两个所缺的方程以前, 先利用上述六个方程把六个常数  $b$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$ ,  $D_0$  都以两个角度  $\beta$ ,  $\gamma$  表示。过程如下:

将 (7.32) 式与 (7.34) 式的  $1/4$  倍相加, 消去  $C_3$ ,  $C_4$ ,

再利用 (7.18)' 的 (b) 式得

$$C_1 = -(\pi - \gamma)C_2 + \frac{\tau_0}{2} - \frac{ED_0}{4(1 - \nu^2)} \ln \sin \gamma \quad (7.35)$$

同样, 将 (7.29) 式与 (7.31) 式的  $1/4$  倍相加, 消去  $C_3$ ,  $C_4$ , 并利用 (7.18)' 的 (b) 式, 得到

$$\begin{aligned} C_1 + C_2(\pi - \beta) + \frac{ED_0}{4(1 - \nu^2)} \ln \sin \beta \\ = \frac{1}{2} \tau_0 \left[ b - 2 \left( \pi - \beta - \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned}$$

将 (7.35) 式代入上式的  $C_1$ , 得

$$\begin{aligned} b = 2 \left( \frac{3}{4} \pi - \beta \right) + 1 - \frac{2}{\tau_0} \left[ C_2(\beta - \gamma) \right. \\ \left. - \frac{ED_0}{4(1 - \nu^2)} \ln \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right] \quad (7.36) \end{aligned}$$

由 (7.33) 及 (7.34) 式解出  $C_3$  与  $C_4$ , 并利用 (7.18)' 的 (e) 式与 (f) 式, 得

$$C_3 = -\frac{1}{2} (C_2 \sin 2\gamma + \tau_0) + \frac{ED_0}{4(1 - \nu^2)} (\ln \sin \gamma + \cos^2 \gamma) \quad (7.37)$$

$$C_4 = -\frac{1}{2} C_2 \cos 2\gamma + \frac{ED_0}{4(1 - \nu^2)} \left( \pi - \gamma - \frac{1}{2} \sin 2\gamma \right) \quad (7.38)$$

同样, 由 (7.30) 与 (7.31) 式也可解出  $C_3$  与  $C_4$ , 利用 (7.18)' (e) 式与 (f) 式, 得

$$C_3 = -\frac{1}{2} (C_2 + \tau_0) \sin 2\beta + \frac{ED_0}{4(1 - \nu^2)} (\ln \sin \beta + \cos^2 \beta) \quad (7.39)$$

$$C_4 = -\frac{1}{2}(C_2 + \tau_0)\cos 2\beta + \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)}\left(\pi - \beta - \frac{1}{2}\sin 2\beta\right) \quad (7.40)$$

由 (7.37) 与 (7.39) 式消去  $C_3$ , 由 (7.38) 与 (7.40) 式消去  $C_4$ , 各得到

$$C_2(\sin 2\beta - \sin 2\gamma) - \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)}\left(2\ln\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \cos 2\beta - \cos 2\gamma\right) = \tau_0(1 - \sin 2\beta) \quad (7.41)$$

$$C_2(\cos 2\beta - \cos 2\gamma) + \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)}[2(\beta - \gamma) + \sin 2\beta - \sin 2\gamma] = -\tau_0\cos 2\beta \quad (7.42)$$

至此, 最后的结果是: 由 (7.41), (7.42) 式可解出  $C_2$  与  $D_0$  以两角  $\beta, \gamma$  的表达式。然后代入 (7.35), (7.36), (7.37)(或 (7.39)), (7.38)(或 (7.40)) 分别得到  $C_1, b, C_3, C_4$  以  $\beta, \gamma$  的表达式。也即所有六个常数均可以  $\beta, \gamma$  表示。

为了求  $\beta$  与  $\gamma$  还需要建立目前尚缺的两个方程。为此, 需要先进行变形分析。

#### 4. 各区塑性流动因子 $\lambda$ 与塑性应变

对于理想弹性材料, 因应力为有限, 故弹性应变亦为有限。只有塑性应变可能在裂纹尖端处有奇异性。为了计算各区的塑性应变, 首先必须计算各区的塑性流动因子  $\lambda$ 。

显然, 在卸载区③中塑性流动因子  $\lambda$  恒等于零。在塑性区①, ②与④中, 塑性应变与应力函数  $\phi$  必须满足协调方程 (6.34), 而塑性流动因子  $\lambda$  与应力函数  $\phi$  则必须满足协调方程率 (6.37) 式, 其中  $P(e^p)$  由 (6.40) 式给出。用塑性区①, ②与④的  $f_0(\theta)$  式 (7.7), (7.9) 与 (7.11) 代入

(7.14), 得到

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} + 4 \right) f_0(\theta) = 0 \quad (7.13)$$

因此在塑性区①, ②与④内的弹性变形是单独地满足协调方程的。虽然弹性变形满足协调方程, 但不一定存在一单值的、有限的位移。例如, 由扇形区②的应力 (7.8) 引起的弹性应变为 (当  $\nu = 1/2$ ) 时,

$$\varepsilon_r^e = \varepsilon_\theta^e = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \tau_0 \left\{ b - 2 \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right\} = 0,$$

$$\varepsilon_{r,\theta}^e = \frac{1+\nu}{E} \tau_0$$

但是不存在包括裂纹尖端在内的单值的与有限的位移。从这个意义上说来, 在扇形区内的弹性变形是不协调的。为了使变形真正地协调, 必须有塑性变形, 而且下文中将会看到这塑性变形是具有奇异性的。

由协调方程 (6.34) 可知, 在①, ②与④区内的塑性变形也必须单独满足协调方程, 即

$$P(\varepsilon^p) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x^p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^p}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^p}{\partial x \partial y} = 0 \quad (7.44)$$

在极坐标中  $P(\varepsilon^p)$  的表达式可由 (6.36) 令  $\alpha = r$ ,  $\beta = \theta$ ,  $A = 1$ ,  $B = r$  而得到。

$$\begin{aligned} P(\varepsilon^p) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_\theta^p) - \varepsilon_r^p - \frac{\partial \varepsilon_{r,\theta}^p}{\partial \theta} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \varepsilon_r^p - r \frac{\partial \varepsilon_{r,\theta}^p}{\partial r} - 2 \varepsilon_{r,\theta}^p \right) \right\} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varepsilon_\theta^p) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r^p}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r,\theta}^p}{\partial r \partial \theta} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial \theta} \quad (7.45)$$

在①, ②与④区中的协调方程率 (6.37) 则为

$$P(\varepsilon^p) = 0 \quad (7.46)$$

由 (6.40) 式, 令  $\nu = 1/2$ , 可得到  $P(\varepsilon^p)$  在直角坐标中的形式:

$$\begin{aligned} P(\varepsilon^p) = & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \sigma_x + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \sigma_y - 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} \sigma_{xy} \\ & - \frac{1}{2} (\nabla^2 \lambda) (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x + \sigma_y) \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \lambda \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (7.47)$$

或利用应力分量通过应力函数  $\phi$  的表示式, 得

$$\begin{aligned} P(\varepsilon^p) = & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ & - \frac{1}{2} (\nabla^2 \lambda) \nabla^2 \phi + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \phi + \frac{1}{2} \lambda \nabla^2 \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (7.47)''$$

在极坐标中相应的表达式, 可利用 (7.2) 式, 得

$$\begin{aligned} P(\varepsilon^p) = & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} \sigma_r + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} \right) \sigma_\theta \\ & - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) \sigma_{r\theta} - \frac{1}{2} (\nabla^2 \lambda) (\sigma_r + \sigma_\theta) \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_r + \sigma_\theta) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \lambda \nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (7.48)$$

或

$$\begin{aligned} P(\varepsilon^p) = & \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \\ & + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2} (\nabla^2 \lambda) \nabla^2 \phi \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 \phi + \frac{1}{2} \lambda \nabla^2 \nabla^2 \phi \quad (7.48)' \end{aligned}$$

(7.47), (7.48) 式中的  $\nabla^2 \nabla^2 \phi$ , 由 (7.43), 应等于零。

### (1) 主塑性区的均匀应力区①

将①区的应力 (7.6) 式代入 (7.47), 得①区的协调方程率

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 0 \quad (7.49)$$

其解为

$$\lambda = \lambda_1(x+y) + \lambda_2(x-y) \quad (7.50)$$

这里  $\lambda_1, \lambda_2$  分别为其相应自变量  $x+y$  与  $x-y$  的任意函数,

(7.50) 式  $\lambda$  也可写成

$$\lambda = \lambda_1(\sqrt{2} y') + \lambda_2(\sqrt{2} x') \quad (7.50)'$$

式中  $x', y'$  为旋转  $\pi/4$  角的直角坐标 (图7.2)。根据对  $x$  轴的对称性,  $\lambda_1$  与  $\lambda_2$  应为同一函数。此函数应无奇异性, 因为如有奇异性, 则奇异性必沿平行于  $x'$  或  $y'$  轴的直线伸展至远处 (实际上, 奇异性只能出现在裂纹尖端附近)。因此, 由

(6.32) 式, 塑性应变  $\varepsilon_x^p, \varepsilon_y^p, \varepsilon_{xy}^p$  亦无奇异性, 即

$$\varepsilon_x^p = O(1), \quad \varepsilon_y^p = O(1), \quad \varepsilon_{xy}^p = O(1) \quad (7.51)$$

### (2) 主塑性区的扇形区②

将②区的应力 (7.8) 式代入 (7.46), 利用 (7.48) 式, 化简后, 得②区的协调方程率

$$-\frac{2\tau_0}{r} \left( -\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) = 0$$

即 
$$\left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} = 0 \quad (7.52)$$

其解为 
$$\lambda = \frac{g(\theta)}{r} + h(r) \quad (7.53)$$

式中  $g(\theta)$ ,  $h(r)$  均为任意函数。 $h(r)$  将于以后求出。

在计算扇形区②的塑性应变之前, 必须先研究均匀应力区①与扇形区②交界线  $\Gamma_1$  ( $\theta = \pi/4$ ) 处(图 7.1)的第四与第五连接条件, 以定出通过  $\Gamma_1$  时塑性应变  $\varepsilon_{r,\theta}^p$  与塑性流动因子  $\lambda$  的间断。

以后为方便起见, 取物理量  $P$  在  $\Gamma$  ( $\theta = \theta_0$ ) 之间断量  $[P]$ , 为

$$[P]_r = (P)_{\theta=\theta_0+0} - (P)_{\theta=\theta_0-0} \quad (7.54)$$

在连接条件中, 每一项都含有一个间断量, 如果改变 (7.54) 式中  $[P]$  的定义, 即交换作为被减数与减数的两侧, 则间断量变号, 连接条件等式仍成立。

将第四连接条件 (7.27) 式用于  $\Gamma_1$ 。令  $\theta_0 = \pi/4$ , 假定间断线在裂纹尖端处曲率  $1/R_{20}$  无奇异性 (或奇异性低于  $1/r$ ), 则 (7.27) 式右端第二项  $-\frac{2}{R_{20}} \cot \theta_0 [\varepsilon_{r,\theta}^p]_r$  非主奇异项可以省去。将①区的  $f_0(\theta)$  (7.7) 式和②区的  $f_0(\theta)$  (7.9) 式代入 (7.27) 式, 并注意在  $\Gamma_1$  处  $\sigma_r - \sigma_\theta = 0$ 。在  $\Gamma_1$  处第四连接条件 (7.27) 式成为

$$-\frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{r} \left\{ 0 - 4\tau_0 \sin 2\theta \right\}_{\theta=\pi/4} = -2 \frac{d}{dr} [\varepsilon_{r,\theta}^p]_r$$

于是对  $r$  积分后, 得到通过  $\Gamma_1$  时的塑性剪应变间断量

$$[e_{r\theta}^p]_{r_1} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \tau_0 \ln \frac{A}{r} \quad (7.55)$$

由  $[e_{r\theta}^p]_{r_1}$  所引起的  $e_x^p$ ,  $e_y^p$ ,  $e_{xy}^p$  间断量为

$$\left. \begin{aligned} [e_x^p]_{r_1} &= -[e_{r\theta}^p]_{r_1} \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = -[e_{r\theta}^p]_{r_1} \\ [e_y^p]_{r_1} &= [e_{r\theta}^p]_{r_1} \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = [e_{r\theta}^p]_{r_1} \\ [e_{xy}^p]_{r_1} &= [e_{r\theta}^p]_{r_1} \left(\cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.55)'$$

(7.55) 式中  $A$  为积分常数, 属于塑性区尺寸的量级 (因为塑性区尺寸是裂纹定常扩展问题中唯一尺度)。由此可见, ①区与②区的分界线  $\Gamma_1$  为一强间断线, 塑性剪应变间断量并不等于零, 但在裂纹尖端附近随着  $r$  之增大而衰减 ( $\sim \ln(A/r)$ )。 (7.55) 式的间断量  $[e_{r\theta}^p]_{r_1}$  为正, 这说明一物质质点随着裂纹的扩展, 从均匀应力区①进入扇形区②时, 塑性剪应变突然地 (瞬时地) 增大  $[e_{r\theta}^p]_{r_1}$ 。这符合塑性功为正的要求, 因为由 (7.6)' 式或 (7.8) 式, 在  $\Gamma_1$  处  $\sigma_{r\theta} = \tau_0 > 0$ , 故塑性功增量  $\sigma_{r\theta} [e_{r\theta}^p]_{r_1} > 0$ 。  $A$  的数值大小则不是局部解所能确定的。

这里顺便指出, 过去曾有人把静止裂纹的 Prandtl 场当作定常扩展解, 即让图 7.1 中的②区与④区在  $\theta = 3\pi/4$  处直接相连, 而无卸载区。这样, 在交界线  $\theta = 3\pi/4$  处的第四连接条件 (7.27) 式可利用 (7.9) 与 (7.11) 式成为

$$-\frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{r} \left\{ -4\tau_0 \sin 2\theta - 0 \right\}_{\theta=3\pi/4}$$



$$= -2 \frac{d}{dr} [\varepsilon_{r\theta}^p]_{\theta=3\pi/4}$$

于是在  $\theta = 3\pi/4$  处的塑性应变间断量为

$$[\varepsilon_{r\theta}^p]_{\theta=3\pi/4} = - \frac{2(1-\nu^2)}{E} \tau_0 \ln \frac{A}{r}$$

与 (7.55) 式符号相反, 违背塑性功为正的要求。因此, 定常扩展裂纹尖端附近的解不可能是 Prandtl 场, 而应是图 7.1 所示的含有卸载区的场, 通常称为修正的 Prandtl 场。

回到图 7.1, 将第五连接条件 (7.28) 式用于  $\Gamma_1$ , 和第四连接条件情况类似, 设  $1/R_{20}$  无奇异性 (或奇异性低于  $1/(r \ln r)$ )。则 (7.28) 式中含  $1/R_{20}$  的项, 因非主奇异项 (主奇异项  $\sim 1/r^2$ ), 可以省去。将①区的  $f_0(\theta)$  (7.7) 式与  $\lambda = 0$  (表示无奇异项), ②区的  $f_0(\theta)$  (7.9) 式及  $\lambda$  (7.53) 式代入 (7.28) 式, 则第五连接条件 (7.28) 式成为

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{r^2} \left\{ 0 - 8\tau_0 \cos 2\theta \right\}_{\theta=\pi/4} \\ & + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{r^2} \left\{ 0 - 4\tau_0 \sin 2\theta \right\}_{\theta=\pi/4} \\ & + \frac{1}{2r} \left\{ 4 \left( \frac{g(\theta)}{r} + h(r) \right) (-\tau_0) \right\}_{\theta=\pi/4} \\ & + 2 \left\{ \frac{d}{dr} \left( \frac{g(\theta)}{r} + h(r) \right) (-\tau_0) \right\}_{\theta=\pi/4} = 0 \quad (7.56) \end{aligned}$$

化简后, 得

$$\frac{dh(r)}{dr} + \frac{h(r)}{r} + \frac{2(1-\nu^2)}{Er^2} \cos \frac{\pi}{4} = 0 \quad (7.56)'$$

由此解出<sup>1)</sup>

$$h(r) = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{\ln r}{-r} \cos \frac{\pi}{4} \quad (7.57)$$

代入(7.53)式, 得②区的塑性流动因子

$$\lambda = \frac{g(\theta)}{r} - \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{\ln r}{r} \cos \frac{\pi}{4} \quad (7.58)$$

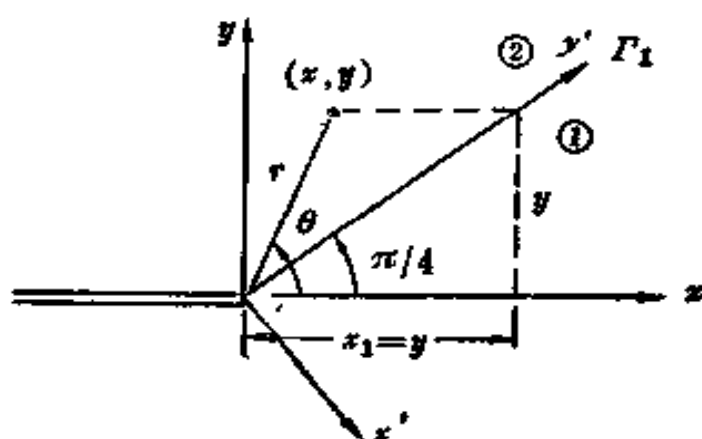


图 7.2 求②区塑性应变的积分路径

由(6.32)式, 考虑到 $\Gamma_1$ 处的塑性应变间断, 得到②区内的塑性应变:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^p &= O(1) + [\varepsilon_x^p]_{\Gamma_1} + \frac{1}{2} \int_x^{x_1} \lambda (\sigma_x - \sigma_y) dx \\ \varepsilon_y^p &= O(1) + [\varepsilon_y^p]_{\Gamma_1} + \frac{1}{2} \int_x^{x_1} \lambda (\sigma_y - \sigma_x) dx \\ \varepsilon_{xy}^p &= O(1) + [\varepsilon_{xy}^p]_{\Gamma_1} + \int_x^{x_1} \lambda \sigma_{xy} dx \end{aligned} \right\} \quad (7.59)$$

式中 $O(1)$ 项表示在 $\Gamma_1$ 上靠近①区一侧处塑性应变 (见(7.51)式),  $\Gamma_1$ 处的塑性应变间断见(7.55)式, 积分

1) (7.56) 的解 $h(r)$  只需取特解 (7.57) 式, 因齐次解已包含在 (7.53) 式之另一项 $g(\theta)/r$ 之中。

路径为沿平行于  $x$  轴的直线 (见图7.2),  $x_1 = y$  为  $\Gamma_1$  线上的  $x_1$  坐标,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  见 (7.8)' 式,  $\lambda$  见 (7.58) 式。积分结果为

$$\left. \begin{aligned} e_x^p &= -e_y^p \\ &= -\frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta \ln \frac{A}{r} + O(1) \\ e_{xy}^p &= \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} \left( \ln \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \cos \theta \right) - 1 \right\} \ln \frac{A}{r} + O(1) \end{aligned} \right\} \quad (7.60)$$

### (3) 卸载区③

在进行卸载区③的讨论以前, 先研究在扇形区②与卸载区③的交界线 (卸载边界)  $\Gamma_B$  处 ( $\theta = \pi - \beta$ ) 的连接条件。

与  $\Gamma_1$  处的第四连接条件的讨论相类似, 利用②区的  $f_0(\theta)$  (7.9) 式与③区的  $f_0(\theta)$  (7.17) 式, 得到  $\Gamma_B$  处的第四连接条件<sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned} & -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{r} \left\{ f_0'''(\theta) \right\}_{\theta=\pi-\beta} \\ & = -2 \frac{d}{dr} [e_{r\theta}^p]_{r_B} \end{aligned} \quad (7.61)$$

式中左端值可用如下方法求出。利用 (7.18)' 的 (c) 式 (令  $\theta = \pi - \beta$ ), 得③区的

1) 也可以把第四连接条件 (7.27) 左端的  $[f_0'''(\theta)]_r$  改为  $[f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta)]_r$ , 因为  $f_0'(\theta)$  无间断。这样, 计算可以简化一些。

$$\{f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta)\}_{\theta=\pi-\beta} = 4C_2 + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \cot(\pi-\beta)$$

由连接条件(7.30)  $[f'(\theta)]_{\Gamma_B} = 0$ , 并注意在②区内  $f'(\theta) = -\tau_0$ , 得③区的

$$\{f'(\theta)\}_{\theta=\pi-\beta} = -\tau_0$$

将上两式相减, 得

$$\{f_0'''(\theta)\}_{\theta=\pi-\beta} = 4(C_2 + \tau_0) - \frac{ED_0}{1-\nu^2} \cot\beta \quad (7.62)$$

由(7.61)式对  $r$  积分, 只取主奇异项, 可得在卸载边界

$$[\varepsilon_{r,\theta}^p]_{\Gamma_B} = -\frac{1-\nu^2}{2E} \left[ 4(C_2 + \tau_0) - \frac{ED_0}{1-\nu^2} \cot\beta \right] \ln \frac{A}{r} \quad (7.63)$$

由(7.8)式, 在  $\Gamma_B$  处,  $\sigma_{r,\theta} = \tau_0$ , 故塑性功恒为正(或零), 它要求在③区

$$f_0'''(\pi-\beta) = 4(C_2 + \tau_0) - \frac{ED_0}{1-\nu^2} \cot\beta \leq 0 \quad (7.64)$$

现在来研究在卸载区③的边界  $\Gamma_B$  ( $\theta = \pi - \beta$ ) 附近要求不破坏屈服条件的(7.20)式。由连接条件(7.30)与(7.31)式, 可知在卸载区③的边界  $\Gamma_B$  处  $f_0'(\theta)$ ,  $f_0''(\theta)$  之值为  $-\tau_0$  与 0。由(7.62)式可得  $\Gamma_B$  处的  $f_0'''(\theta)$  之值。把这些值代入(7.20)至(7.22)式中, 便得到在卸载区③的边界  $\Gamma_B$  处

$$K_0(\pi-\beta) = \tau_0^2$$

$$K_0'(\pi-\beta) = 0$$

$$K_0''(\pi-\beta) = 2 \left\{ C_2 - \frac{ED_0}{4(1-\nu^2)} \cot\beta \right\} \left\{ 4(C_2 + \tau_0) - \frac{ED_0}{1-\nu^2} \cot\beta \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ f_0'''(\pi - \beta) - 4\tau_0 \right\} f_0'''(\pi - \beta) \quad (7.65)$$

在  $\Gamma_B$  附近, (7.20a) 式要求 (7.65) 式之值满足

$$K_0''(\pi - \beta) \leq 0 \quad (7.66)$$

由 (7.64) 与 (7.66) 两个不等式, 要求在③区

$$f_0'''(\pi - \beta) = 4(C_2 + \tau_0) - \frac{ED_0}{1 - \nu^2} \cot \beta = 0 \quad (7.67)$$

代入 (7.63) 式, 得

$$[\varepsilon_{\theta}^p]_{\Gamma_B} = 0 \quad (7.68)$$

因此, 在卸载边界  $\Gamma_B$  处的塑性应变无间断,  $\Gamma_B$  应为弱间断线。

(7.67) 式就是上面所说的为了求八个常数时所缺的一个方程。

既然  $\Gamma_B$  为弱间断线, 由 (7.12) 式, 卸载区③中任一点的塑性应变应等于在同一高度(坐标  $y$  相等)上卸载边界  $\Gamma_B$  的相应点的塑性应变。利用 (7.60) 式, 令其中  $\theta$  与  $r$  取在  $\Gamma_B$  上的值:

$$\theta = \pi - \beta, \quad r = \frac{y}{\sin(\pi - \beta)}$$

即可得卸载区③中的塑性应变:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^p &= -\varepsilon_y^p = \\ &= -\frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \cos \frac{\pi}{4} \sin \beta \ln \frac{A \sin \beta}{y} + O(1) \\ \varepsilon_{xy}^p &= \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \cos \frac{\pi}{4} \left( \ln \frac{\tan \frac{\pi - \beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cos \beta \right) - 1 \right\} \ln \frac{A \sin \beta}{y} + O(1) \end{aligned} \right\} \quad (7.69)$$

在求解卸载区③中的协调方程 (7.13) 时, 我们曾经假设一个待定常数  $D_0$  (见 (7.15) 式)。现在已可定出这常数。将 (7.69) 式的  $\varepsilon_r^p(y)$  代入 (7.15) 式中, 比较两端  $1/y^2$  的系数, 易得

$$D_0 = - \frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \cos \frac{\pi}{4} \sin \beta \quad (7.70)$$

可以验证在卸载边界  $\Gamma_B$  处的第五连接条件也导致 (7.70) 式, 因而自动满足。这是因为在  $\Gamma_B$  的卸载区③一侧, 我们求解的是协调方程 (7.13) 式。在另一侧, 即扇形区②, 虽然求解的是协调方程率 (7.46) 式, 但对②区与①区的交界线  $\Gamma_1$  已使用过第五连接条件 (见 (7.56) 式)。这样, 由于①区无奇异性, 所以对于主奇异项说来, ②区的协调方程可以认为已满足。既然在  $\Gamma_B$  两侧的②与③区都满足协调方程, 那么  $\Gamma_B$  处的第五连接条件当然自动满足 (对主奇异项而言)。

(7.70) 式就是上面所说的为了求八个常数所缺的另一个方程。至此就有了八个方程, 即 (7.35), (7.36), (7.37) (或 (7.39)), (7.38) (或 (7.40)), (7.41), (7.42), (7.67) 与 (7.70), 可以全部定出八个常数, 计算结果见下面的第 5 小节。

#### (4) 二次加载区④

将④区的应力 (7.10) 式代入 (7.47), 得④区的协调方程率

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0 \quad (7.71)$$

其解为

$$\lambda = \lambda_3(x+y) + \lambda_4(x-y) \quad (7.72)$$

式中  $\lambda_3$  与  $\lambda_4$  各为自变量  $x+y$  与  $x-y$  的任意函数。为了决定这

两个任意函数，必须考虑卸载区③与二次塑性区④的交界线（即二次加载边界） $\Gamma_D$ 处的第四与第五连接条件。

由于 $\Gamma_D$ 不是④区的特征线，因此只能是弱间断线，

$[\varepsilon]_{\Gamma_D} = 0$ 。将③区的 $f_0(\theta)$  (7.17) 式与④区的 $f_0(\theta)$  (7.11) 式与应力(7.10)'代入 (7.27)，得到 $\Gamma_D$ 处的第四连接条件：

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1-\nu^2}{E} \frac{1}{r} \left\{ -4\tau_0 \sin 2\theta - f_0'''(\theta) \right\}_{\theta=\pi-\gamma} \\ & = \frac{[\lambda]_{\Gamma_D}}{\sin(\pi-\gamma)} - \frac{1}{2} \left\{ \tau_0(1+\cos 2\theta) \right. \\ & \quad \left. - \tau_0(1-\cos 2\theta) \right\}_{\theta=\pi-\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (7.73)$$

式中左端③区 $f_0'''(\pi-\gamma)$ 之值可以仿前 (7.62) 式的方法求得。利用 (7.18)' 的 (c) 式，令 $\theta = \pi - \gamma$ ，

$$\text{得} \quad \{f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta)\}_{\theta=\pi-\gamma} = 4C_2 + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \cot(\pi-\gamma)$$

由连接条件 (7.33)，有

$$\{f'(\theta)\}_{\theta=\pi-\gamma} = \tau_0 \sin 2(\pi-\gamma)$$

以上两式相减得③区的

$$\begin{aligned} \{f_0'''(\pi-\gamma)\}_{\theta=\pi-\gamma} &= 4C_2 + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \cot(\pi-\gamma) \\ &\quad - 4\tau_0 \sin 2(\pi-\gamma) \end{aligned} \quad (7.74)$$

将 (7.74) 代入 (7.73) 左端括弧内第二项，可得

$$\begin{aligned} [\lambda]_{\Gamma_D} &= \frac{1-\nu^2}{E\tau_0} \frac{1}{r} \frac{\sin(\pi-\gamma)}{\cos 2(\pi-\gamma)} \left( 4C_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \cot(\pi-\gamma) \right) \end{aligned}$$

因卸载区内  $\lambda=0$ , 故此式就是在④区内边界  $\Gamma_D$  上的  $\lambda$  值, 可写作

$$\lambda_{\theta=\pi-r} = \frac{1}{\tau_0 \cos 2(\pi-\gamma)} \left\{ \frac{4(1-\nu^2)C_2}{E} \sin(\pi-\gamma) + D_0 \cos(\pi-\gamma) \right\} \frac{1}{r} \quad (7.75)$$

由此可见  $\lambda$  具有  $1/r$  的奇异性, 故 (7.72) 式可写作

$$\lambda = \frac{p}{x+y} + \frac{q}{x-y} \quad (7.76)$$

式中  $p$  与  $q$  为待定常数, 将于下面 (7.81) 式求出。将

(7.76) 式代入 (7.75) 式, 可得  $p$  与  $q$  的一个关系式:

$$\begin{aligned} & (p+q)\cos(\pi-\gamma) + (q-p)\sin(\pi-\gamma) \\ &= \frac{1}{\tau_0} \left\{ D_0 \cos(\pi-\gamma) + \frac{4(1-\nu^2)C_2}{E} \sin(\pi-\gamma) \right\} \end{aligned} \quad (7.77)$$

为了要计算出  $p$  与  $q$  之值, 还必须利用  $\Gamma_D$  处的第五连接条件 (7.28)。和以前讨论的  $\Gamma_1$  处情况类似, 在 (7.28) 式中含  $1/R_{20}$  的项可以省去。由  $f_0'(\theta)$  与  $f_0''(\theta)$  均无间断, 为了以后计算方便可分别将  $[f_0'''(\theta)]_r$  和  $[f_0^{IV}(\theta)]_r$  改写为  $[f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta)]_r$  和  $[f_0^{IV}(\theta) + 4f_0''(\theta)]_r$ 。于是第五连接条件 (7.28) 式可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\sin\theta_0}{r^2} [f_0^{IV}(\theta) + 4f_0''(\theta)]_r \\ & + \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\cos\theta_0}{r^2} [f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta)]_r \\ & + \frac{1}{2r} \left[ \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} f_0''(\theta) + \lambda (f_0'''(\theta) + 4f_0'(\theta)) \right]_r + 2 \frac{d[\lambda]_r}{dr} f_0'(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (7.78)$$



对于  $\Gamma_D$ ,  $\theta_0 = \pi - \gamma$ 。卸载区③中  $\lambda = 0$ 。利用  $f_0(\theta)$  (7.17) 式, (7.18)' (b) (c) 式和第二塑性区④的  $f_0(\theta)$  (7.11) 式, 便可由 (7.78) 式得到④区在  $\Gamma_D$  处的第五连接条件:

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\sin(\pi-\gamma)}{r^2} \frac{ED_0}{1-\nu^2} \frac{1}{\sin^2(\pi-\gamma)} \\ & - \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\cos(\pi-\gamma)}{r^2} \left\{ 4C_2 + \frac{ED_0}{1-\nu^2} \cot(\pi-\gamma) \right\} \\ & + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right)_{\theta=\pi-\gamma} 2\tau_0 \cos 2(\pi-\gamma) \\ & + 2 \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right)_{\theta=\pi-\gamma} \tau_0 \sin 2(\pi-\gamma) = 0 \end{aligned} \quad (7.79)$$

由 (7.76) 式, 可知式中的

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right)_{\theta=\pi-\gamma} &= -\frac{p}{r^2} \frac{\cos(\pi-\gamma) - \sin(\pi-\gamma)}{\{\cos(\pi-\gamma) + \sin(\pi-\gamma)\}^2} \\ &+ \frac{q}{r^2} \frac{\cos(\pi-\gamma) + \sin(\pi-\gamma)}{\{\cos(\pi-\gamma) - \sin(\pi-\gamma)\}^2} \\ \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right)_{\theta=\pi-\gamma} &= -\frac{p}{r^2} \frac{1}{\cos(\pi-\gamma) + \sin(\pi-\gamma)} \\ &- \frac{q}{r^2} \frac{1}{\cos(\pi-\gamma) - \sin(\pi-\gamma)} \end{aligned}$$

将此两式代入 (7.79) 式, 经化简后可得到  $p$  与  $q$  的另一关系式:

$$\begin{aligned} & \frac{D_0}{\sin(\pi-\gamma)} - \left\{ \frac{4(1-\nu^2)C_2}{E} \cos(\pi-\gamma) \right. \\ & + \left. D_0 \frac{\cos^2(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\gamma)} \right\} - p\tau_0 \{\cos(\pi-\gamma) + \sin(\pi-\gamma)\} \\ & + q\tau_0 \{\cos(\pi-\gamma) - \sin(\pi-\gamma)\} = 0 \end{aligned} \quad (7.80)$$

由 (7.77) 与 (7.80) 两式联立解出:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{2\tau_0} \left\{ D_0 - \frac{4(1-\nu^2)}{E} C_2 \right\} \\ q &= \frac{1}{2\tau_0} \left\{ D_0 + \frac{4(1-\nu^2)}{E} C_2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7.81)$$

利用④区的应力分量 (7.10) 式与塑性流动因子  $\lambda$  (7.76) 式, 由 (6.32) 式可得④区内的塑性应变:

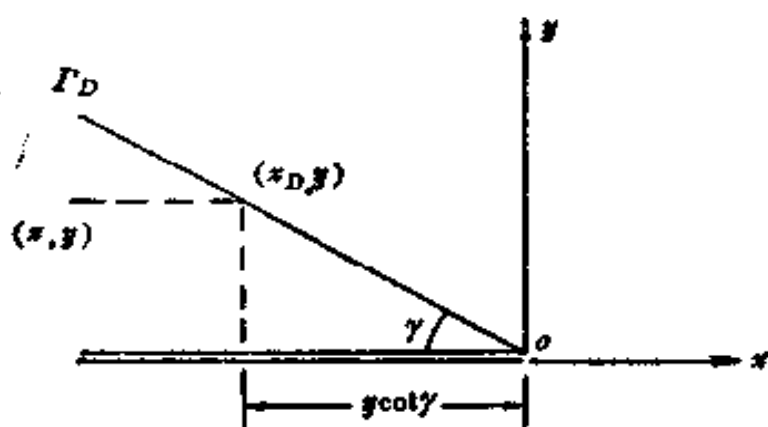


图 7.3 求④区塑性应变的积分路径

$$\varepsilon_x^p = -\varepsilon_y^p = \frac{1}{2} \int_x^{x_D} \lambda \cdot 2\tau_0 dx + \varepsilon_x^p(y)$$

$$\varepsilon_{xy}^p = \varepsilon_{xy}^p(y)$$

式中积分路径为平行于  $x$  轴的直线 ( $y = \text{const}$ , 见图 7.3),  $x_D = -y \cot \gamma$ 。两式右端末项均表示③区的塑性应变, 由 (7.69) 式给出。积分后得到

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^p = -\varepsilon_y^p &= \tau_0 p \ln \frac{(\cot \gamma - 1)y}{-(x + y)} \\ &+ \tau_0 q \ln \frac{(\cot \gamma + 1)y}{-x + y} + \varepsilon_x^p(y) \end{aligned} \quad (7.82)$$

$$\varepsilon_{xy}^p = \varepsilon_{xy}^p(y)$$

## 5. 八个常数的计算结果

现在由 (7.35), (7.36), (7.37) (或 (7.39)), (7.38) (或 (7.40)), (7.41), (7.42), (7.67) 与 (7.70) 确定八个常数  $b, C_1, C_2, C_3, C_4, D_0$  与  $\beta, \gamma$ 。

先将 (7.70) 式代入 (7.67) 式得

$$C_2 = -\tau_0 \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} \cos \beta\right) \quad (7.83)$$

然后将 (7.70) 与 (7.83) 代入 (7.41) 与 (7.42) 两式, 简化消去  $\tau_0$  后, 得到

$$\cos 2\gamma + 2 \cos \frac{\pi}{4} \left\{ \sin \beta \ln \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} - \sin(\beta - \gamma) \cos \gamma \right\} - 1 = 0 \quad (7.84a)$$

$$\cos 2\gamma - 2 \cos \frac{\pi}{4} \left\{ (\beta - \gamma) \sin \beta - \sin(\beta - \gamma) \sin \gamma \right\} = 0 \quad (7.84b)$$

因此, 求解八个常数的步骤如下: 先由 (7.84a) 与 (7.84b) 两式联立求解两个角度  $\beta$  与  $\gamma$ , 然后将  $\beta$  值代入 (7.70) 式求  $D_0$ , 代入 (7.83) 式求  $C_2$ ; 最后将  $\beta, \gamma, C_2, D_0$  值代入 (7.35), (7.36), (7.37) (或 (7.39)), (7.38) (或 (7.40)) 求  $C_1, b, C_3, C_4$ 。最后结果, 得到

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 1.185459 = 67.9218^\circ = 67^\circ 55' 18'' \\ \gamma &= 0.312403 = 17.8994^\circ = 17^\circ 53' 57'' \\ b &= 4.10535 \\ C_1 &= 3.30808\tau_0 \\ C_2 &= -1.26578\tau_0 \\ C_3 &= 0.049902\tau_0 \\ C_4 &= -1.14888\tau_0 \\ D_0 &= -\frac{4(1-\nu^2)}{E} \times 0.655256\tau_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.85)$$

式中剪切屈服限 $\tau_0$ 为拉伸屈服限 $\sigma_0$ 的 $1/\sqrt{3}$ 倍。利用(7.85)式的常数值,可按(7.6)', (7.8)', (7.19)'与(7.10)式计算①、②、③与④各区中之应力分布,结果如图7.4所示。

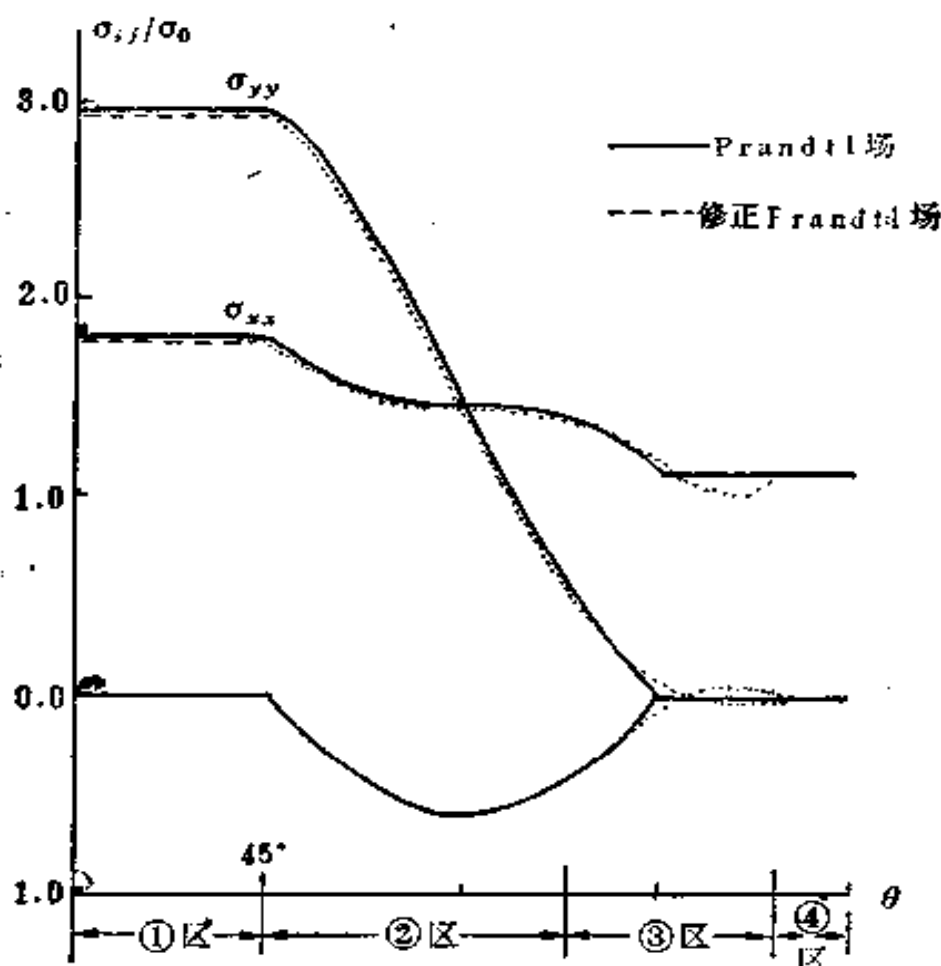


图 7.4 修正Prandtl场的应力角分布

## 6. 各区的位移

根据第4小节所得的塑性应变,加上弹性应变就是总应变。由于理想弹塑性材料的弹性应变无奇异性,所以如果塑性应变有奇异性,则弹性应变可相应略去(对于局部解),可以把塑性应变当作总应变。

在由应变求位移时,需要以下的公式。

应变分量通过位移表示式,在直角坐标中

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (7.86a)$$

在极坐标中

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (7.86b)$$

故

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r e_\theta - u_r \quad (7.87)$$

直角坐标与极坐标位移转换公式为

$$u_r = u_x \cos \theta - u_y \sin \theta, \quad u_\theta = u_x \sin \theta + u_y \cos \theta \quad (7.88)$$

$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad u_\theta = -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta \quad (7.89)$$

而应变转换公式为

$$\left. \begin{aligned} e_r &= e_x \cos^2 \theta + e_y \sin^2 \theta + e_{xy} \sin 2\theta \\ e_\theta &= e_x \sin^2 \theta + e_y \cos^2 \theta - e_{xy} \sin 2\theta \\ e_{r\theta} &= (e_y - e_x) \sin \theta \cos \theta + e_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (7.90)$$

对于塑性应变, 设  $\nu = 1/2$ , 故  $e_x = -e_y^p$ ,

$$\left. \begin{aligned} e_r^p &= e_x^p \cos 2\theta + e_{xy}^p \sin 2\theta = -e_\theta^p \\ e_{r\theta}^p &= -e_x^p \sin 2\theta + e_{xy}^p \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (7.91)$$

于是:

(1) 主塑性区的均匀应力区①

因 (7.51) 式, 应变无奇异性, 故位移为  $O(r)$  量级。

$$e_{\alpha\beta} \sim O(1), \quad u_x, u_y \text{ 或 } u_r, u_\theta \sim O(r) \quad (7.92)$$

(2) ①, ②区交界线  $\Gamma$ ,

位移同 (7.92) 式。

(3) 主塑性区的扇形区②

$\varepsilon_x^I, \varepsilon_y^I, \varepsilon_z^I$ , 见 (7.60) 式。转换到极坐标中, 得

$$\varepsilon_r^I = -\varepsilon_\theta^I$$

$$= \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \sin 2\theta \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} - 1 \right) + \sqrt{2} \sin \theta \right\} \ln \frac{A}{r} + O(1) \quad (7.93a)$$

$$\varepsilon_\theta^I = \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\theta \ln \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} + \sqrt{2} \cos \theta - \cos 2\theta \right\} \ln \frac{A}{r} + O(1) \quad (7.93b)$$

积分求位移得

$$\begin{aligned} u_r &= \int_0^r \frac{\partial u_r}{\partial r} dr \approx \int_0^r \varepsilon_r^I dr \\ &= \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\theta \ln \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} + 2 \sin \theta \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \theta \right) \right\} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \end{aligned} \quad (7.94a)$$

故由 (7.87) 式,

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r \varepsilon_\theta - u_r \approx r \varepsilon_\theta^I - u_r =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\theta \ln \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{2} \sin \theta - \sin 2\theta \right\} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \\
u_\theta &= \int_{\pi/4}^{\theta} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right)_{r=\text{const}} d\theta + (u_\theta)_r \\
&= -\frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos 2\theta) \ln \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2} \cos \theta + 1 + \cos 2\theta \right\} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \quad (7.94b)
\end{aligned}$$

转换到直角坐标中, 得

$$\begin{aligned}
u_x &= u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \\
&= \frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \ln \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \\
&\quad (7.95a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y &= u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \\
&= \frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \theta \right) r \ln \frac{A}{r} + O(r) \quad (7.95b)
\end{aligned}$$

因此, 位移的主项为  $r \ln(A/r)$ 。

(4) ②, ③区交界线  $\Gamma_B$

在 (7.94) 式中令  $\theta = \pi - \beta$ ,  $r = y/\sin \beta$ , 得

$$\begin{aligned}
(u_r)_{\Gamma_\theta} &= \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\beta \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} \right. \\
&\quad \left. + 2 \sin \beta \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \beta \right) \right\} \frac{y}{\sin \beta} \ln \frac{A \sin \beta}{y} \\
&\quad + O(r) \quad (7.96a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_\theta)_{\Gamma_\theta} &= -\frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos 2\beta) \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{2} \cos \beta + 1 + \cos 2\beta \right\} \frac{y}{\sin \beta} \ln \frac{A \sin \beta}{y} \\
&\quad + O(r) \quad (7.96b)
\end{aligned}$$

(5) 卸载区③

$\varepsilon_x^p, \varepsilon_y^p, \varepsilon_{xy}^p$  见 (7.69) 式。转换到极坐标中, 得

$$\varepsilon_r^p = -\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_x^p \cos 2\theta + \varepsilon_{xy}^p \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} - 1 \right) \sin 2\theta \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2} \sin(2\theta + \beta) \right\} \ln \frac{A \sin \beta}{y} + O(1) \quad (7.97a)
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{r\theta}^p = -\varepsilon_{\theta r}^p = \varepsilon_x^p \sin 2\theta + \varepsilon_{xy}^p \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} - 1 \right) \cos 2\theta \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2} \cos(2\theta + \beta) \right\} \ln \frac{A \sin \beta}{y} + O(1) \quad (7.97b)
\end{aligned}$$



积分得

$$\begin{aligned}
 u_r &= \int_0^r \frac{\partial u_r}{\partial r} dr \approx \int_0^r e_r^p dr \\
 &= \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} - 1 \right) \sin 2\theta \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{2} \sin(2\theta + \beta) \right\} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \quad (7.98a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= r e_\theta - u_r \approx r e_\theta^p - u_r \\
 &= \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ -2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} - 1 \right) \sin 2\theta \right. \\
 &\quad \left. + 2\sqrt{2} \sin(2\theta + \beta) \right\} r \ln \frac{A}{r} + O(r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_\theta &= \int_{\pi-\beta}^{\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta + (u_\theta)_{\Gamma_D}, (y=r\sin\beta) \\
 &= -\frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} - 1 \right) \sin^2\theta + 1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2\theta + \beta) \right\} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \quad (7.98b)
 \end{aligned}$$

(6) ③, ④区 交界线 $\Gamma_D$

由(7.98), 令 $\theta = \pi - \gamma$ , 得

$$(u_r)_{\Gamma_D} = \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} - 1 \right) \sin 2\gamma \right.$$

$$+ \sqrt{2} \sin(2\gamma - \beta) \left\} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \quad (7.99a)$$

$$(u_\theta)_{\Gamma_D} = \frac{2\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} - 1 \right) (\cos 2\gamma - 1) - 2 - \sqrt{2} \cos(2\gamma - \beta) \right\} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \quad (7.99b)$$

转换到直角坐标中, 得

$$\begin{aligned} (u_x)_{\Gamma_D} &= (u_r)_{\Gamma_D} \cos(\pi - \gamma) - (u_\theta)_{\Gamma_D} \sin(\pi - \gamma) \\ &= \frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \gamma \ln \frac{\cot \frac{\beta}{2}}{\tan \frac{\pi}{8}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\beta - \gamma) \right\} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \quad (7.100a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_y)_{\Gamma_D} &= (u_r)_{\Gamma_D} \sin(\pi - \gamma) + (u_\theta)_{\Gamma_D} \cos(\pi - \gamma) \\ &= \frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left\{ \cos \gamma + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\beta - \gamma) \right\} r \ln \frac{A}{r} + O(r) \quad (7.100b) \end{aligned}$$

#### (7) 第二塑性区④

由 (7.82) 积分 (路径见图7.3) 求位移, 得

$$\begin{aligned} u_x &= \int_{x_D}^x e_x dx + (u_x)_{\Gamma_D, (r=y/\sin \gamma)} \\ &= p\tau_0 \{ -x \ln(-x-y) - y \ln(-x-y) \\ &\quad - y \cot \gamma \ln(y \cot \gamma - y) + y \ln(y \cot \gamma - y) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q\tau_0\{-x\ln(-x+y) + y\ln(-x+y) \\
& - y\cot\gamma\ln(y\cot\gamma+y) - y\ln(y\cot\gamma+y)\} \\
& + \frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\gamma\ln\frac{\cot\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\pi}{8}}\right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\beta-\gamma)\right\}\frac{y}{\sin\gamma}\ln\frac{A\sin\gamma}{y} + O(r) \quad (7.101a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y &= \int_{y_D=-x\tan\gamma}^y \varepsilon_y dy + (u_y)_{r_D}(r=-x/\cos\gamma) \\
&\approx \int_{y_D}^y \varepsilon_y^p dy + (u_y)_{r_D}
\end{aligned}$$

式中积分路径平行于 $y$ 轴，故

$$\begin{aligned}
u_y &= p\tau_0\{y\ln(-x-y) + x\ln(-x-y) \\
& + x\tan\gamma\ln(-x+x\tan\gamma) - x\ln(-x+x\tan\gamma)\} \\
& + q\tau_0\{y\ln(-x+y) - x\ln(-x+y) \\
& + x\tan\gamma\ln(-x-x\tan\gamma) + x\ln(-x-x\tan\gamma)\} \\
& + \frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E}\left\{\cos\gamma + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\beta\right. \\
& \left.-\gamma)\right\}\left(-\frac{x}{\cos\gamma}\right)\ln\frac{A\cos\gamma}{-x} + O(r) \quad (7.101b)
\end{aligned}$$

右裂纹岸上，令 $y=0$ ，得

$$\begin{aligned}
(u_x)_{y=0} &= -(p+q)\tau_0 x\ln(-x) + O(x) \\
&= -D_0 x\ln(-x) + O(x) \quad (7.102a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_y)_{y=0} &= \left\{D_0\tan\gamma + \frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E}\left(1\right.\right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\cos(\beta-\gamma)}{\cos\gamma}\right\}x\ln(-x) + O(x)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{4(1-\nu^2)}{E}C_2x\ln(-x) + O(x) \quad (7.102b)$$

最后一式的证明需利用等式:

$$\begin{aligned} D_0 \tan \gamma + \frac{4\tau_0(1-\nu^2)}{E} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\cos(\beta-\gamma)}{\cos \gamma} \right) \\ = -\frac{4(1-\nu^2)}{E}C_2 \end{aligned}$$

这个等式易由 (7.67) 与 (7.70) 式证明。(7.102) 式就是裂纹面的开口位移。有了这个开口位移表达式, 我们就可以象 § 5 的 III 型裂纹一样来建立稳定扩展准则 (见 § 8)。

有了定常扩展裂纹的位移场, 易求出它的速度 (即位移率) 场。以  $\mathbf{u}$  表示位移矢量,  $\mathbf{V}$  表示速度矢量, 下标  $x, y$  与  $r, \theta$  各表示直角坐标与极坐标分量 (以裂纹尖端为原点),

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= u_x \mathbf{i}_x + u_y \mathbf{i}_y = u_r \mathbf{i}_r + u_\theta \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{V} &= V_x \mathbf{i}_x + V_y \mathbf{i}_y = V_r \mathbf{i}_r + V_\theta \mathbf{i}_\theta \end{aligned} \right\} \quad (7.103)$$

由定常条件 (4.6) 式, 设  $\dot{a}=1$ , 可知  $\mathbf{V}$  与  $\mathbf{u}$  的关系为

$$\mathbf{V} = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$$

利用单位矢量的求导公式, 不难证明

$$V_x = -\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (7.104)$$

$$\left. \begin{aligned} V_r &= -\left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + u_r \frac{\sin \theta}{r} \right) \\ V_\theta &= -\left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \sin \theta \right. \\ &\quad \left. - u_r \frac{\sin \theta}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7.105)$$

利用上面各区的直角坐标或极坐标位移表达式代入,即可得到各区的速度表达式。可以预料,在弱间断线 $\Gamma_R$ ,  $\Gamma_D$ 处速度均连续,而在强间断 $\Gamma_1$ 处,由于应变 $\varepsilon_{xx}$ 有间断, $V_x$ 将出现间断(见(6.101)式)。

## § 8 I 型裂纹基于开口位移的 稳定扩展准则

在Ⅲ型裂纹中有两种近尖端断裂准则,即基于应变(裂纹前方)的稳定扩展准则(3.47)式与基于开口位移(裂纹面)的稳定扩展准则(5.1)或(5.2)式。对于I型裂纹,据 $\nu = \frac{1}{2}$ 的定常扩展解(§ 7),在裂纹前方的①区(图7.1)中应变无奇异性,因此目前人们只讨论基于开口位移的尖端断裂准则。

由(7.102b)式,定常扩展情况的开口位移速度(设 $\dot{a} = 1$ ,只取主奇异项)为

$$\dot{\delta} = 2(\dot{u}_y)_{y=0} = \beta \frac{\sigma_0}{E} \ln \frac{r_p}{r} \quad (8.1)$$

利用(7.84)式中的 $C_2$ 值,并注意 $\tau_0 = \sigma_0/\sqrt{3}$ 可算得

$$\left( \nu = \frac{1}{2} \right)$$

$$\beta = 2 \times \frac{4(1-\nu^2)}{E} (-C_2) = 4.385 \quad (8.2)$$

但这个结果是对 $\nu = \frac{1}{2}$ 而求得的,对于 $\nu = 0.3$ , Rice,

Drugan与Sham<sup>[129]</sup>建议取 $\beta \approx 5.08$ 。(8.1)式中的 $r_p$ 属于塑性区尺寸的量级(但不一定恰好等于塑性区尺寸)。类似于Ⅲ型情况的(5.5)式, Rice等<sup>[128,129,130]</sup>假定在稳定扩展的全过程中<sup>1)</sup>

$$\dot{\delta} = \beta \frac{\sigma_0}{E} a \ln \frac{r_p}{r} + a \frac{\dot{J}}{\sigma_0} \quad (8.3)$$

式中 $\dot{\phantom{x}} = d/dt$ ,  $\dot{J} = dJ/dt$ 。在小范围屈服情况下, 用有限元计算各种稳定扩展过程中加载与裂纹扩展的不同组合, 得到

$$a \approx 0.65, \quad r_p \approx 0.23 \frac{EJ}{\sigma_0^2} \quad (8.4)$$

这相当于在

$$r_p = \lambda_p \frac{J}{\sigma_0 \epsilon_0} \quad (8.5)$$

中取 $\lambda_p = 0.23$ 。(8.5)式类似于(5.13)式。

下面的推导过程完全和§5的Ⅲ型裂纹情况一样, 只不过常数值 $a$ ,  $\beta$ ,  $\lambda_p$ 有所不同, 同时把Ⅲ型问题的 $G$ 与 $\tau_0$ 相应改成 $E$ 与 $\sigma_0$ 而已。例如对应于(5.14)式, 裂纹开口形状为

$$\delta = \beta \frac{\sigma_0}{E} r \ln \frac{\rho}{r} \quad (8.6)$$

式中

$$\rho = r_p \exp \left( 1 + \frac{a}{\beta} \frac{E}{\sigma_0^2} \frac{dJ}{da} \right) \quad (8.7)$$

为材料常数。对应于(5.16)式,  $J$ 阻力曲线的微分方程为

---

1) 在(5.5)式中曾设 $\dot{a} = 1$ , 此处没有作此假设。在(8.3)式中若令 $\dot{a} = 1$ , 则与(5.5)式形式相同。

$$\frac{dJ}{da} = \frac{\beta}{a} - \frac{\sigma_0^2}{E} \ln\left(\frac{\rho}{er_p}\right) \quad (8.8)$$

即

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{da} &= \frac{\beta}{a} - \frac{\sigma_0^2}{E} \ln\left(\frac{\rho\sigma_0^2}{e\lambda_p E J}\right) \\ &= \frac{\beta}{a} - \frac{\sigma_0^2}{E} \ln\left(\frac{J_{ss}}{J}\right) \end{aligned} \quad (8.8)'$$

式中

$$J_{ss} = \frac{\rho\sigma_0^2}{e\lambda_p E} jJ_c \quad (8.9)$$

类似于 (5.23)' 式, 最后得到阻力曲线<sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned} E_1\left(\frac{\alpha T_0}{\beta} - \ln\frac{J}{J_c}\right) &= E_1\left(\frac{\alpha}{\beta} T_0\right) \\ &= \frac{\beta}{\alpha j} - \frac{a - a_0}{E J_c} \sigma_0^2 \end{aligned} \quad (8.10)$$

式中  $T_0$  表示初始撕裂模量, 类似于 (5.19) 与 (5.21) 式,

$$T_0 = \frac{E}{\sigma_0^2} \left( \frac{dJ}{da} \right)_c = \frac{\beta}{\alpha} \ln j \quad (8.11)$$

图 5.2 的无量纲阻力曲线也适用于 I 型裂纹, 但横坐标应理解为  $(a - a_0)/(\alpha E J_c / \beta \sigma_0^2)$ 。在上述推导过程中曾经用到近似关系 (8.4) 式, 这个关系只适用于小范围屈服情况。

对于平面应变范围屈服情况,  $J = \mathcal{G} = (1 - \nu^2) K^2 / E$ , 因此  $J$  有明确的意义。对于大范围屈服情况,  $J$  本身的意义是不

1) 微分方程 (8.10) 解的图示, 与本章图 5.2 同。只需将横坐标转换为

$(a - a_0) / \left( \frac{\alpha}{\beta} - \frac{E J_c}{\sigma_0^2} \right)$ , 比例尺也作相应变换。当按 Rice 等人 (120)

取  $\alpha = 0.65$ ,  $\beta = 5.1$ ,  $\nu = 0.3$  时, 图 5.2 中参数,  $m = 0, 0.64, 1.27, 1.97, 2.55, 3.19, 6.37, 12.7$  等各值相应于撕裂模量  $T_0 = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 50, 100$ 。

明确的,而且  $J$  可以有不同的定义。以理想刚塑性材料的纯弯试件 (图 8.1) 为例, 我们举出对于扩展裂纹的两种不同的  $J$  的定义, 由第二章图 6.6 与图 8.5 相应的公式, 使弯曲试件产生变形的弯矩 (即极限弯矩) 为

$$M = 1.261 \times \frac{1}{4} 2\tau_0 c^2 \approx \frac{0.63}{\sqrt{3}} \sigma_0 c^2 = \frac{0.73}{2} \sigma_0 c^2$$

而裂纹尖端的张开位移率为

$$\dot{\delta}_t = 0.37 c \dot{\theta} \quad (8.12)$$

式中  $\dot{\cdot} = d/dt$ 。对于刚塑性材料来说, 由于极限状态与残余应力场无关, 这些公式不仅适用于静止裂纹 ( $c$  为固定值), 而且也适用于扩展中的裂纹 ( $c$  为变化量)。对于静止裂纹, 开口位移增量  $d\delta_t$  将出现并叠加于同一个固定的尖端处, 故尖端位移为有限值  $0.37c\theta$ 。但是对于扩展中的裂纹, 随着裂纹的扩展, 尖端不断地向前移动, 开口位移增量  $d\delta_t$  出现于不断变化着的尖端处, 扩展裂纹尖端处的位移为零。设裂纹开口形状为

$$\delta = f(r, a) \quad (8.13)$$

则必有  $f(0, a) = 0$  时

$$\left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)_{r=0} = 0 \quad (8.14)$$

对于裂纹面上在尖端后方距离  $r$  处的物质质点, 当裂纹扩展  $da$  时,  $r$  也增大  $dr$ , 故  $r = a$ 。取 (8.13) 式对时间  $t$  的物质导数, 得

$$\dot{\delta} = \frac{\partial f}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial f}{\partial a} \dot{a} = \left( \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial a} \right) \dot{a}$$

令  $r = 0$ , 并注意 (8.14) 式, 得



$$\dot{\delta}_r = \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\dots} \dot{a}$$

左端  $\dot{\delta}_r$  用 (8.12) 式代入, 可得

$$\left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_{\dots} = \frac{1}{a} \dot{\delta}_r = 0.37c \frac{\dot{\theta}}{a} = 0.37c \frac{d\theta}{da}$$

故在裂纹尖端附近, 即对于小的  $r$ , 有

$$\delta = 0.37rc \frac{d\theta}{da} \quad (8.15)$$

另一方面, 我们希望在刚塑性情况下 ( $\sigma_0/E \rightarrow 0$ ) (8.3) 式能导致 (8.12) 的形式。假定当  $\sigma_0/E \rightarrow 0$  时,  $r_p$  为有限, 则 (8.3) 式成为

$$\dot{\delta} = a \frac{\dot{J}}{\sigma_0} \quad (8.3)'$$

对比 (8.12) 式, 可见  $J$  的定义应保证  $\sigma_0/E \rightarrow 0$  时,  $\dot{J}$  只与  $\dot{\theta}$  有关而与  $\dot{a}$  无关。

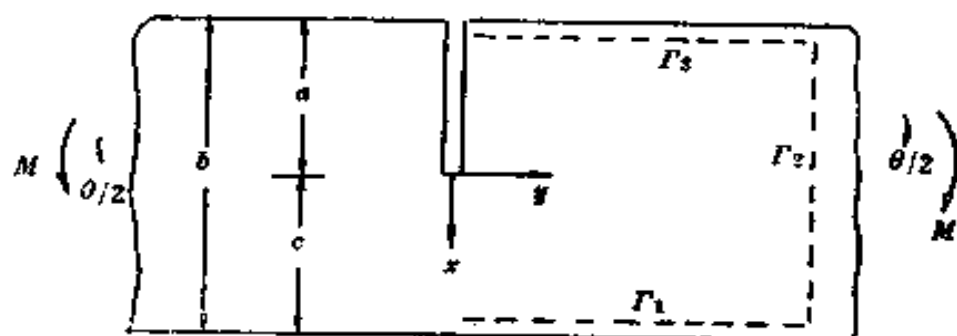


图 8.1 刚塑性弯曲试件

Rice在文〔129〕中研究了两种  $J$  的定义。一种定义是假定  $J$  作为  $\theta$  与  $a$  (或  $c$ ) 的函数形式与静止裂纹情况的函数形式相同, 即可不考虑过去历史上已有的扩展, 假定试件的即时裂纹长度就是初始的裂纹长度。这种定义的  $J$  称为形变理论的

$J$ , 记作  $J_d$ 。第二章图8.5有关的公式中的  $J$  就是  $J_d$ 。故由第二章 (9.16)

$$J_d = \frac{2}{c} M \theta = \frac{2 \times 0.63}{\sqrt{3}} \sigma_0 c \theta = 0.73 \sigma_0 c \theta \quad (8.16)$$

及

$$\dot{J}_d = 0.73 \sigma_0 (c \dot{\theta} - \theta \dot{a}) = \frac{2}{c} M \dot{\theta} - \frac{J_d}{c} \dot{a} \quad (8.17)$$

式中  $\dot{a} = -\dot{c}$ 。 $\dot{J}_d$  不仅与  $\dot{\theta}$  有关, 且与  $\dot{a}$  有关, 因此  $J_d$  不具有上述期望的特点<sup>1)</sup>。

$J$  的另一种定义是根据远场的回线积分。记作  $J_I$ 。定义  $J_I$  为图8.1中虚线表示的回线积分 (由于对称, 只画了一侧), 即

$$J_I = 2 \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} (W dy - T_x \frac{\partial u_x}{\partial x} ds) \quad (8.18)$$

式中

$$W = \int \sigma_{ij} de_{ij}$$

为应力功密度。在自由面  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_3$  上  $T_x$  为零。同时, 由于在  $\Gamma_2$  上  $\partial u_x / \partial x$  为常数 (端截面刚性旋转), 在纯弯曲作用下每一  $T_x$  在  $\Gamma_2$  上的积分值亦为零。此外, 由于  $\Gamma_2$  与  $\Gamma_3$  在极限分析的刚性区内 (见第二章图6.6), 在其上的  $W$  为零, 而在  $\Gamma_1$  的塑性区内的部分有

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_z = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

故

1) Rice (129) 指出这个结论因试件不同而异。对于双缺口拉伸试件, 应力场为 Prondtl 场, 则  $J_I$  与  $a$  无关。

$$W = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}\varepsilon_y = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (8.19)$$

因此 (8.17) 式的积分为

$$J_f = 2 \int_{r_1} W dy = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} (-2u_{y,p}) \quad (8.20)$$

式中  $u_{y,p}$  表示  $P$  点的水平位移 (图8.1)。由第二章图 6.6, 刚性部分旋转所绕的“铰点”位于尖端下方  $0.37c$  处, 故

$$2u_{y,p} = -(c - 0.37c) \theta = -0.63c\theta \quad (8.21)$$

(8.21) 代入 (8.20), 得

$$J_f = \frac{2 \times 0.63}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_0^\theta c d\theta = 0.73\sigma_0 \int_0^\theta c d\theta \quad (8.22)$$

式中的积分按裂纹扩展历史计算 (即  $c$  随着  $\theta$  而变化)。显然, 对于静止裂纹,  $c$  为常数, (8.22) 的  $J_f$  与 (8.16) 的  $J_d$  是一致的。但是对于扩展裂纹,  $J_f$  却比  $J_d$  大。由 (8.22) 式, 可得

$$\dot{J}_f = 0.73\sigma_0 c \dot{\theta} = \frac{2}{c} M \dot{\theta} \quad (8.23)$$

$\dot{J}_f$  只与  $\dot{\theta}$  有关, 而与  $\dot{a}$  无关, 因此  $J_f$  具有上述特点。

为了检验由 (8.3) 式导出的 (8.8) 式的正确性, Hermann 与 Rice<sup>[136]</sup> 进行了紧凑拉伸试验。所用材料为 AISI4140 (Al-Si 镇静钢), 厚度为 19mm。按重量计的成分为 0.42C, 0.004P, 0.014S, 0.22Mo, 0.001As, 0.01Sb, 0.002Sn。材料经过在氩气中奥氏体化, 1140K 油淬火一小时与 770K 回火一小时, 最后得到名义拉伸屈服限  $\sigma_0 = 1173 \text{ MNm}^{-2}$  与名义强度限  $\sigma_b = 1327 \text{ MNm}^{-2}$ 。

试件共四个, 尺寸如图 8.2 及表 8.1。试件都经过预制疲劳裂纹。图 8.2 中尖端至试件背面较大的距离 30.5mm 只适用于 4

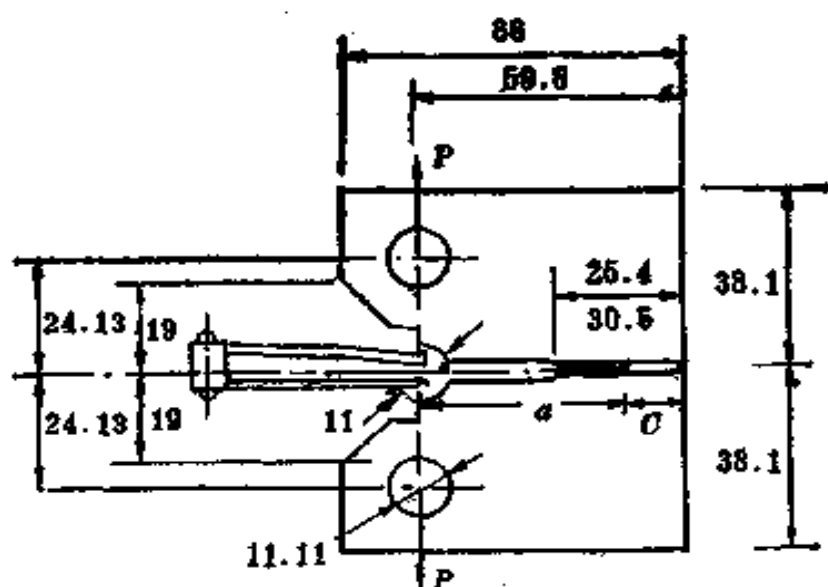


图 8.2 试件(尺寸单位为毫米)及位移计

表 8-1 试件韧带尺寸、厚度与边切槽深度  
(其它尺寸见图 8.2)

试件号	初始韧带尺寸 (mm)	厚度(切槽前后之平均值) (mm)	边切槽深度 (mm)
1	10.75	12.19	0.51
2	10.42	15.37	0.51
3	10.62	18.54	0.76
4	15.86	18.54	0.76

号试件。边切槽是为了防止剪切唇。由于韧带尺寸  $c$  比试件尺寸小得多, 因此试件按深裂纹弯曲试件计算。对韧带中点取矩来计算外加弯矩:

$$M = P \left( a + \frac{c}{2} \right)$$

而转角按沿加载线的位移  $\Delta$  计算:

$$d\theta = \frac{d\Delta}{a + \frac{c}{2}}$$

△ 用图 8.2 中所示之位移计测量。其它试验细节可参看文 [136]。在试验进程中，外加弯矩  $M$  与极限弯矩  $M_L (= 0.63\sigma_0 c^2 / \sqrt{3})$ ，随裂纹扩展量而变化。见图 8.3。试验初期相当于限制塑性，后期则相当于全屈服。

弹性转角  $\theta'$  与弹性能量释放率  $\mathcal{G}$  利用第一章 (4.22) 公式计算（假设平面应变状态）：

$$\theta' = \frac{16(1-\nu^2)}{Ec^2} M \quad (8.24)$$

$$\mathcal{G} = \frac{16(1-\nu^2)M^2}{Ec^3} \quad (8.25)$$

由 (8.17) 可计算  $J_d$  的增量：

$$\begin{aligned} dJ_d &= \frac{2}{c} M d\theta - \frac{J_d}{c} da \\ &= \frac{2}{c} P d\Delta - \frac{J_d}{c} da \end{aligned} \quad (8.26)$$

对于塑性形变理论且无卸载的情况（即非线性弹性），(8.26) 式的  $dJ_d$  为全微分， $J_d$  只与最终状态即  $\theta$  和  $a$  的最终值有关而与过去的历史无关； $J_d$  与回线积分定义的  $J$  相符，且在小范围屈服情况裂纹少量扩展时  $J = \mathcal{G}$ 。但是对于实际的弹塑性材料（服从塑性流动理论，有卸载区），则上述特点都不具备，(8.26) 式只能看作是  $J_d$  的定义。以 2 号试件为例，按照 (8.26) 式，随着试验的进程而积分算出的  $J_d$  值随裂纹扩展量变化，在图 8.3 中以圆圈点 “○” 表示。计算中假定切始值  $J_d = 0 (\Delta = 0)$ 。

由 (8.23) 式，可计算  $J_f$  的增量：

$$dJ_f = \frac{2}{c} M d\theta = \frac{2}{c} P d\Delta \quad (8.27)$$

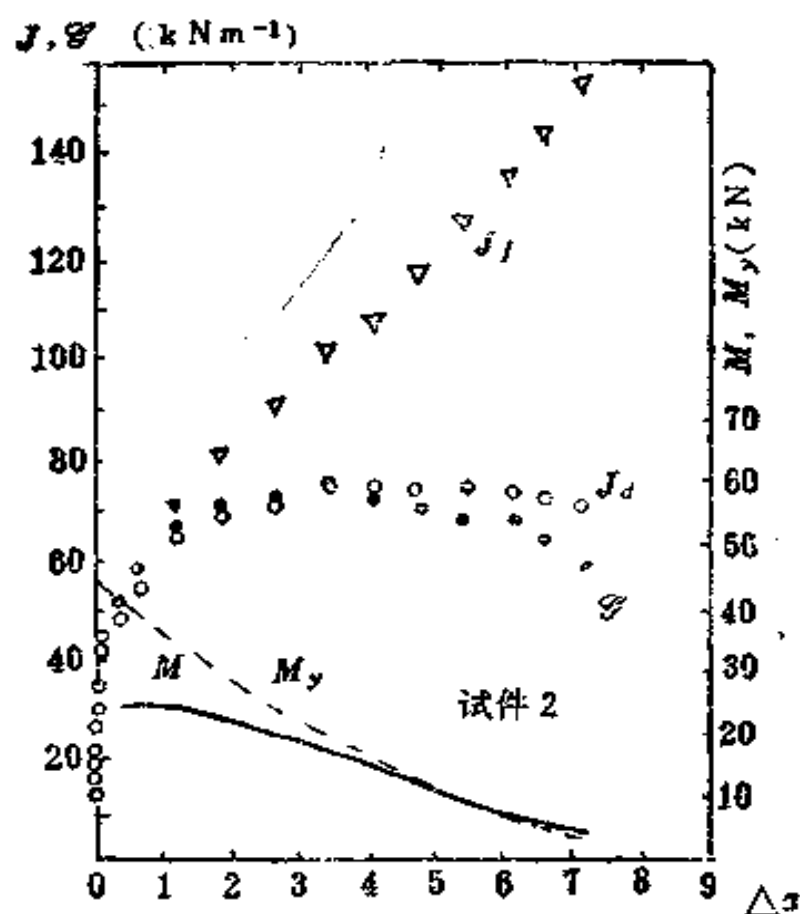


图 8.3 2号试件试验结果。外加弯矩 $M$ ，极限弯矩 $M_y$ ， $g$ ， $J_d$ ，与 $J_f$ 随裂纹扩展量的变化。（ $\Delta a$ 单位为mm）

比较（8.26）与（8.27），可知 $dJ_f$ 与 $dJ_d$ 间有关系

$$dJ_f = dJ_d + \frac{J_d}{c} du \quad (8.28)$$

（8.27）式是对于刚塑性材料深裂纹弯曲试件在单调递增的转角作用下作为试件外边界的回线积分而导得的。但是对于弹塑性材料（甚至对于刚塑性材料的其它构形的试件）却未必等于回线积分。按照（8.27）式，随着2号试件试验的进程而积分算出的 $J_f$ 随裂纹扩展量的变化，在图8.3以三角符号“ $\nabla$ ”表示。由（8.28）式， $J_d$ 曲线与 $J_f$ 曲线可以由其一导出另一者。由图中可看出在裂纹扩展初期 $J_f$ 与 $J_d$ 的差别很小，但随着裂纹的扩展， $J_f$ 与 $J_d$ 的差别愈来愈大。

理论曲线则按 (8.8)' 式计算, 即

$$\frac{dJ}{da} = 7.82 \frac{\sigma_b^2}{E} \ln \left( \frac{\rho \sigma_0^2}{0.23 e E J} \right) \quad (8.29)$$

式中的常数 7.82 由  $\beta/\alpha = 5.08/0.65$  算出。(8.8)' 式右端的  $\sigma_0$  改成强度限  $\sigma_b$ , 但对数符号  $\ln$  内的  $\sigma_0$  仍用材料屈服限 (因来自与塑性区尺寸有关的 (8.4) 式中的  $\sigma_0$ )。积分 (8.29)' 式时, 取起裂初始值  $J_c = 35 \text{ kNm}^{-1}$  ( $3.567 \text{ kg/mm}$ ), 而  $\rho$  的值则选择使得  $J_d$  理论曲线与全屈服前的  $J_d$  试验点符合得最好。由  $\rho$  值按 (8.9) 式可计算  $J_{ss}$ 。2 号试件的  $J$  理论曲线与  $J_d$  试验点比较见图 8.4。其中以实线表示的理论曲线, 是根据四个试件共同选择的  $\rho$  值 ( $= 7.175 \text{ mm}$ ) 计算出的, 而虚线则是根据 2 号试件单独选择的  $\rho$  值 ( $= 6.950 \text{ mm}$ ) 计算出的。由图可看出,  $J$  理论曲线与  $J_d$  试验点符合得很好; 而且出乎意料地, 一直到全屈服阶段始终都符合得很好。按照 Rice 等在文 [129] 中的原意, 对纯弯试件,  $J_f$  (8.22) 式作为  $J$  的定义, 比  $J_d$  (8.16) 式更为合适, 但按 Hermann 与 Rice [136] 的试验结果, 理论的  $J$  值却与  $J_d$  更为相符 (在小范围屈服阶段,  $J_f$  与  $J_d$  相差不大)。原因何在尚有待更深入的研究。

Hermann 与 Rice [136] 还提出了不同于  $J_d$  也不同于  $J_f$  的另一种定义:

$$dJ = d\mathcal{G} + \frac{2}{c} M d\theta^p \quad (8.30)$$

按这种定义在塑性区很小时  $dJ$  与  $d\mathcal{G}$  一致, 而对于刚塑性材料又与  $dJ_f$  一致。将按上式并随着试验进程定出的  $dJ/da$  代入 (8.8) 式左端, 求出 (8.8) 式右端的  $r_p$  与公式 (8.5) 在整个试验进程中符合得很好。

近尖端断裂准则是目前稳定扩展研究的一个有意义的方

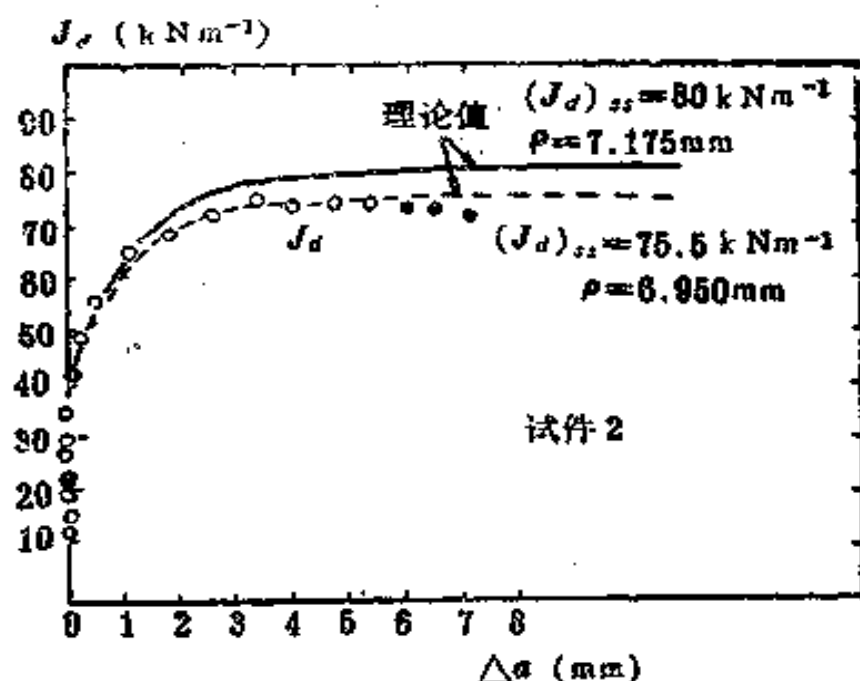


图 8.4 2号试件 $J_d$  (圆圈点) 与裂纹扩展量的关系  
及其与理论值的比较

向。这要求对不同介质的扩展裂纹尖端场进行深入的研究。对于理想弹塑性材料  $\nu < 1/2$  的情况, 高玉臣<sup>[138]</sup>首先指出 Rice等人<sup>[129, 130]</sup>对于  $\nu < 1/2$  所给出的解 (尖端附近分四个区) 是不正确的, 并提出了尖端场分五个区的解。在此以后, Drugan, Rice等<sup>[139]</sup>采用高玉臣的五个区的思想, 得到了一个不同的解。关于这两个解的分歧还有待于进一步的澄清<sup>1)</sup>。

对于线性硬化材料, Amazigo与Hutchinson<sup>[140]</sup>得到了Ⅲ型裂纹、平面应变Ⅰ型与平面应力Ⅰ型裂纹的定常扩展解。对于幂硬化材料, 高玉臣、张晓堤和黄克智<sup>[141, 142]</sup>得到了Ⅲ型裂纹的定常扩展解; 高玉臣和黄克智<sup>[135]</sup>得到平面应变Ⅰ型裂纹的定常扩展解, 但是这个解还不完全, 有待于完善。Dean与Hutchinson<sup>[143]</sup>对于Ⅲ型与平面应变Ⅰ型, 罗学富、

1)最近韩斌<sup>[153]</sup>发现, 高玉臣<sup>[138]</sup>与Rice等人<sup>[129, 130]</sup>的解在扇形区都不能满足高次渐近的协调方程。



黄克智和张晓堤<sup>[144]</sup>对平面应力 I 型裂纹进行了定常扩展裂纹的有限元求解。

实际工程材料的硬化都不是各向同性的,即具有 Bauschinger 效应。近年来,一些研究工作<sup>[145,146,147]</sup>表明 Bauschinger 效应对于扩展裂纹尖端与扩展阻力具有不容忽视的影响。动力效应,粘性与蠕变效应对尖端场的影响也是目前令人注目的问题。对上述问题文<sup>[148]</sup>作了综述。目前已有的成就主要仍限于小范围屈服情况,对大范围屈服情形取得的成就甚微。可以说,对大范围屈服的扩展裂纹的研究还刚刚开始。总之,弹塑性断裂力学目前是一个还未被充分开垦的园地,这个园地在结出丰硕果实之前,需要科学工作者付出辛勤的劳动。

## 参 考 文 献

- [1] Г.П. Черепанов, Механика хрупкого разрушения, "НАУКА", Москва, 1974,  
G.P. Cherepanov, Mechanics of Brittle Fracture, McGraw-Hill Inc. 1979.
- [2] Fracture Toughness Testing and its Applications, ASTM STP 381, 1965.
- [3] G.C. Sih and H. Liebowitz, Mathematical Theory of Brittle Fracture. Fracture. Vol. II, Ed. H. Liebowitz, Academic Press, N.Y. 1968, 68-191.
- [4] G.C. Sih, Ed., Mechanics of Fracture Vol. 1. Methods of Analysis and Solutions of Crack

- Problems, Noordhoff Int. Publishing. Leyden., 1973.
- [ 5 ] J.F.Knott, Fundamentals of Fracture Mechanics, Butterworths, 1973.
- [ 6 ] D. Broek, Elementary Engineering Fracture Mechanics, Noordhoff, 1974.
- [ 7 ] 穆什黑利什维利, (Н.И.Мусхелишвили), 数学弹性力学的几个基本问题, 科学出版社, 1958.
- [ 8 ] H.G.Hahn, Bruchmechanik Einführung in die Theoretischen Grundlagen, Teubner, stuttgart, 1976.
- [ 9 ] H.Tada, P.C.Paris, G.R. Irwin, The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del. Research Corp. Hellertown, Pa. 1973.
- [10] G.C.Sih., Handbook of Stress Intensity Factors for Researchers and Engineers, Lehigh Univ. Bethlehem, Pa. 1973.
- [11] D.P.Rooks and D.J.Cartwright, Compendium of Stress Intensity Factors, London, Her Majesty's Stationary Office, 1976.
- [12] 石田 誠, ま裂の弾性解析と応力拡大係数, 培風館, 1976.
- [13] 中国航空研究院编, 应力强度因子手册, 科学出版社, 1981.
- [14] M.L.Williams, On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack, *J. of Appl. Mech.*, Vol.24, No.1, 1957, 109--114.

- [15] H.W. Westergaard, Bearing Pressures and Cracks, *J. of Appl. Mech.* 61. 1939, A13—53.
- [16] G.R. Irwin, Fracture Dynamics. Fracturing of Metals ASM Cleveland, 1948, 147—166.
- [17] E.O. Orowan, Fundamentals of Brittle Behavior of Metals, in W.M. Murray (Ed). *Fatigue and Fracture of Metals*, Wiley, New York, 1950, 139—167.
- [18] H.F. Bueckner, Propagation of Cracks and the Energy of Elastic Deformation, *Trans. of ASME*, Vol. 80, 1958, 1225—1241.
- [19] ASTM Standard, 31, 1961, 1099—1114.
- [20] ANSI/ASTM E399—78 金属材料平面应变断裂韧性标准试验方法, 1978.
- [21] 金属材料平面应变断裂韧性  $K_{Ic}$  试验方法, (YB947—78), 1978.
- [22] C.M. Hudson and S.K. Seward, A Compendium of Sources of Fracture Toughness and Fatigue Crack Growth Data for Metallic Alloys, *Int. J. of Fracture*, Vol. 14, №4, 1978, R151—184.
- [23] C.M. Hudson and S.K. Seward, A Compendium of Sources of Fracture Toughness and Fatigue Crack Growth Data for Metallic Alloys. Part II, *Int. J. Fracture* Vol. 20, No. 3, 1982, R59—117.
- [24] 冶金部钢铁研究院断裂韧性组, 一些常用金属材料的断裂韧性, 新金属材料, 1977, №. 3~4, 141—157.

- [25] Plane Strain Fracture Toughness  $K_{Ic}$ . Data Handbook for Metals, AD 773673, 1973.
- [26] 冶金部钢铁研究院断裂韧性组, 若干钢种的断裂韧性, 断裂韧性测试及其应用, 冶金部标准研究所, 1978, 198—219.
- [27] Fracture Toughness Evaluation by R-Curve Methods, ASTM STP 527, 1974.
- [28] ASTM E561—81, Standard Practice for R-Curve Determination, 1981.
- [29] P.C. Paris, M.P. Gomez, and W.E. Anderson, A Rational Analytic Theory of Fatigue, The Trend in Engineering, vol. 13, 1961, 9—14.
- [30] R.G. Forman, et al, Crack Propagation in a Cyclic-loaded Structure, *Journal Basic Eng.* 89D, 1967, 459.
- [31] R. Ritchie, Near Threshold Fatigue Crack Propagation in Ultra High Strength Steel, Influence of load Ratio and Cyclic Strength, *Journal Eng. Mat. Tech.* 1977, Vol. 99, 194—204.
- [32] D.W. Hoepfner, W.E. Krupp, Prediction of Component life by Application of Fatigue Crack Growth Knowledge, *Eng. Fracture Mechanics*, Vol. 6, 1974, 47—70.
- [33] H. Riedel and J.R. Rice, Tensile Cracks in Creeping Solids, ASTM STP 700, 1980, 112—130.
- [34] 余寿文孙学伟编, 断裂力学讲义, 清华大学印刷厂, 1979.

- [35] J.W.Hutchinson, A Course on Nonlinear Fracture Mechanics, The Technical university of Denmark, 1979.
- [36] J.R.Rice, Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture, Fracture, vol. II, Ed. H. Liebowitz, Academic Press, N.Y. 1968, 192—314.
- [37] D.G.H.Latzko. (Ed.) Post-Yield Fracture Mechanics, Appl. Sci. Publishers, LTD, London, 1979.
- [38] 上海交通大学力学教研组, 非线性断裂力学基础, 1977.
- [39] 陈毓, 蔡其巩, 王仁智, 工程断裂力学, 国防工业出版社, 1977.
- [40] 朱刚毅 张行 求解应力强度因子的复变-变分方法, 北京航空学院学报, 1982, №.1, 101—114.
- [41] 余寿文, 弹塑性断裂力学概论(二), 北京力学学会, 1979.
- [42] J.R.Rice, A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks, *J.of Appl.Mech.*, Vol. 35, №.2, 1968, 379—386.
- [43] J.A.Begley, J.D.Landes, The J-Integral as a Fracture<sup>2</sup> Criterion in Fracture Toughness Testing, ASTM STP 514, 1972, 1—20.
- [44] B.Budiansky, J.R.Rice, Conservation Laws and Energy Release Rates, *J.cf Appl. Mech.*, Vol.

40, №.1, 1973, 201—203.

- [45] J.D.Eshelby, A Continuum Theory of Lattice Defects. Progress in Solid State Physics, 3, Eds. Seitz and Turnbull. Academic Press, N.Y., 1956, P.79.
- [46] G.P.Cherepanov, Crack Propagation in Continuous Media. *Appl. Math. Mech.* Vol. 31. 1967, 503—512.
- [47] J.K.Knowles and E. Sternberg, On a class of Conservation laws in linearized and Finite Elastostatics, *Archive for Rat. Mech. and Analysis*, 44, 1971/72, 187—211.
- [48] H.Bergkvist. G. L. L. Huong, Energy Release Rates in Case of Axial Symmetry, *Int. J. Fracture*, Vol. 13, 1977, 556—558.
- [49] R.A.Ainsworth et al., Fracture Behavior in the Presence of Thermal strains, Tolerance of Flaws in pressure Components. Inst. Mech. Eng. London, 1978.
- [50] K.Kishimoto, C.Aoki, M.Sakata, On the Path Independent Integral  $\hat{J}$ , *Eng. Fract. Mech.* Vol. 13, 1980, №.4. 841—850.
- [51] W.S.Blackburn, Path Independent Integral to Predict Onset of Crack Instability in an Elastic-Plastic Material. *Int. J. Fracture Mech.* Vol. 8, 1972, 343—346, and Correction Vol. 9, 1973, 122.

- [52] H.D.Bui. Dual Path-independent Integrals in the Boundary Value Problems of Cracks, *Eng. Fracture Mech.* Vol.6, 1974, №.2, 287—296.
- [53] A.Herrmann, G.Herrmann. On Energy Release Rates for a Plane Crack, *J.of Appl.Mech.* Vol. 48, 1981, №.3, 525—528.
- [54] D.S.Dugdale, Yielding of Steel Sheets Containing Slits, *J.Mech.Phys.Solids*, Vol.8, 1960, 100—104.
- [55] G.I.Barenblatt, The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture, *Advances in Applied Mechanics*, Vol.7, Academic Press New York, 1962.
- [56] B.A.Bilby, A.H. Cottrell and K. H. Swinden, The Spread of Plastic Yield from a Notch, *Proc. Roy.Soc. (London) Ser.A.*, 272, 1963, 304—310.
- [57] М. Я. Леонов. Упрощенная модель хрупкого Тела, "Научные основы прочности и пластичности", М.Витити, АН СССР, 1960.
- [58] В.В.Панасюк, Предельное равновесие хрупких тел с трещинами, "НАУКА ДУМКА", Киев, 1968.
- [59] J.A.Hult, F.A.McClintock, Elastic-Plastic Stress and Strain Distribution around Sharp Notches under Repeated Shear, *Proc. 9th Int. Congress Appl.Mech.*, Brussels, Vol.8, 1956, 51—62.

- [60] J.R.Rice, Stresses due to a sharp Notch in a Work-hardening Elastic-Plastic Material Loaded by Longitudinal Shear, *J.of Appl.Mech.* Vol. 34, 1967, №.2, 287—298.
- [61] J.R.Rice, Contained Plastic Deformation near Cracks and Notches under Longitudinal Shear, *Int.J.Fracture Mech.* Vol.2, 1966, №.2, 426—447.
- [62] J.A.Amazigo, Fully Plastic Center-cracked Strip Antiplane Shear, *Int.J.Solids and Structures*, Vol.11, 1975, №.12, 1291—1299.
- [63] J.W.Hutchinson, Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material. *J. Mech.phys.Solids*, Vol.16, 1968, №.1, 13—31.
- [64] J.R. Rice, and G. R. Rosengren, Plane strain Deformation near a Crack Tip in a Power-law Hardening Material, *Journal Mech.Phys.Solids*, Vol.16, 1968. №.1, 1—12.
- [65] D.M.Tracey, Finite Element Solutions for Crack Tip Behavior in Small-Scale Yielding, *Journal Eng.Mat.and Technology*, Vol.98, 1976. 146—151.
- [66] J.A.Amazigo, Some Mathematical Problems of Elastic-Plastic Crack Growth, *Fracture Mech.* Vol.Ⅲ, SIAM-AMS, Proceedings, Ed.R Burridge, American Math, Soc.Providence, 1979.
- [67] B.B.Hundy, Plane Plasticity, *Metallurgia* Vol.



- 49, 1954, 109—118.
- [68] R.Hill. On the state of stress in a plastic-rigid Body at the Yield Point, *Phil.Mag. Ser. 7*, 42, 1951, 868—875.
- [69] F.A.Mc Clintock, *Plasticity Aspects of Fracture, Fracture, Vol. III*, Ed. H. Liebowitz, Academic Press, N.Y., 1968.
- [70] J.W.Hutchinson. Plastic Stress and Strain Field at a Crack Tip, *J.Mech.Phys.Solids*, Vol.16, 1968, 337—347.
- [71] J.R.Rice and M.A.Johnson, The Role of Large Crack Tip Geometry Changes in Plane Strain Fracture, "Inelastic Behaviour of Solids", Ed. by M. F. Kaninen, et al., McGraw-Hill, N.Y., 1970, 641—672.
- [72] R.Hill, On Discontinuous Plastic States, with Special Reference to a Localized Necking on Wedge Indentation, *J.Mech.Phys.Solids*, Vol.1, 1952. №.1. 19—30.
- [73] Л.М.Качанов, Основы Теории Пластичности, Москва, 1956, § 52, СТП.222.
- [74] H.Ford and G.Lianis, Plastic Yielding of Notched Strips Under Conditions of Plane Stress, *Zeit. Angew.Math.Phy. Band. 8*, 1957, 360—382.
- [75] C.F. Shih, Small-Scale Yielding Analysis of Mixed Mode Plane Strain Crack Problem, ASTM, Mi STP 560, 1974, 187—210.

- [76] 高玉臣, 裂纹起始扩展的弹塑性场, 固体力学学报, 1980, №.1, 69—75.
- [77] R.M.McMeeking, Finite Deformation Analysis of Crack Tip Opening in Elastic-Plastic Materials and Implications for Fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.25, 1977, №.5, 357—381.
- [78] C.F.Shih, Relationship between the J-Integral and Crack Opening Displacement for Stationary and Extending Cracks, *J.Mech. Phys. Solids*, Vol.29, 1981, №.4, 305—326.
- [79] R.M.McMeeking, Path Dependence of the J Integral and the Role of J as a Parameter Characterizing the near Tip Field, ASTM STP 631, 1977, 28—41.
- [80] R.M.McMeeking and D.M.Parks, On Criteria for J-Dominance of Crack Tip Fields in Large Scale Yielding. ASTM STP 668, 1979, 175—194,
- [81] C.F.Shih and M.D.German, Requirements for a One Parameter Characterization of Crack Tip Fields by the HRR Singularity, *Int. J. Fracture*, Vol.17, 1981, №.1, 27—43.
- [82] P.C.Paris, Discussion for Ref.[43], ASTM STP 514, 1972, 21—22.
- [83] C.F.Shih, H.G.Delorenzi, W.R.Andrews, Studies on Crack Initiation and Stable Crack Growth. ASTM STP 668, 1979, 65—120.

- [84] V.Z. Parton and E.M. Morozov, Elastic-Plastic Fracture Mechanics, Mir Publishers, Moscow, 1978.
- [85] E. P. Sorensen, A Numerical Investigation of Plane Strain Stable Crack Growth Under Small-Scale Yielding Conditions, ASTM STP 668, 1979, 151—174.
- [86] J.W. Hutchinson. C.F. Shih, Recent Advances in Eng. Sci. Vol. 6, Gordon-Breach, London, 245.
- [87] T.M. Edmunds and J.R. Willis, Matched Asymptotic Expansions in Nonlinear Fracture Mechanics, I, II, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 24, 1976, №. 4, 205—223, 225—237.
- [88] T.M. Edmunds and J.R. Willis, Matched Asymptotic Expansions in Nonlinear Fracture Mechanics III, In Plane Loading of an Elastic Perfectly Plastic symmetric specimen, *J Mech, phys, Solids*, Vol. 25, 1977, №. 6, 423—456.
- [89] J.R. Rice, P.C. Paris and J. G. Merkle. Some Further Results of J-Integral Analysis and Estimates, ASTM STP 536, 1973, 231—245.
- [90] J.A. Begley, J. D. Landes, Test Results from J Integral Studies; an Attempt to Establish a  $J_{Ic}$  Testing Procedure, ASTM STP 560, 1974, 170—186.
- [91] 陈旒等, J积分与应变能  $U$  间的关系, 科学通报,

1975, №.7, 329—333.

- [92] A. P. Green and B. G. Hundy, Initial Plastic Yielding in Notched bend Tests, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.4, 1956, 128—145.
- [93] H.P.Keller and D.Munz, Comparison of Different Equations for Calculation of  $J$  from one load-Displacement Curve for Three Point Specimens, *Int. J. Fracture*, Vol.12, 1976, №.5, 780—782.
- [94] 陈箴, 论 $J$ 与 $U$ 间的正确关系, 金属学报, 1976, Vol.12, №.1, 129—130.
- [95] 金属研究所断裂组, 关于 $J$ 积分和 $U$ 间的关系式, 金属学报, 1976, Vol.12, №.1, 162.
- [96] J.G.Merkle and H.Corten, A  $J$ -Integral Analysis for the Compact Tension Specimen Considering Axial Force as well as Bending Effects, *J. Pressure Vessel Tech.* Vol.96, 1974, №. 4, 286—292.
- [97] J.W. Hutchinson, P. C. Paris, The Theory of Stability Analysis of  $J$ -Controlled Crack Growth, ASTM STP 668, 1979, 37—64.
- [98] C.F.Shib and J. W. Hutchinson, Fully Plastic Solutions and Large Scale Yielding Estimates for Plane Stress Crack Problems, *J. Eng. Mat. and Tech.* Vol.98, 1976, 289—295.
- [99] А.А.Ильюшин, Пластичность, Гиттрл Москова, 1948,

- [100] J.W.Hutchinson, A.Needleman and C.F.Shih, Harvard Univ.Report, Mech-6. O.N.R.Symp. on Fracture Mech.Washington D.C.1978.
- [101] V.Kumar, M.D.German and C.F. Shih, An Engineering Approach for Elastic-plastic Fracture Analysis, NP-1931, EPRI 1237-1, 1981.7, 铁道科技译文, 1982, №.2, 西南交通大学科技情报研究室。
- [102] 测量  $J_{Ic}$  断裂韧性的试验标准, ASTM E813-81, 1981.
- [103] 利用  $J_R$  阻力曲线确定金属材料延性断裂韧度的试验方法, GB 2038-80, 1980.
- [104] J.H.Underwood, The Equivalence of  $K_{Ic}$  and  $J_{Ic}$ , Fracture Toughness Measurements in Ni-Cr-Mo steels, *Exp.Mech.*, Vol.16, 1978, №.9, 350-355.
- [105] J.A.Begley and J.D.Landes. Serendipity and the J Integral, *Int.J.of Fracture*, Vol. 12, 1976, №.5, 764-766.
- [106] A.A.Wells, Application of Fracture Mechanics at and Beyond General Yielding, *British Welding Journal*, Vol.10, 1963. №.10, 563-570.
- [107] C.E.Turner, Methods for Post-yield Fracture Safety Assessment, in "Post-Yield Fracture Mechanics" Ed.by, D. G. H.Latzko, Applied Sci. Publishers.LTD, London, 1979, 23-210.

- [108] British Standard Institution, Draft for Development on Methods for Crack Opening Displacement(COD)Testing, 1972. DD-19.
- [109] BS5762:1979, Methods for Crack Opening Displacement(COD)Testing, BSI, London, 1979.
- [110] 裂纹张开位移 (COD) 试验方法, GB2358—80, 1980.
- [111] F.M.Burdekin and M.G.Dawes, in "Practical Application of Fracture Mechanics to Pressure Vessel Technology" . Inst.Mech,Engrs., London 1971, 28—37.
- [112] 国外压力容器缺陷评定标准 (1975—1980年) , 荆树峰, 曾广欣, 高世国译, 劳动出版社, 1982, 北京.
- [113] Advances in Elastic-Plastic Fracture Mechanics, Ed.by L.H.Larsson, Appl.Sci.Publishers,LTD. London, 1980.
- [114] J.W.Hutchinson, and P.C.Paris. The Theory of Stability Analysis of J-Controlled Crack Growth, ASTM STP 668, 1979, 37—64.
- [115] P.C.Paris. H.Tada, Z.Zahoor and H. Ernst, Instability of the Tearing Mode of Elastic-Plastic Crack Growth, ASTM STP 668, 1979, 5—34.
- [116] P.C.Paris, H.Tada, A.Zahoor. H.Ernst, An Initial Experimental Investigation of The Tearing Instability, ASTM STP 668, 1979, 251—265.

- [117] A. Zahoor and M. F. Kanninen, A Plastic Fracture Mechanics Prediction of Fracture Instability in a Circumferentially Cracked Pipe in Bending—Part I, J-Integral Analysis, *J. Pressure Vessel Technol.*, 103 (1981), 352—358.
- [118] G. M. Wilkowski, A. Zahoor and M. F. Kaninen, A Plastic Fracture Mechanics Prediction of Fracture Instability in a Circumferentially Cracked Pipe in Bending—Part II: Experimental Verification on a Type 304 Stainless Steel Pipe, *J. Pressure Vessel Technol.*, 103 (1981), 359—365.
- [119] D. C. Drucker, J. R. Rice, Plastic Deformation in Brittle and Ductile Fracture, *Eng. Fract. Mech.* Vol. 1, No. 1, 1970, 577—602.
- [120] J. R. Rice, Elastic-Plastic Models for Stable Crack Growth, in M. J. May (Ed.) "Mechanics and Mechanisms of Crack Growth" Proceedings of a Conference Organized by the Physical Metallurgy Centre of the British Steel Corporation, Held at Churchill College, Cambridge 4—6, April, 1973, Publication 1974, 14—39.
- [121] J. W. Hutchinson, Crack-tip Singularity Fields in Nonlinear Fracture Mechanics, A Survey of Current Status, "Advances in Fracture Research" Vol. 6, ICF5, Cannes, France. Ed. D. Francois, 2669—2684.

- [122] A.P.Chitale and F. A. McClintock, Elastic-plastic Mechanics of Steady Crack Growth under Anti-plane Shear, *J.Mech. Phys. Solids*, Vol.19, №.3, 1971, 147—163.
- [123] F.A.McClintock and G. R. Irwin, Plasticity Aspects of Fracture Mechanics, ASTM STP381, 1965. 84—113.
- [124] H.Andersson, A Finite Element Representation of Stable Crack Growth, *J.Mech.Phys.Solids*, Vol.21, №.5, 1973, 337—356.
- [125] E.P.Sorensen, A Finite Element Investigation of Stable Crack Growth in Anti-plane Shear, *Int.J.of Fracture*, Vol.14, №.5, 1978, 485—500.
- [126] P.Wnuk and P.Mura, Effect of Microstructure on the Uper and Lower Limit of Materials Toughness in Elastic-Plastic Fracture, *Mechanics of Materials*, Vol.2, №.1, 1983, 33—46.
- [127] 黄克智, 戴耀, 关于理想弹塑性介质中Ⅲ型稳恒扩展裂纹位移场, *力学学报*, 1983, №.1, 77—80.
- [128] J.R.Rice and E.P.Sorensen, Continuing Crack Tip Deformation for Plane Strain Crack Growth in Elastic-Plastic Solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.26, 1978, 163—186.
- [129] J.R.Rice, W.T.Drugin, and T.L.Sham, Elastic-Plastic Analysis of Growing Cracks, ASTM STP 700, 1980, 189—221.



- [130] J.R.Rice, Elastic-Plastic Crack Growth, in  
 "Mechanics of Solids", Rodney Hill 60th  
 Anniversary Volume, Ed. by H.G.Hopkins and  
 M.J.Sewell, Pergamon Press. Oxford, 1981,  
 539—562.
- [131] 高玉臣, 理想塑性介质中裂纹定常扩展的弹塑性  
 场, 力学学报, 1980, №.1, 48—56.
- [132] А.Л.Гольденвейзер. Теория Упругих тонких  
 Оболочек. Гос.Изд.Тех-Теор.Лит., Москва,  
 1953.
- [133] В.В.Новожилов. Теория Тонких Оболочек,  
 Гос. Союз. Изд. Суд. Пром., Ленинград,  
 1962.
- [134] 高玉臣, 黄克智, 理想弹塑性平面应变问题, 力  
 学学报, 1981特刊, 111—120.
- [135] Gao Yu-chen and Hwang Keh-chih (高玉臣,  
 黄克智), Elastic-Plastic Fields in Steady Crack  
 Growth in a Strain-hardening Material, "Adv-  
 ances in Fracture Research", Proceedings, of  
 Fifth Int.Conf. on Fracture, Ed.D. Francois,  
 Vol.2, Pergamon Press, 1981, 669—682.
- [136] L.Hermann and J.R.Rice, Comparison of  
 Theory and Experiment For Elastic-Plastic Plane  
 Strain Crack Growth, *Metal Science* Vol. 14,  
 1980, №.8—9, 285—291.
- [137] Gao.Y.C and Hwang Keh-chih (高玉臣, 黄克  
 智), On the Formulation of Plane Strain Pro-

blems for Elastic Perfectly-Plastic Medium, *Int. J. of Eng. Sci.* Vol. 21, 1983, №. 7, 765—780.

[138] Gao Y.C. (高玉臣), The Influence of Compressibility on the Elastic Plastic Field of a Growing Crack, Reported at ASTM Second Int. Symp. on Elastic-Plastic Fracture Mechanics, Philadelphia, 6—10, Oct. 1981.

[139] W.T. Drugan, J.R. Rice and T.L. Sham, Asymptotic Analysis of Growing Plane Strain Tensile Cracks in Elastic-Ideally Plastic Solids, *Journal Mech. Phys. Solids*, Vol. 30, №. 6, 1982, 447—473.

[140] J.C. Amazigo and J.W. Hutchinson, Crack Tip Fields in Steady Crack Growth with Linear Strain-Hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 25, №. 2, 1977, 81—97.

[141] 高玉臣, 张晓堤, 黄克智, 幂硬化材料Ⅲ型稳恒扩展裂纹奇异场, *力学学报*, 1981, №. 5, 452—464.

[142] Gao Yu-chen, Zhang Xiao-ti and Hwang Keh-chih (高玉臣, 张晓堤, 黄克智), The Asymptotic Near-tip Solution for Mode III Crack in Steady Growth in Power Hardening Media, *Int. J. of Fracture*, Vol. 21, 1983, 301—317.

[143] R.H. Dean and J.W. Hutchinson, Quasi-static Steady Crack Growth in Small Scale Yielding,

ASTM STP 700, 1980, 189—219.

- [144] Luo Xue-fu, Hwang Keh-chih, Zhang Xiaoti  
(罗学富, 黄克智, 张晓堤), Finite Element  
Analysis of Mode I Steady Crack Growth in  
Plane Stress, Proceedings of ICF Int. Symp.  
On Fracture Mech. (Beijing) 1983, Nov. 138  
—145.
- [145] Zhang Run-fu, Zhang Xiao-ti and Hwang Keh-  
chih (张润甫, 张晓堤, 黄克智), Near-Tip  
Fields For Plane-Strain Mode I Steady Crack  
Growth in Linear Hardening Material with Bau-  
schinger Effect, Proc. of ICF Int. Symp. on  
Fracture Mech. (Beijing) 1983, Nov. 283—290.
- [146] Xie Hui-cai and Hwang Keh-chih (谢慧才,  
黄克智), Power-law Hardening Effect on Mode  
III Crack Growth, Proc. ICF Int. Symp. on Fra-  
cture Mech. (Beijing) 1983, Nov. 258—266.
- [147] Sun Mu and Yu Shou-wen. (孙穆, 余寿文)  
Finite Element Analysis of Mode III Steady  
Crack Growth in Anisotropic Hardening  
Materials, ICF6 Post Ses. Papers, 1984, 49—50.
- [148] 黄克智, 余寿文, 关于断裂力学的发展, 中国力  
学学会第二届理事会扩大会议论文汇编“力学与  
生产建设”, 北京大学出版社, 1982.5, 79—92.
- [149] R.J. Bucci et al., / Integral Estimation Pro-  
cedures, ASTM STP 514, 1972, 40—69.
- [150] T.U. Marston The EPRI Ductile Fracture Rese-

arch Program in "Advances in Elastic-Plastic Fracture Mechanics" Ed. by L.H. Larsson, Appl. Sci. Publishers, LTD, London, 1980, 191—235.

- [151] D.M.Parks. The Dominance of the Crack Tip Fields of Inelastic Continuum Mechanics, 2nd Int.Conf.on Numerical Methods in Fracture Mechanics Swansea, July, 1980.
- [152] H.Riedel, Cracks Loaded in Anti-plane Shear under Creep Conditions, *Zeit.für Metalkünde* 1978, Band 69, Heft 12, 755—760.
- [153] 韩斌 理想弹塑性 I 型平面应变裂纹定常扩展尖端场的渐近分析 清华大学硕士论文, 1984年 8 月。
- [154] 戴耀 裂纹非定常扩展与断裂准则 清华大学博士论文, 1984年 4 月。