

高等学校试用教材

弹性力学简明教程

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

弹性力学简明教程

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材
弹性力学简明教程
徐芝纶 编

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
湖南省新华印刷一厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 11 字数 260,000
1980年1月第1版 1983年3月第4次印刷
印数 55,501—68,500

书号 15012·0237 定价 1.10 元

前 言

本书是为高等学校水利、土建类专业编写的弹性力学教材。书中的内容，系摘自编者为高等学校工科力学专业编写的《弹性力学》，以及以华东水利学院的名义编写的《弹性力学问题的有限单元法》，在内容的编排上根据水利、土建类专业的需要作了一些变动。

本书全部内容所需的学时数，可能略多于现行有关专业教学计划中所规定的时数，各专业可根据不同情况对其中部分内容适当取舍。各章之后的习题，数量较多，可按照学生课外学时数的多少，布置其中的一部分。

本书承主审人清华大学龙驭球同志和太原工学院、浙江大学、成都科学技术大学、武汉建筑材料工业学院、北京工业大学、南京工学院、北京建筑工程学院、武汉水利电力学院、华北水利水电学院、西南交通大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。

姜弘道和李昭银两位同志参加了本书的编写工作。

徐芝纶

一九七九年十一月

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学的内容.....	1
§ 1-2 弹性力学中的几个基本概念.....	3
§ 1-3 弹性力学中的基本假定.....	9
第二章 平面问题的基本理论	12
§ 2-1 平面应力问题与平面应变问题.....	12
§ 2-2 平衡微分方程.....	14
§ 2-3 几何方程、刚体位移.....	16
§ 2-4 物理方程.....	20
§ 2-5 边界条件.....	22
§ 2-6 圣维南原理.....	25
§ 2-7 按位移求解平面问题.....	27
§ 2-8 按应力求解平面问题。相容方程与位移单值条件.....	30
§ 2-9 常体力情况下的简化。应力函数.....	32
§ 2-10 热弹性力学的基本方程与边界条件.....	36
§ 2-11 平面温度应力问题的求解.....	40
习题.....	45
第三章 平面问题的直角坐标解答	47
§ 3-1 逆解法与半逆解法。多项式解答.....	47
§ 3-2 矩形梁的纯弯曲.....	49
§ 3-3 位移分量的求出.....	51
§ 3-4 简支梁受均布荷载.....	54
§ 3-5 楔形体受重力和液体压力.....	61
§ 3-6 斜面上的应力。主应力.....	64
§ 3-7 斜向上的应变.....	67
习题.....	71
第四章 平面问题的极坐标解答	74

§ 4-1	极坐标中的平衡微分方程	74
§ 4-2	极坐标中的几何方程与物理方程	76
§ 4-3	极坐标中的应力函数与相容方程	79
§ 4-4	应力分量的坐标变换式	81
§ 4-5	轴对称应力和相应的位移	83
§ 4-6	圆环或圆筒受均布压力。压力隧洞	87
§ 4-7	圆孔的孔边应力集中	92
§ 4-8	半平面体在边界上受集中力	100
§ 4-9	半平面体在边界上受分布力	105
§ 4-10	对心受压圆盘中的应力	109
习题		111
第五章 用差分法与变分法解平面问题		115
§ 5-1	差分公式的推导	115
§ 5-2	应力函数的差分解	117
§ 5-3	应力函数差分解的实例	123
§ 5-4	温度应力问题的差分解	127
§ 5-5	差分解的若干应用场合	128
§ 5-6	弹性体的形变势能	131
§ 5-7	位移变分方程	134
§ 5-8	位移变分法	138
§ 5-9	位移变分法的例题	141
习题		148
第六章 用有限单元法解平面问题		150
§ 6-1	基本量及基本方程的矩阵表示	150
§ 6-2	有限单元法的概念	154
§ 6-3	位移模式与解答的收敛性	158
§ 6-4	荷载向结点的移置。荷载列阵	165
§ 6-5	应力转换矩阵与劲度矩阵	169
§ 6-6	结点平衡方程的建立与集合	175
§ 6-7	解题的具体步骤。单元的划分	187
§ 6-8	计算成果的整理	192
§ 6-9	计算实例	197

§ 6-10 温度应力的计算	203
习题	206
第七章 空间问题的基本理论	209
§ 7-1 平衡微分方程	209
§ 7-2 物体内任一点的应力状态	211
§ 7-3 主应力。最大与最小的应力	213
§ 7-4 几何方程。刚体位移	217
§ 7-5 物体内任一点的形变状态。体积应变	218
§ 7-6 物理方程。小结	220
§ 7-7 轴对称问题的基本方程	223
习题	227
第八章 空间问题的解答	228
§ 8-1 按位移求解空间问题	228
§ 8-2 半空间体受重力及均布压力	229
§ 8-3 半空间体在边界上受切向集中力	232
§ 8-4 半空间体在边界上受法向集中力	234
§ 8-5 按应力求解空间问题	238
§ 8-6 等截面直杆的扭转	241
§ 8-7 扭转问题的薄膜比拟	246
§ 8-8 椭圆截面杆的扭转	248
§ 8-9 矩形截面杆的扭转	251
§ 8-10 薄壁杆的扭转	255
习题	260
第九章 薄板弯曲问题	263
§ 9-1 有关概念及计算假定	263
§ 9-2 弹性曲面的微分方程	265
§ 9-3 薄板横截面上的内力	269
§ 9-4 边界条件。扭矩的等效剪力	273
§ 9-5 四边简支矩形薄板的重三角级数解——纳维叶解法	277
§ 9-6 矩形薄板的单三角级数解——李维解法	280
§ 9-7 圆形薄板的弯曲	285

§ 9-8	圆形薄板的轴对称弯曲	288
§ 9-9	圆形薄板在静水压力下的弯曲	292
§ 9-10	用差分法解薄板弯曲问题	295
§ 9-11	用变分法解薄板弯曲问题	298
§ 9-12	变分法应用举例	301
	习题	305
第十章	薄壳问题	309
§ 10-1	有关概念及计算假定	309
§ 10-2	圆柱面薄壳的无矩内力	313
§ 10-3	圆柱面薄壳的轴对称弯曲	317
§ 10-4	圆柱面薄壳轴对称弯曲问题的简化计算	321
§ 10-5	回转薄壳的轴对称无矩内力	327
§ 10-6	回转薄壳的轴对称位移	332
§ 10-7	回转薄壳的轴对称弯曲	334
§ 10-8	球面薄壳轴对称弯曲问题的简化计算	337
§ 10-9	球面薄壳受均布压力	341
	习题	343

第一章 绪 论

§ 1-1 弹性力学的内容

弹性力学,又称为弹性理论,研究弹性体由于受外力作用或由于温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

弹性力学的任务,与材料力学、结构力学的任务一样,是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移,校核它们是否具有所需的强度和刚度,并寻求或改进它们的计算方法。然而,这三门学科在研究对象上有所分工,在研究方法上也有所不同。

在材料力学里,基本上只研究所谓杆状构件,也就是长度远大于高度和宽度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和位移,是材料力学的主要研究内容。在结构力学里,主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构,也就是所谓杆件系统,例如桁架、刚架等等。至于非杆状的结构,例如板和壳,以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构,则在弹性力学里加以研究。对于杆状构件作进一步的、较精确的分析,也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件,然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件,除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外,大都还要引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假定,这就大大简化了数学推演,但是,得出的解答有时只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件,一般都不必引用那些假定,因而得出的结果就比较精确,并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如,在材料力学里研究直梁在横向荷载下的弯曲,就引用了

平面截面的假定，得出的结果是：横截面上的正应力(弯应力)按直线分布，图 1-1a。在弹性力学里研究这同一问题，就无须引用平面截面的假定。相反地，还可以用弹性力学里的结果来校核这个假定，并且由此判明：如果梁的高度并不远小于梁的跨度，而两者差不多是同等大小的，那么，横截面上的正应力并不按直线分布，而显然是按曲线变化的，如图 1-1b 所示，并且材料力学里给出的最大正应力可能有较大的误差。

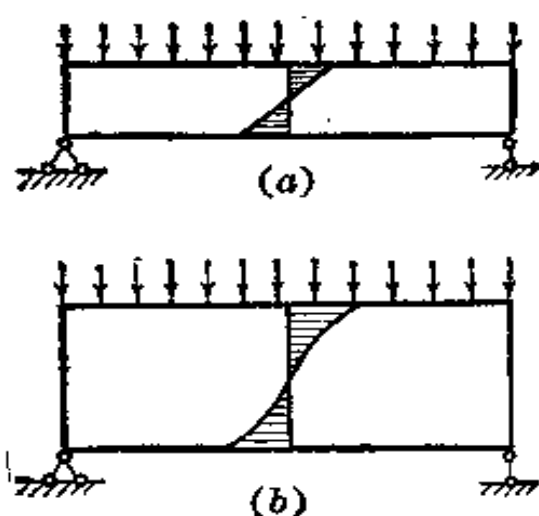


图 1-1

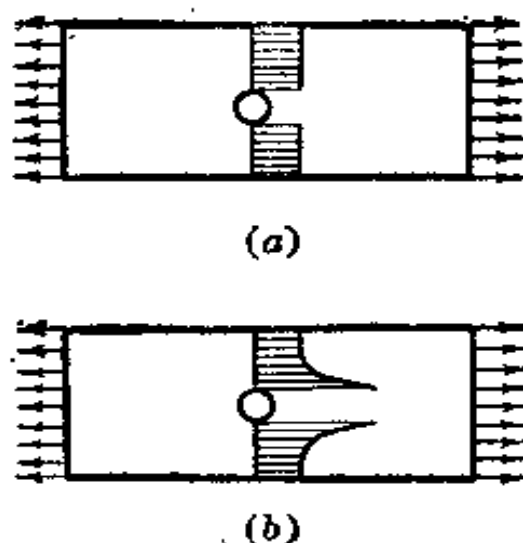


图 1-2

又例如，对于有孔的拉伸构件，用材料力学的方法计算，那就和无孔时一样，要假定拉应力在净截面上均匀分布，图 1-2a。在弹性力学里研究这个问题时就用不着拉应力均匀分布的假定。弹性力学的研究表明：净截面上的拉应力远不是均匀分布的，而是在孔的附近发生高度的应力集中，孔边的最大拉应力会比平均拉应力大出若干倍，图 1-2b。

虽然弹性力学里通常是不研究杆件系统的，然而近几十年来，不少人曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用，使得这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中超静定结构分析法以后，大大扩展了它的应用范围，使得某些比较复杂的本来是无法求解的问题，得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定

的近似性,但应用在工程上,通常却是足够精确的。在近二十几年间发展起来的有限单元法,把连续弹性体划分成有限大小的单元构件,然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解,更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外,对同一结构的各个构件,甚至对同一构件的不同部分,分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算,常常可以节省很多的工作量,而仍然得到令人满意的结果。

总之,材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界线不是很明显的,更不是一成不变的。我们不应当强调它们之间的分工,而应当更多地发挥它们综合应用的威力,才能使它们更好地为我国的社会主义建设事业服务。

§ 1-2 弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。这些概念,虽然在材料力学和结构力学里已经用到过,但在这里仍有再加详细说明的必要。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力,两者也分别简称为体力和面力。

所谓体力,是分布在物体体积内的力,例如重力和惯性力。物体各点受体力的情况一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的大小与方向,在这一点取物体的一小部分,它包含着 P 点而它的体积为 ΔV ,图1-3a。设作用于 ΔV 的体力为 ΔQ ,则体力的平均集度为 $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ 。如果把所取的一小部分物体不断减小,即 ΔV 不断减小,则 ΔQ 及 $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ 都将不断改变大小、方向和作用点。

现在,令 ΔV 无限减小而趋于 P 点,假定体力为连续分布,则 $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ 将

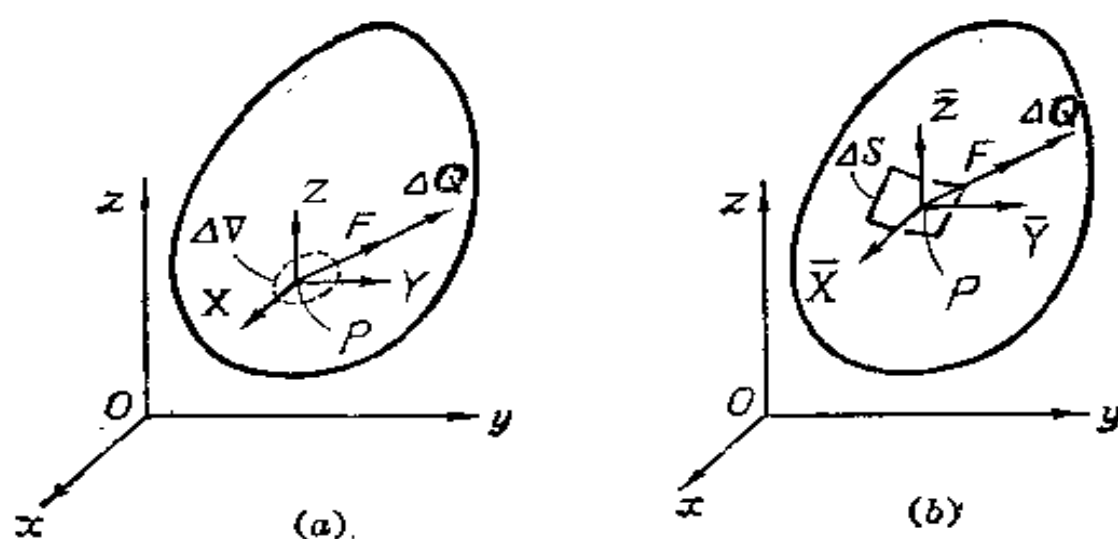


图 1-3

趋于一定的极限 F , 即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = F.$$

这个极限矢量 F , 就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量, 所以 F 的方向就是 ΔQ 的极限方向。矢量 F 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影 X 、 Y 、 Z , 称为该物体在 P 点的体力分量, 以沿坐标轴正方向为正, 沿坐标轴负方向为负。它们的因次是 $[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$ 。

所谓面力, 是分布在物体表面上的力, 例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况一般也是不相同的。为了表明该物体在表面上某一点 P 所受面力的大小与方向, 在这一点取该物体表面的一小部分, 它包含着 P 点而它的面积为 ΔS , 图 1-3b。设作用于 ΔS 的面力为 ΔQ , 则面力的平均集度为 $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ 。与上

述相似, 令 ΔS 无限减小而趋于 P 点, 假定面力为连续分布, 则 $\frac{\Delta Q}{\Delta S}$ 将趋于一定的极限 F , 即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = F.$$

这个极限矢量 F 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔS 是

标量，所以 F 的方向就是 ΔQ 的极限方向。矢量 F 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} ，称为该物体在 P 点的面力分量，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。它们的因次是[力][长度] $^{-2}$ 。

物体受外力以后，其内部将发生内力，即物体本身不同部分之

间相互作用的力。为了研究物体在其某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分，而将 B 部分撤开，图 1-4。撤开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这一截面的一小部分，它包含着 P 点而它的面积为 ΔA 。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔQ ，则内力的平均集度，即平均应力为 $\frac{\Delta Q}{\Delta A}$ 。现在，命 ΔA 无限减小而趋于 P 点，假定内力连续分布，则 $\frac{\Delta Q}{\Delta A}$ 将趋于一定的极限 s ，即

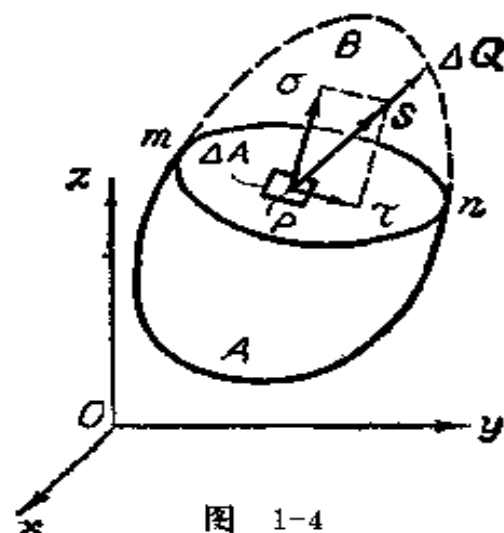


图 1-4

这个极限矢量 s 就是物体在截面 mn 上的、在 P 点的应力。因为 ΔA 是标量，所以应力 s 的方向就是 ΔQ 的极限方向。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量与物体的形变或材料的强度都没有直接的关系。与物体的形变和材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法线方向及切线方向的分量，也就是正应力 σ 及剪应力 τ ，如图 1-4 所示。应力及其分量的因次是[力][长度] $^{-2}$ 。

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = s.$$

显然可见，在物体内的同一点 P ，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方

向, 在这一点从物体内部取出一个微小的正平行六面体, 它的棱边平行于坐标轴而长度为 $PA = \Delta x$, $PB = \Delta y$, $PC = \Delta z$, 图 1-5。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力, 分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向, 加上一个坐标角码。例如, 正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上, 同时也是沿着 x 轴的方向作用的。剪应力用 τ 表示, 并加上两个坐标角码, 前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴, 后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如, 剪应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

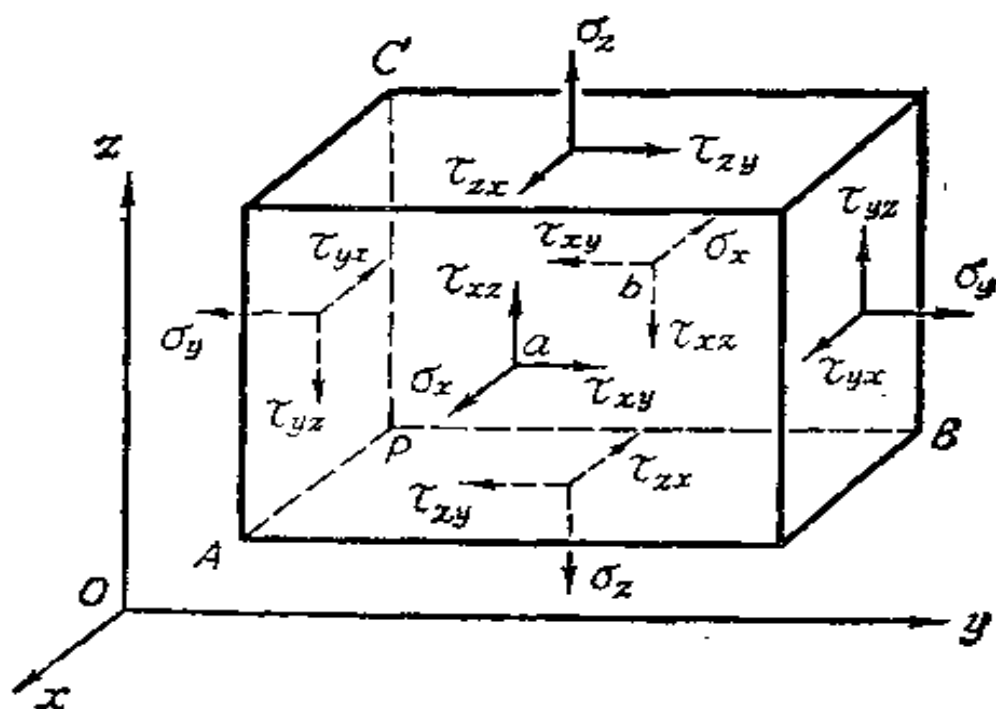


图 1-5

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向, 这个截面就称为一个正面, 而这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正, 沿坐标轴负方向为负。相反, 如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向, 这个截面就称为一个负面, 而这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正, 沿坐标轴正方向为负。图上所示的应力分量全都是正的。注意, 虽然上述正负号规定, 对于正应

力说来, 结果是和材料力学中的规定相同(拉应力为正而压应力为负), 但是, 对于剪应力说来, 结果却和材料力学中的规定不完全相同。

六个剪应力之间具有一定的互等关系。例如, 以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴, 立出力矩平衡方程, 得

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2} = 0.$$

同样可以立出其余两个相似的方程, 简化以后, 得出

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (1-1)$$

这就证明了剪应力的互等性: 作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的(大小相等, 正负号也相同)。因此, 剪应力记号的两个角码可以对调。

在这里, 我们没有考虑应力由于位置不同而产生的改变(也就是把六面体中的应力当作均匀应力), 而且也没有考虑体力的作用。以后可见, 即使考虑到应力的变化和体力的作用, 仍然可以推导出剪应力的互等性。

附带指出, 如果采用材料力学中的正负号规定, 则剪应力的互等性将表示成为 $\tau_{yz} = -\tau_{zy}$, $\tau_{zx} = -\tau_{xz}$, $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, 显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出, 在利用莫尔圆(应力圆)时, 就必须采用材料力学中的规定。

以后可见, 在物体的任意一点, 如果已知 σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{xy} 这六个应力分量, 就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。因此, 上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

所谓形变, 就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此, 物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态, 在这一点沿着坐标轴 x, y, z 的正方向取三个微小的线段 PA, PB, PC , 图 1-5。物体变形以后, 这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩, 即单位伸缩或相对伸缩, 称为正应变; 各线段之间的直角的改变, 用弧度表示, 称为剪应变。正应变用字母 ε 表示: ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变, 余类推。正应变以伸长时为正, 缩短时为负, 与正应力的正负号规定相适应。剪应变用字母 γ 表示: γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段(即 PB 与 PC)之间的直角的改变, 余类推。剪应变以直角变小时为正, 变大时为负, 与剪应力的正负号规定相适应。正应变和剪应变都是无因次的数量。

以后可见, 在物体的任意一点, 如果已知 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 这六个应变, 就可以求得经过该点的任一线段的正应变, 也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此, 这六个应变, 称为该点的形变分量, 可以完全确定该点的形变状态。

所谓位移, 就是位置的移动。物体內任意一点的位移, 用它在 x, y, z 三轴上的投影 u, v, w 来表示, 以沿坐标轴正方向的为正, 沿坐标轴负方向的为负。这三个投影称为该点的位移分量。位移及其分量的因次是[长度]。

一般而论, 弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量, 都是随着该点的位置而变的, 因而都是位置坐标的函数。

在弹性力学的问题里, 通常是已知物体的形状和大小(即已知物体的边界), 物体的弹性常数, 物体所受的体力, 物体边界上的约束情况或面力, 而应力分量、形变分量和位移分量则是需要求解的未知量。

§ 1-3 弹性力学中的基本假定

为了由弹性力学问题中的已知量求出未知量, 必须建立这些已知量与未知量之间的关系, 以及各个未知量之间的关系, 从而导出一套求解的方程。在导出方程时, 可以从三方面来进行分析。一方面是静力学方面, 由此建立应力、体力、面力之间的关系。另一方面是几何学方面, 由此建立形变、位移和边界位移之间的关系。再一个方面是物理学方面, 由此建立形变与应力之间的关系。

在导出方程时, 如果精确考虑所有各方面的因素, 则导出的方程非常复杂, 实际上不可能求解。因此, 通常必须按照所研究的物体的性质, 以及求解问题的范围, 作出若干基本假定, 略去一些可以暂不考虑的因素, 使得方程的求解成为可能。本教程中采用的基本假定如下:

(1) 假定物体是连续的, 也就是假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满, 不留下任何空隙。这样, 物体内的一些物理量, 例如应力、形变、位移等等, 才可能是连续的, 因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。实际上, 一切物体都是微粒组成的, 严格来说, 都不符合上述假定。但是, 可以想见, 只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离都比物体的尺寸小得很多, 那么, 关于物体连续性的假定, 就不会引起显著的误差。

(2) 假定物体是完全弹性的。所谓弹性, 指的是“物体在引起形变的外力被除去以后能恢复原形”这一性质。所谓完全弹性, 指的是物体能完全恢复原形而没有任何剩余形变。这样的物体在任一瞬时的形变就完全决定于它在这一瞬时所受的外力, 与它过去的受力情况无关。由材料力学已知: 韧性材料的物体, 在应力未达到屈服极限以前, 是近似的完全弹性体; 脆性材料的物体, 在

应力未超过比例极限以前,也是近似的完全弹性体。完全弹性体服从虎克定律,也就是形变与引起该形变的应力成正比,因而弹性常数不随应力或形变的大小而变。

(3) 假定物体是均匀的,也就是,整个物体是由同一材料组成的。这样,整个物体的所有各部分才具有相同的弹性,因而物体的弹性才不随位置坐标而变,可以取出该物体的任意一小部分来加以分析,然后把分析的结果用于整个物体。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的,例如混凝土,那么,也只要每一种材料的颗粒远远小于物体而且在物体内均匀分布,这个物体就可以当作是均匀的。对于明显的非均匀体的问题,只能把它作为接触问题来处理,例如隧洞衬砌,基础梁板等等的问题,就属于此类。

(4) 假定物体是各向同性的,也就是,物体的弹性在所有各个方向都相同。这样,物体的弹性常数才不随方向而变。显然,由木材和竹材作成的构件都不能当做各向同性体。至于由钢材作成的构件,虽然它含有各向异性的晶体,但由于晶体很微小,而且是随机排列的,所以,钢材构件的弹性(包含无数多微小晶体随机排列时的统观弹性),大致是各向相同的。

凡是符合以上四个假定的物体,就称为理想弹性体。

(5) 假定位移和形变是微小的。这就是说,假定物体受力以后,整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸,而且应变和转角都远小于1。这样,在建立物体变形以后的平衡方程时,就可以用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸,而不致引起显著的误差;并且,在考察物体的形变及位移时,转角和应变的二次幂或乘积都可以略去不计(例如,对于微小的转角 α ,有 $\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{1}{3} \alpha^3 + \dots \approx \alpha$, $\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{3!} \alpha^3 + \dots \approx \alpha$; 对于微小的正应变 ε_x ,有

$\frac{1}{1+\varepsilon_x} = 1 - \varepsilon_x + \varepsilon_x^2 - \varepsilon_x^3 + \dots \approx 1 - \varepsilon_x$, 等等)。这就使得弹性力学里的代数方程和微分方程都简化为线性方程。因而, 还可以应用叠加原理。

总之, 本教程中所讨论的问题, 都是理想弹性体的线性问题。

第二章 平面问题的基本理论

§ 2-1 平面应力问题与平面应变问题

任何一个弹性体都是空间物体,一般的外力都是空间力系。因此,严格说来,任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但是,如果所考察的弹性体具有某种特殊的形状,并且承受的是某些特殊的外力,就可以把空间问题简化为近似的平面问题。这样处理,分析和计算的工作量将大为减少,而所得的成果却仍然可以满足工程上对精确度的要求。

第一种平面问题是平面应力问题。设有很薄的等厚度薄板,图 2-1,只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力。同时,体力也平行于板面并且不沿厚度变化。例如图中所示的深梁,以及平板坝的平板支墩,就属于此类。

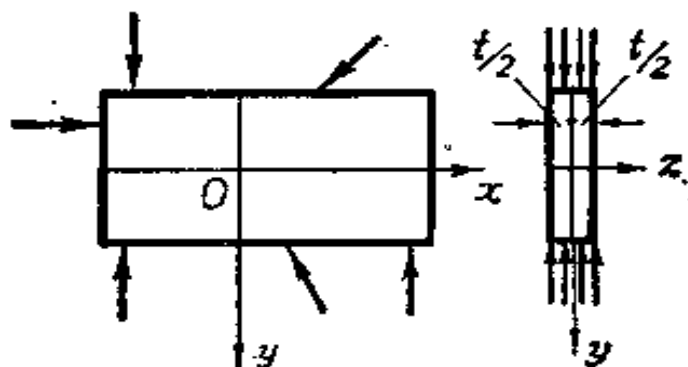


图 2-1

设薄板的厚度为 t 。以薄板的中面为 xy 面,以垂直于中面的任一一直线为 z 轴。因为板面上($z = \pm \frac{t}{2}$)不受力,所以有

$$(\sigma_z)_{z=\pm \frac{t}{2}} = 0, \quad (\tau_{zx})_{z=\pm \frac{t}{2}} = 0, \quad (\tau_{zy})_{z=\pm \frac{t}{2}} = 0.$$

因为板很薄, 外力又不沿厚度变化, 应力沿着板的厚度又是连续分布的, 所以, 可以认为在整个薄板的所有各点都有

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0.$$

注意到剪应力的互等性, 又可见 $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$ 。这样, 只剩下平行于 xy 面的三个应力分量, 即 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$, 所以这种问题称为平面应力问题。同时, 也因为板很薄, 这三个应力分量, 以及所有须要考虑的形变分量和位移分量, 都可以认为是不沿厚度变化的。这就是说, 它们只是 x 和 y 的函数, 不随 z 而变化。

第二种平面问题是平面应变问题。与上相反, 设有很长的柱形体, 它的横截面如图 2-2 所示, 在柱面上受有平行于横截面而且不沿长度变化的面力, 同时, 体力也平行于横截面而且不沿长度变化 (内在因素和外来作用都不沿长度变化)。

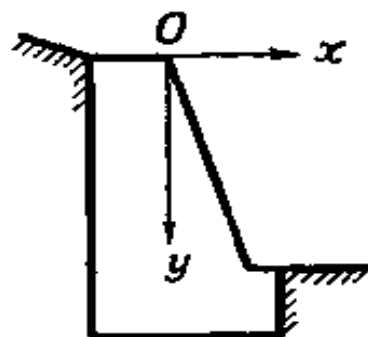


图 2-2

假想该柱形体为无限长, 以任一横截面为 xy 面, 任一纵线为 z 轴, 则所有一切应力分量、形变分量和位移分量都不沿 z 方向变化, 而只是 x 和 y 的函数。此外, 在这种情况下, 由于对称 (任一横截面都可以看作是对称面), 所有各点都只会沿 x 和 y 方向移动, 而不会有 z 方向的位移, 也就是 $w = 0$ 。因为所有各点的位移矢量都平行于 xy 面, 所以这种问题称为平面位移问题, 但在习惯上常称为平面应变问题。又由对称条件可知, $\tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0$ 。根据剪应力的互等性, 又可以断定 $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$ 。但是, 由于 z 方向的伸缩被阻止, 所以 σ_z 一般并不等于零。

有些问题, 例如挡土墙和重力坝的问题等等, 是很接近于平面应变问题的。虽然由于这些结构不是无限长的, 而且在靠近两端之处, 横截面也往往是变化的, 并不符合无限长柱形体的条件, 但是实践证明, 对于离开两端较远之处, 按平面应变问题进行分析计

算,得出的结果却是工程上可用的。

§ 2-2 平衡微分方程

在弹性力学里分析问题,要从三方面来考虑:静力学方面,几何学方面和物理学方面。我们首先考虑平面问题的静力学方面,根据平衡条件来导出应力分量与体力分量之间的关系式,也就是平面问题的平衡微分方程。

从图 2-1 所示的薄板,或图 2-2 所示的柱形体,取出一个微小的正平行六面体,它在 x 和 y 方向的尺寸分别为 dx 和 dy , 图 2-3。为了计算简便,它在 z 方向的尺寸取为一个单位长度。

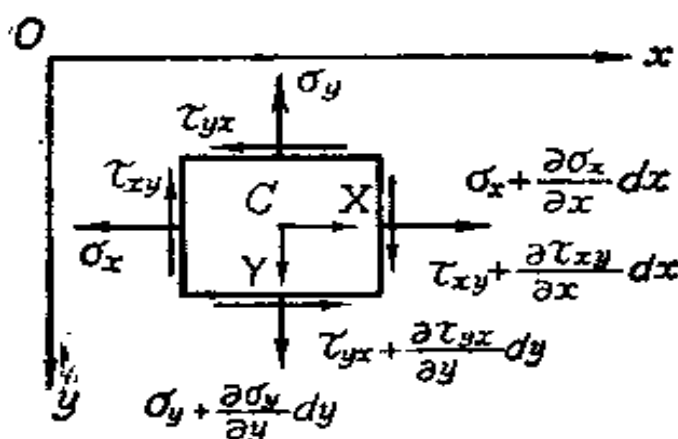


图 2-3

一般而论,应力分量是位置坐标 x 和 y 的函数,因此,作用于左右两对面或上下两对面对面的应力分量不完全相同,而具有微小的差量。例如,设作用于左面的正应力是 σ_x ,则作用于右面的正应力,由于 x 坐标的改变,将是 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} dx^2 + \dots$, 略去二阶以及二阶以上的微量后便是 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ (若 σ_x 为常量,则 $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$, 而左右两面的正应力将都是 σ_x , 这就是 § 1-2 中所说的均匀应力的情况)。同样,设左面的剪应力是 τ_{yx} , 则右面的剪应力将是

$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$; 设上面的正应力及剪应力分别为 σ_y 及 τ_{yx} , 则下面的正应力及剪应力分别为 $\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$ 及 $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$ 。因为六面体是微小的, 所以它在各面上所受的应力可以认为是均匀分布, 作用在对应面的中心。同理, 六面体所受的体力, 也可以认为是均匀分布, 作用在它的体积的中心。

首先以通过中心 C 并平行于 z 轴的直线为矩轴, 立出力矩的平衡方程 $\sum M_c = 0$:

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \times 1 \times \frac{dx}{2} + \tau_{yx} dy \times 1 \times \frac{dx}{2} \\ & - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 \times \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dx \times 1 \times \frac{dy}{2} = 0. \end{aligned}$$

在建立这一方程时, 我们按照 § 1-3 中的第(5)个基本假定, 用了弹性体变形以前的尺寸, 而没有用平衡状态下的、变形以后的尺寸。在以后建立任何平衡方程时, 都将同样地处理, 不再加以说明。将上式除以 $dx dy$, 并合并相同的项, 得到

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy.$$

略去微量不计(亦即 dx, dy 都趋于零时), 得出

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (2-1)$$

这不过是再一次证明了剪应力的互等性。

其次, 以 x 轴为投影轴, 立出投影的平衡方程 $\sum F_x = 0$:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \times 1 - \sigma_x dy \times 1 \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 - \tau_{yx} dx \times 1 + X dx dy \times 1 = 0. \end{aligned}$$

约简以后, 两边除以 $dx dy$, 得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0.$$

同样, 由平衡方程 $\Sigma F_y = 0$ 可得一个相似的微分方程。于是得出平面问题中应力分量与体力分量之间的关系式, 即平面问题中的平衡微分方程或所谓纳维叶方程在平面问题中的简化形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

这两个微分方程中包含着三个未知函数 σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 因此, 决定应力分量的问题是超静定的, 还必须考虑形变和位移, 才能解决问题。

对于平面应变问题来说, 在图 2-3 所示的六面体上, 一般还有作用于前后两面的正应力 σ_z , 但由于它们自成平衡, 完全不影响方程 (2-1) 及 (2-2) 的建立, 所以上述方程对于两种平面问题都同样适用, 并没有任何差别。

§ 2-3 几何方程。刚体位移

现在来考虑平面问题的几何学方面, 导出形变分量与位移分量之间的关系式, 也就是平面问题中的几何方程。

经过弹性体内的任意一点 P , 沿 x 轴和 y 轴的方向取两个微小长度的线段 $PA = dx$ 和 $PB = dy$, 图 2-4。假定弹性体受力以后, P 、 A 、 B 三点分别移动到 P' 、 A' 、 B' 。

首先来求出线段 PA 和 PB 的正应变, 即 ϵ_x 和 ϵ_y , 用位移分量来表示。设 P 点在 x 方向的位移分量是 u , 则 A 点在 x 方向的位移分量, 由于 x 坐标的改变, 将是 $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ 。可见线段 PA 的正应变是

$$\epsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (\alpha)$$

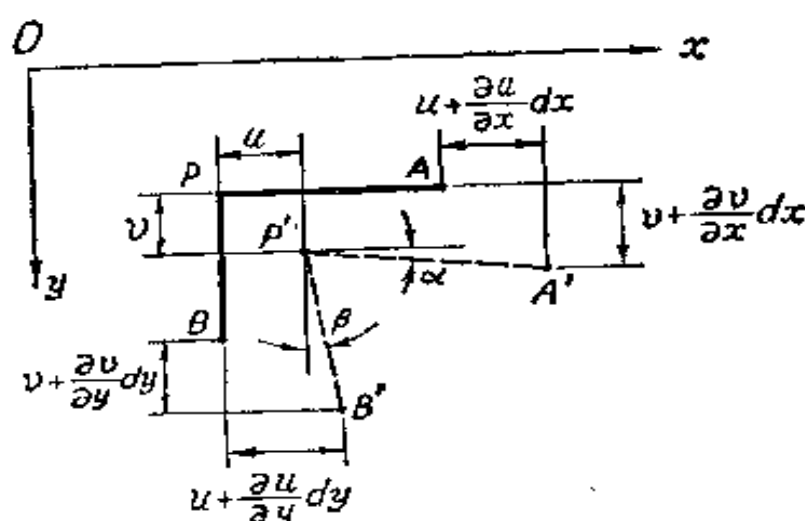


图 2-4

在这里, 由于位移是微小的, y 方向的位移 v 所引起的线段 PA 的伸缩, 是高一阶的微量, 因此略去不计。同样可见, 线段 PB 的正应变是

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b)$$

现在来求出线段 PA 与 PB 之间的直角的改变, 也就是剪应变 γ_{xy} , 用位移分量来表示。由图可见, 这个剪应变是由两部分组成的: 一部分是由 y 方向的位移 v 引起的, 即 x 方向的线段 PA 的转角 α ; 另一部分是由 x 方向的位移 u 引起的, 即 y 方向的线段 PB 的转角 β 。

设 P 点在 y 方向的位移分量是 v , 则 A 点在 y 方向的位移分量将是 $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ 。因此, 线段 PA 的转角是

$$\alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同样可得线段 PB 的转角是

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

于是可见, PA 与 PB 之间的直角的改变(以减小时为正), 也就是

剪应变 γ_{xy} 为

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (c)$$

综合(a)、(b)、(c)三式, 得出平面问题中形变分量与位移分量之间的关系式, 即几何方程或所谓哥西方程在平面问题中的简化形式

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2-3)$$

和平衡微分方程一样, 上列方程对于两种平面问题都同样适用, 并没有任何差别。

由几何方程可见, 当物体的位移分量完全确定时, 形变分量即完全确定。反之, 当形变分量完全确定时, 位移分量却不能完全确定。为了说明这后一点, 试令形变分量等于零, 即

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0, \quad (d)$$

而求出相应的位移分量。

将式(d)代入几何方程(2-3), 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (e)$$

将前二式分别对 x 及 y 积分, 得

$$u = f_1(y), \quad v = f_2(x), \quad (f)$$

其中 f_1 及 f_2 为任意函数。代入(e)中的第三式, 得

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx}.$$

这一方程的左边是 y 的函数, 而右边是 x 的函数。因此, 只可能两边都等于同一常数 ω 。于是得

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\omega, \quad \frac{df_2(x)}{dx} = \omega.$$

积分以后,得

$$f_1(y) = u_0 - \omega y, \quad f_2(x) = v_0 + \omega x, \quad (g)$$

其中的 u_0 及 v_0 为任意常数。将式(g)代入式(f),得位移分量

$$u = u_0 - \omega y, \quad v = v_0 + \omega x. \quad (2-4)$$

式(2-4)所示的位移,是“形变为零”时的位移,也就是所谓“与形变无关的位移”,因此必然是刚体位移。实际上, u_0 及 v_0 分别为物体沿 x 轴及 y 轴方向的刚体平移,而 ω 为物体绕 z 轴的刚体转动。下面根据平面运动的原理加以证明。

当三个常数中只有 u_0 不为零时,由式(2-4)可见,物体中任意一点的位移分量是 $u = u_0, v = 0$ 。这就是说,物体的所有各点只沿 x 方向移动同样的距离 u_0 。由此可见, u_0 代表物体沿 x 方向的刚体平移。同样可见, v_0 代表物体沿 y 方向的刚体平移。当只有 ω 不为零时,由式(2-4)可见,物体中任意一点的位移分量是 $u = -\omega y, v = \omega x$ 。据此,坐标为 (x, y) 的任意一点 P 沿着 y 方向移动 ωx , 并沿着负 x 方向移动 ωy , 如图 2-5 所示,而合成位移为

$$\begin{aligned} \sqrt{u^2 + v^2} &= \sqrt{(-\omega y)^2 + (\omega x)^2} \\ &= \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega r, \end{aligned}$$

其中 r 为 P 点至 z 轴的距离。命合成位移的方向与 y 轴的夹角为 α , 则

$$\operatorname{tg} \alpha = \omega y / \omega x = y / x = \operatorname{tg} \theta.$$

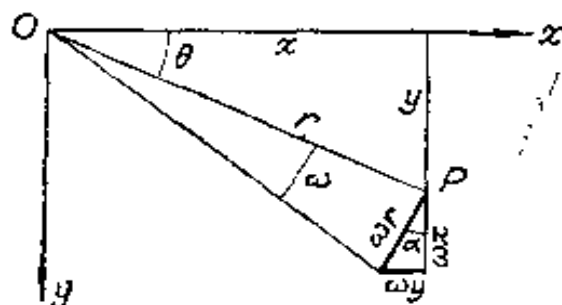


图 2-5

可见合成位移的方向与径向线段 OP 垂直, 也就是沿着切向。既然物体的所有各点移动的方向都是沿着切向, 而且移动的距离等于径向距离 r 乘以 ω , 可见(注意位移是微小的) ω 代表物体绕 z 轴的刚体转动。

既然物体在形变为零时可以有刚体位移, 可见, 当物体发生一定的形变时, 由于约束条件的不同, 它可能具有不同的刚体位移,

因而它的位移并不是完全确定的。在平面问题中, 常数 u_0 、 v_0 、 ω 的任意性就反映位移的不确定性, 而为了完全确定位移, 就必须有三个适当的约束条件来确定这三个常数。

§ 2-4 物 理 方 程

现在来考虑平面问题的物理学方面, 导出形变分量与应力分量之间的关系式, 也就是平面问题中的物理方程。

在完全弹性的各向同性体内, 形变分量与应力分量之间的关系极其简单, 已在材料力学中根据虎克定律导出如下:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

式中的 E 是拉压弹性模量, 又简称为弹性模量; G 是剪切弹性模量, 又称为刚度模量; μ 是侧向收缩系数, 又称为泊松系数。

这三个弹性常数之间有如下的关系:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (2-6)$$

这些弹性常数不随应力或形变的大小而变, 不随位置坐标而变, 也不随方向而变, 因为假定考虑的物体是完全弹性的, 均匀的, 而且是各向同性的。

在平面应力问题中, $\sigma_z = 0$ 。在(2-5)的第一式及第二式中删去 σ_z , 并将(2-6)代入(2-5)中的第六式, 得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

这就是平面应力问题中的物理方程。此外, (2-5)中的第三式成为

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y),$$

可以用来求得薄板厚度的改变。又由(2-5)中的第四式及第五式可见, 因为在平面应力问题中有 $\tau_{yz}=0$ 和 $\tau_{zx}=0$, 所以有 $\gamma_{yz}=0$ 和 $\gamma_{zx}=0$ 。

在平面应变问题中, 因为物体的所有各点都不沿 z 方向移动, 即 $w=0$, 所以 z 方向的线段都没有伸缩, 即 $\varepsilon_z=0$ 。于是由(2-5)中的第三式得

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y).$$

代入(2-5)中的第一式及第二式, 并注意(2-7)中的第三式仍然适用, 得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

这就是平面应变问题中的物理方程。此外, 因为在平面应变问题中也有 $\tau_{yz}=0$ 和 $\tau_{zx}=0$, 所以也有 $\gamma_{yz}=0$ 和 $\gamma_{zx}=0$ 。

可以看出, 两种平面问题的物理方程是不一样的。然而, 如果在平面应力问题的物理方程(2-7)中, 将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换为

$\frac{\mu}{1-\mu}$, 就得到平面应变问题的物理方程(2-8), 其中的第三式也不例外, 因为

$$\frac{2\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right)}{\frac{E}{1-\mu^2}} = \frac{2(1+\mu)}{E}.$$

§2-5 边界条件

在以上三节所导出的方程中, 可以把下列 8 个方程当作弹性力学平面问题的基本方程: 2 个平衡微分方程(2-2), 3 个几何方程(2-3), 3 个物理方程(2-7)或(2-8)。这 8 个基本方程中包含 8 个未知函数(坐标的未知函数): 3 个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$; 3 个形变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$; 2 个位移分量 u, v 。基本方程的数目恰好等于未知函数的数目, 因此, 在适当的边界条件下, 从基本方程中求解未知函数是可能的。

按照边界条件的不同, 弹性力学问题分为位移边界问题, 应力边界问题和混合边界问题。

在位移边界问题中, 物体在全部边界上的位移分量是已知的, 也就是: 在边界上, 我们有

$$u_s = \bar{u}, \quad v_s = \bar{v}, \quad (2-9)$$

其中 u_s 和 v_s 是位移的边界值, \bar{u} 和 \bar{v} 在边界上是坐标的已知函数。这就是平面问题的所谓位移边界条件。

在应力边界问题中, 物体在全部边界上所受的面力是已知的, 也就是说, 面力分量 \bar{X} 和 \bar{Y} 在边界上是坐标的已知函数。根据面力分量与边界上的应力分量之间的关系式, 可以把面力已知的条件转换成为应力方面的已知条件, 这就是所谓应力边界条件, 导出如下:

在导出平衡微分方程时所取的正平行六面体, 到了物体的边界上, 将成为三角板或三棱柱(它的斜面 AB 与物体的边界重合), 如图 2-6 所示。用 N 代表边界面 AB 的外法线方向, 并命 N 的方向余弦为

$$\cos(N, x) = l,$$

$$\cos(N, y) = m.$$

设边界面 AB 的长度为 ds , 则截面 PA

及 PB 的长度分别为 $l ds$ 及 $m ds$ 。垂直于图平面的尺寸仍然取为一个单位。

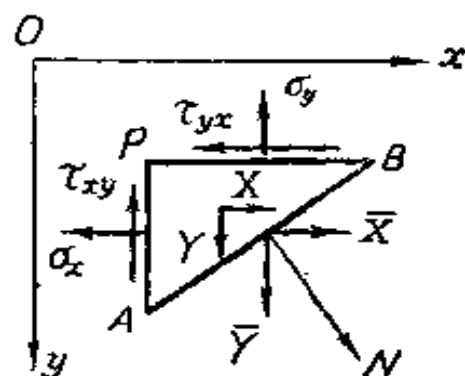


图 2-6

由平衡条件 $\Sigma F_x = 0$ 得

$$\bar{X} ds \times 1 - \sigma_x l ds \times 1 - \tau_{yx} m ds \times 1 + X \cdot \frac{l ds m ds}{2} \times 1 = 0.$$

除以 ds , 然后略去微量(亦即命 ds 趋于零), 得

$$l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s = \bar{X},$$

其中 $(\sigma_x)_s$ 和 $(\tau_{yx})_s$ 是应力分量的边界值。同样可以由平衡条件 $\Sigma F_y = 0$ 导出一个相似的方程。于是得出物体边界上各点的应力分量与面力分量之间的关系式

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s &= \bar{X}, \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s &= \bar{Y}. \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

这就是平面问题的应力边界条件。

如果考虑第三个平衡条件 $\Sigma M = 0$, 可以再写出一个方程。但是, 在略去微量之后, 这一方程将成为 $(\tau_{xy})_s = (\tau_{yx})_s$, 只是又一次证明了剪应力的互等性。

当边界垂直于某一坐标轴时, 应力边界条件的形式将得到大大的简化: 在垂直于 x 轴的边界上, x 值为常量, $l = \pm 1$, $m = 0$, 应力边界条件简化为

$$(\sigma_x)_s = \pm \bar{X}, (\tau_{xy})_s = \pm \bar{Y};$$

在垂直于 y 轴的边界上, y 值为常量, $l=0, m=\pm 1$, 应力边界条件简化为

$$(\sigma_y)_s = \pm \bar{Y}, (\tau_{yx})_s = \pm \bar{X}.$$

可见, 在这种特殊情况下, 应力分量的边界值就等于对应的面力分量(当边界的外法线沿坐标轴正方向时, 两者的正负号相同; 当边界的外法线沿坐标轴负方向时, 两者的正负号相反)。

注意: 在垂直于 x 轴的边界上, 应力边界条件中并没有 σ_y ; 在垂直于 y 轴的边界上, 应力边界条件中并没有 σ_x 。这就是说, 平行于边界的正应力, 它的边界值与面力分量并不直接相关。

在混合边界问题中, 物体的一部分边界具有已知位移, 因而具有位移边界条件, 如式(2-9)所示; 另一部分边界则具有已知面力, 因而具有应力边界条件, 如式(2-10)所示。此外, 在同一部分边界上还可能出现混合边界条件, 即, 两个边界条件中的一个为位移边界条件, 而另一个则是应力边界条件。例如, 设垂直于 x 轴的某一个边界是连杆支承边, 图 2-7a, 则在 x 方向有位移边界条件 $u_s = \bar{u}$

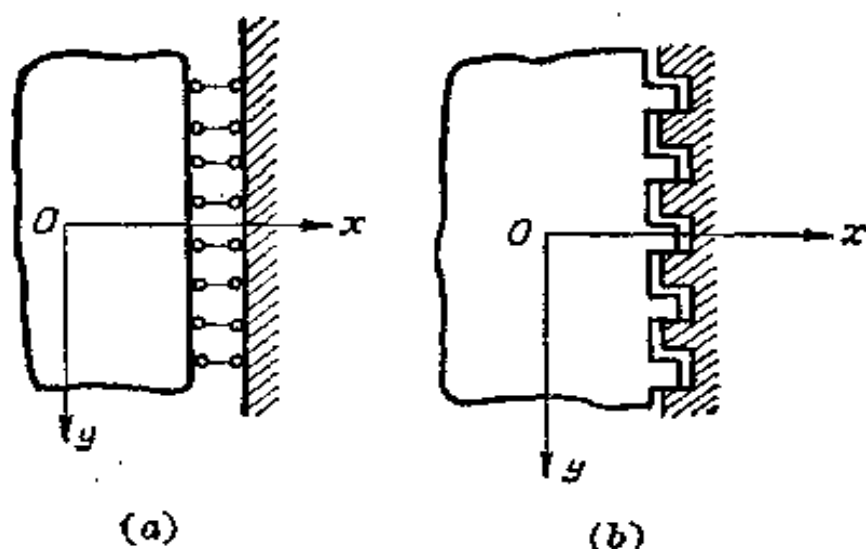


图 2-7

$=0$, 而在 y 方向有应力边界条件 $(\tau_{xy})_s = \bar{Y} = 0$ 。又例如, 设垂直于 x 轴的某一个边界是齿槽边, 图 2-7b, 则在 x 方向有应力边界条件

$(\sigma_x)_s = \bar{X} = 0$, 而在 y 方向有位移边界条件 $v_s = \bar{v} = 0$ 。在垂直于 y 轴的边界上, 以及与坐标轴斜交的边界上, 都可能与有此相似的混合边界条件。

§ 2-6 圣维南原理

在求解弹性力学问题时, 使应力分量、形变分量、位移分量完全满足基本方程, 并不困难, 但是, 要使得边界条件也得到完全满足, 却往往发生很大的困难(因此, 弹性力学问题在数学上被称为边界问题)。

另一方面, 在很多的工程结构计算中, 都会遇到这样的情况: 在物体的一小部分边界上, 仅仅知道物体所受的面力的合力, 而这个面力的分布方式并不明确, 因而无从考虑这部分边界上的应力边界条件。

在上述两种情况下, 圣维南原理有时可以提供很大的帮助。

圣维南原理指出: 如果把物体的一小部分边界上的面力, 变换为分布不同但静力等效的面力(主矢量相同, 对于同一点的主矩也相同), 那么, 近处的应力分布将有显著的改变, 但是远处所受的影响可以不计。

例如, 设有柱形构件, 在两端截面的形心受到大小相等而方向相反的拉力 P , 图 2-8a。如果把一端或两端的拉力变换为静力等效的力, 图 2-8b 或 2-8c, 则只有虚线划出的部分的应力分布有显著的改变, 而其余部分所受的影响是可以不计的。如果再将两端的拉力变换为均匀分布的拉力, 集度等于 P/A , 其中 A 为构件的横截面面积, 图 2-8d, 仍然只有靠近两端部分的应力受到显著的影响。这就是说, 在上述四种情况下, 离开两端较远的部分的应力分布, 并没有显著的差别。

以后可见, 在图 2-8d 所示的情况下, 由于面力连续均匀分布,

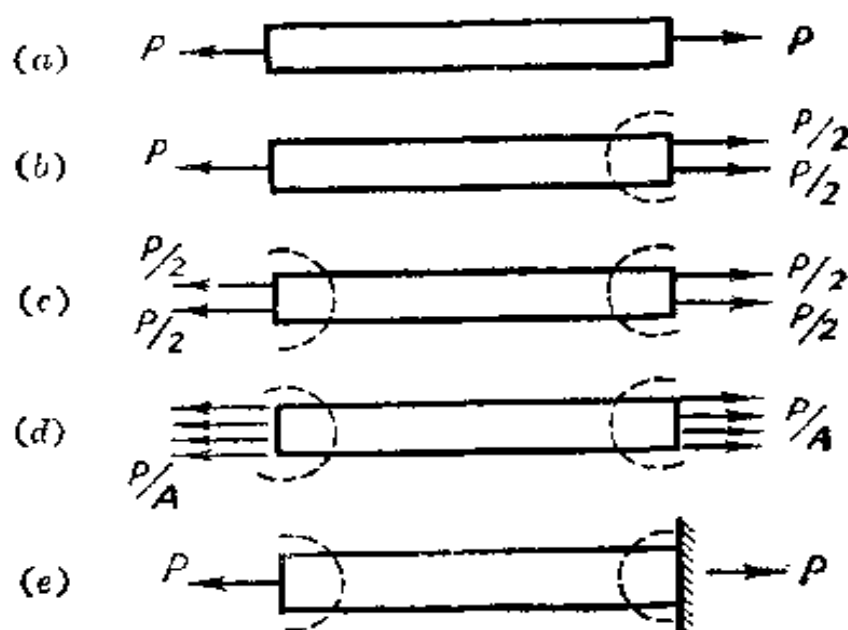


图 2-8

边界条件简单, 应力是很容易求得而且解答是很简单的。在其余三种情况下, 由于面力不是连续分布的, 甚至只知其合力为 P 而不知其分布方式, 应力是难以求解或者无法求解的。根据圣维南原理, 将图 2-8d 所示情况下的应力解答应用到其余三个情况, 虽然不能完全满足两端的应力边界条件, 但仍然可以表明离杆端较远处的应力状态, 而并没有显著的误差。这是已经为理论分析和实验量测所证实了的。

必须注意: 应用圣维南原理, 绝不能离开“静力等效”的条件。例如, 在图 2-8a 所示的构件上, 如两端的力 P 不是作用于截面的形心, 而是具有一定的偏心距离, 那么, 作用在每一端的面力, 不管它的分布方式如何, 与作用于截面形心的力 P 总归不是静力等效的。这时的应力, 与图示四种情况下的应力相比, 就不仅是在靠近两端处有差异, 而且在整个构件中都是不相同的。

当物体一小部分边界上的位移边界条件不能精确满足时, 也可以应用圣维南原理而得到有用的解答。例如, 设图 2-8 所示构件的右端是固定端, 图 2-8e, 这就是说, 在该构件的右端, 有位移

边界条件 $u_s = \bar{u} = 0$ 和 $v_s = \bar{v} = 0$, 把图 2-8d 所示情况下的简单解答应用于这一情况时, 这个位移边界条件是不能满足的。但是, 显然可见, 右端的面力, 一定是合成为经过截面形心的力 P , 它和左端的面力成平衡。这就是说, 右端(固定端)的面力, 静力等效于经过右端截面形心的 P 。因此, 根据圣维南原理, 把上述简单解答应用于这一情况时, 仍然只是在靠近两端处有显著的误差, 而在离两端较远之处, 误差是可以不计的。

圣维南原理也可以这样来陈述: 如果物体一小部分边界上的面力是一个平衡力系(主矢量及主矩都等于零), 那么, 这个面力就只会使得近处产生显著的应力, 而远处的应力可以不计。

例如, 设有无限大平面, 其中有一半径为 a 的圆孔, 图 2-9, 当孔边受到均匀压力作用时, 无限大平面内任意一点的应力与该点至圆心的距离的平方成反比(详见 § 4-6), 亦即离开圆心较远处的应力可以不计。这是因为作用在孔边的面力是一个平衡力系。

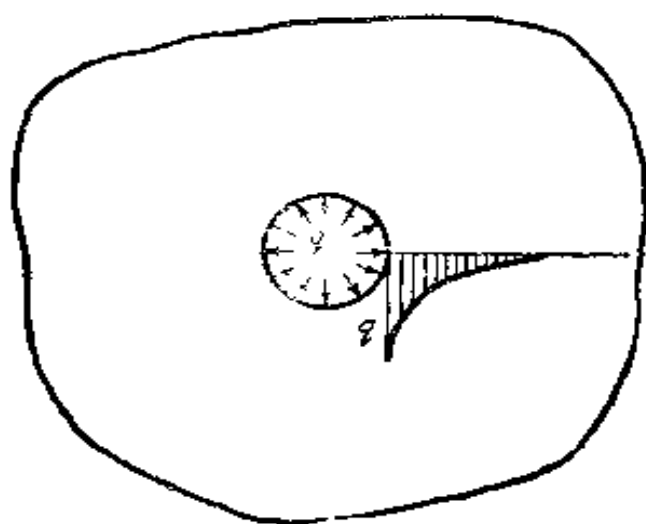


图 2-9

§ 2-7 按位移求解平面问题

在结构力学里计算超静定结构有三种基本方法, 就是位移法、

力法和混合法。在位移法中, 以某些位移为基本未知量; 在力法中, 以某些反力或内力为基本未知量; 在混合法中, 同时以某些位移和某些反力或内力为基本未知量。解出基本未知量以后, 再求其它的未知量。

与此相似, 在弹性力学里求解问题, 也有三种基本方法, 就是按位移求解、按应力求解和混合求解。按位移求解时, 以位移分量为基本未知函数, 由一些只包含位移分量的微分方程和边界条件求出位移分量以后, 用几何方程求出应变分量, 再用物理方程求出应力分量。按应力求解时, 以应力分量为基本未知函数, 由一些只包含应力分量的微分方程和边界条件求出应力分量以后, 用物理方程求出应变分量, 再用几何方程求出位移分量。在混合求解时, 同时以某些位移分量和应力分量为基本未知函数, 由一些只包含这些基本未知函数的微分方程和边界条件求出这些基本未知函数以后, 再用适当的方程求出其他的未知函数。

现在来导出按位移求解平面问题时所需用的微分方程和边界条件。

在平面应力问题中, 物理方程是(2-7), 即

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned}$$

由上列三式中求解应力分量, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

将几何方程(2-3)代入, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

再将上式代入平衡微分方程(2-2), 简化后, 即得

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + X &= 0, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

这是按位移求解平面应力问题时所用的基本微分方程, 也就是所谓拉密方程在平面应力问题中的简化形式。实际上它就是用位移表示的平衡微分方程。

另一方面, 将式(a)代入应力边界条件(2-10), 简化以后, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left[l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - m \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_s &= \bar{X}, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[m \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - l \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_s &= \bar{Y}. \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

这是用位移表示的应力边界条件, 也就是按位移求解平面应力问题时所用的应力边界条件。位移边界条件仍然如式(2-9)所示。

总结起来, 按位移求解平面应力问题时, 要使得位移分量满足微分方程(2-12), 并在边界上满足边界条件(2-9)或(2-13)。求出位移分量以后, 即可用几何方程(2-3)求得形变分量, 从而用公式(2-11)求得应力分量。

对于平面应变问题, 须在上面的各个方程中将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu}$, 将 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

由以上所述可见, 在一般情况下, 按位移求解平面问题, 最后还须处理联立的两个二阶偏微分方程, 而不能再简化为处理一个单

独微分方程的问题(象按应力求解平面问题时那样)。这是按位移求解的缺点,也就是按位移求解并未得出很多有用解答的原因。但是,在原则上,按位移求解可以适用于任何平面问题,即,不论体力是不是常量,以及问题是位移边界问题还是应力边界问题或混合边界问题。因此,对某些重要问题,虽然不能按位移求解而得出具体的、详尽的解答,却可能得出一些普遍的重要结论。这是按应力求解时不可能做到的。此外,在有限单元法中,按位移求解也是比较简单而普遍适用的。

§ 2-8 按应力求解平面问题。相容方程 与位移单值条件

现在来导出按应力求解平面问题时所需用的微分方程。平衡微分方程(2-2)本来就不包含形变分量和位移分量,应当保留。于是,只须由三个几何方程中消去位移分量,得出三个形变分量之间的一个关系式,再将三个物理方程代入这个关系式,使它只包含应力分量。具体推演如下。

平面问题的几何方程是式(2-3),即

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

将 ε_x 对 y 的二阶导数和 ε_y 对 x 的二阶导数相加,得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

但这个等式右边括弧中的表达式就等于 γ_{xy} , 于是得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2-14)$$

这个关系式称为形变协调方程或相容方程。形变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 必须满足这个方程,才能保证位移分量 u 和 v 的存在。如果任意选取函数 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 和 γ_{xy} 而不能满足这个方程,那么,由三个几何方程

中的任何两个求出的位移分量,将与第三个几何方程不能相容。这就表示,变形以后的物体就不再是连续的,而将发生某些部分互相脱离或互相侵入的情况。

现在,我们来利用物理方程将相容方程中的形变分量消去,使相容方程中只包含应力分量(基本未知函数)。

对于平面应力的情况,将物理方程(2-7)代入(2-14),得

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = 2(1 + \mu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (b)$$

利用平衡微分方程,可以简化上式,使它只包含正应力而不包含剪应力。为此,将平衡微分方程(2-2)写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - X, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y. \end{aligned}$$

将前一方程对 x 求导,后一方程对 y 求导,然后相加,并注意 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, 得

$$2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

代入式(b),简化以后,得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \quad (2-15)$$

对于平面应变的情况,进行同样的推演,可以导出一个与此相似的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1 - \mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \quad (2-16)$$

但是,也可以不必进行推演,只要如 § 2-4 中所述,把方程(2-15)中的 μ 换为 $\frac{\mu}{1 - \mu}$, 就得到这一方程。

这样,按应力求解平面问题时,在平面应力问题中,应力分量

应当满足平衡微分方程(2-2)和相容方程(2-15);在平面应变问题中,应力分量应当满足平衡微分方程(2-2)和相容方程(2-16)。此外,应力分量在边界上还应当满足应力边界条件(2-10)。

位移边界条件(2-9)一般是无法改用应力分量来表示的。因此,对于位移边界问题和混合边界问题,一般都不可能按应力求解而得出精确解答。

对于应力边界问题,是否满足了平衡微分方程、相容方程和应力边界条件,就能完全确定应力分量,还要看所考察的弹性体是单连体还是多连体。在平面问题中,可以这样简单地说:单连体就是只具有一个连续边界的物体;多连体则是具有两个或两个以上的连续边界的物体,也就是有孔口的物体。对于平面问题,可以证明:如果满足了平衡微分方程和相容方程,也满足了应力边界条件,那么,在单连体的情况下,应力分量也就完全确定了。但是在多连体的情况下,则应力分量的表达式中可能还留有待定函数或待定常数;在由这些应力分量求出的位移分量的表达式中,由于通过了积分运算,可能出现某些多值项,表示弹性体的同一点具有不同的位移,而在连续体中这是不可能的。根据“位移必须为单值”这样的所谓位移单值条件,令这些多值项等于零,就可以完全确定应力分量。具体的实例见§4-6。

§2-9 常体力情况下的简化。应力函数

在很多的工程问题里,体力是常量,也就是说,体力分量 X 和 Y 在整个弹性体内是常量,不随坐标而变。例如重力和平行移动时的惯性力,就是常量的体力。在这种情况下,相容方程(2-15)和(2-16)的右边都成为零,而两种平面问题的相容方程都简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (2-17)$$

可见,在常体力的情况下, $\sigma_x + \sigma_y$ 应当满足拉普拉斯微分方程,即调和方程,也就是说, $\sigma_x + \sigma_y$ 应当是调和函数。为了书写简便,下面用记号 ∇^2 代表 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$,把方程(2-17)简写为

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

注意,在常体力的情况下,平衡微分方程(2-2)、相容方程(2-17)和应力边界条件(2-10)中都不包含弹性常数,而且对于两种平面问题都是相同的。因此,在单连体的应力边界问题中,如果两个弹性体具有相同的边界形状,并受到同样分布的外力,那么,就不管这两个弹性体的材料是否相同,也不管它们是在平面应力情况下或是在平面应变情况下,应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的分布是相同的(两种平面问题中的应力分量 σ_z 以及形变和位移,却不一定相同)。

根据上述结论,针对某种材料的物体而求出的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} ,也适用于具有同样边界并受有同样外力的其他材料的物体;针对平面应力问题而求出的这些应力分量,也适用于边界相同、外力相同的平面应变情况下的物体。这对于弹性力学解答在工程上的应用,提供了极大的方便。

另一方面,根据上述结论,在用实验方法量测结构或构件的上述应力分量时,可以用便于量测的材料来制造模型,以代替原来不便于量测的结构或构件材料;还可以用平面应力情况下的薄板模型,来代替平面应变情况下的长柱形的结构或构件。这对于实验应力分析,也提供了极大的方便。

由以上的讨论可见,在常体力的情况下,按应力求解应力边界问题时,应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 应当满足平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

和相容方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (b)$$

并在边界上满足应力边界条件。在多连体中, 与上列应力分量相应的位移还应当满足位移单值条件。

首先来考察平衡微分方程(a)。这是一个非齐次微分方程组, 它的解答包含两个部分, 即, 任意一个特解及下列齐次微分方程的通解:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

特解可以取为

$$\sigma_x = -Xx, \quad \sigma_y = -Yy; \quad \tau_{xy} = 0, \quad (d)$$

也可以取为

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -Xy - Yx,$$

以及

$$\sigma_x = -Xx - Yy, \quad \sigma_y = -Xx - Yy, \quad \tau_{xy} = 0,$$

等等的形式, 因为它们都能满足微分方程(a)。

为了求得齐次微分方程(c)的通解, 将其中前一个方程改写为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(-\tau_{xy}).$$

根据微分方程理论, 上述关系式是使表达式

$$\sigma_x dy + (-\tau_{xy}) dx$$

成为某一个函数 $A(x, y)$ 的全微分 dA 的必要与充分条件, 于是有

$$\sigma_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad (e)$$

$$-\tau_{xy} = \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (f)$$

同样,将(c)中的第二个方程改写为

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(-\tau_{xy}),$$

可见也一定存在某一个函数 $B(x, y)$, 它的全微分就是 $dB = \sigma_y dx + (-\tau_{xy})dy$, 于是有

$$\sigma_y = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (g)$$

$$-\tau_{xy} = \frac{\partial B}{\partial y}. \quad (h)$$

由式(f)及式(h)得

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y},$$

因而又一定存在某一个函数 $\varphi(x, y)$, 它的全微分就是 $d\varphi = Bdx + A dy$, 于是有

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (i)$$

$$B = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (j)$$

将式(i)代入式(e), 式(j)代入式(g), 并将式(i)代入式(f), 即得通解

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (k)$$

将通解(k)与任一组特解叠加, 例如与特解(d)叠加, 即得微分方程(a)的全解:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (2-18)$$

不论 φ 是什么样的函数, 式(2-18)表示的应力分量总能满足平衡微分方程(a)。函数 φ 称为平面问题的应力函数, 是艾瑞首先引用的。

为了使式(2-18)表示的应力分量同时也能满足相容方程(b),

即方程(2-17), 应力函数 φ 必须满足一定的方程。将式(2-18)代入式(b), 即得这一方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy\right) = 0.$$

注意 X 及 Y 为常量, 可见上式后一括弧中的 Xx 及 Yy 并不起作用, 可以删去, 于是上式简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0,$$

或者展开而成为

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (2-19)$$

这就是用应力函数表示的相容方程。由此可见, 应力函数应当满足重调和方程, 也就是说, 它应当是重调和函数。方程(2-19)可以简写为 $\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$, 或者进一步简写为

$$\nabla^4 \varphi = 0.$$

如果体力可以不计, 则 $X = Y = 0$, 公式(2-18)就简化为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (2-20)$$

于是, 求解应力边界问题时, 如果体力是常量, 就只须由微分方程(2-19)求解应力函数 φ , 然后用公式(2-18)或(2-20)求出应力分量, 但这些应力分量在边界上应当满足应力边界条件; 在多连体中, 与这些应力分量相应的位移还应当满足位移单值条件。

§2-10 热弹性力学的基本方程与边界条件

当弹性体的温度有所改变时, 它的每一部分一般都将由于温度的升高或降低而趋于膨胀或收缩。但是, 由于弹性体所受的外在约束, 以及各个部分之间的相互约束, 这种膨胀或收缩并不能自由地发生, 于是就产生应力, 即所谓变温应力。近年来, 变温应力

已趋于改称为温度应力,但读者不可因此而有这样的误解:“温度应力是温度引起的,因而一定的温度相应于一定的应力。”实际上,这个应力是变温引起的,一定的变温才相应于一定的应力。

为了决定弹性体内的温度应力,须进行两方面的计算:(1)按照热传导理论,根据弹性体的热学性质、内部热源、初始条件和边界条件,计算弹性体内各点在各瞬时的温度,即所谓“决定温度场”,而前后两个温度场之差就是弹性体的变温。(2)按照“热弹性力学”,根据弹性体的变温来求出体内各点的温度应力,即所谓“决定应力场”。上述第一方面的计算不属于弹性力学的内容,本教程不予介绍。这里,我们只讨论温度应力问题的第二部分,即根据弹性体内的已知变温来决定体内的温度应力。为此,首先要导出热弹性力学的基本方程和边界条件。

用 T 代表弹性体内一点的变温(即后一瞬时的温度减去前一瞬时的温度),以升温时为正,降温时为负。由于变温 T ,弹性体内该点的微小长度,如果不受任何约束,将发生正应变 αT ,其中 α 是弹性体的线热胀系数。在各向同性体中,系数 α 不随方向而变,所以该点微小长度的这种正应变在所有各个方向都相同,因而也就不伴随任何剪应变。在通常的热应力计算中,也不计 α 随温度的改变。于是,弹性体内各点的形变分量是

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha T, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0, \quad (\alpha)$$

而式中的 α 是常量。

但是,由于弹性体所受的外在约束以及体内各部分之间的相互约束,上述形变并不能自由发生,于是就产生了应力,即所谓温度应力。这个温度应力又将由于物体的弹性而引起附加的形变,如虎克定律所示。因此,连同式 (α) 所示的形变,总的形变分量是

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha T, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T, \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}, \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}, \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

假定在如图 2-1 所示的等厚度薄板及坐标系中, 没有体力和面力的作用, 但是有变温 T 的作用, 而这个变温 T 是 x 和 y 的函数, 不随 z 而变化。通过与 § 2-1 中相同的论证, 可见这里仍然是平面应力的问题, 即

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad (b)$$

并由 (2-21) 得出用应力分量和变温 T 表示形变分量的物理方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha T, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) + \alpha T, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-22)$$

平衡微分方程仍然如 (2-2) 所示 (但其中 $X=0, Y=0$), 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

因为应力分量之间的平衡关系, 不会由于引起应力的原因不同而有所改变。

几何方程也仍然如 (2-3) 所示, 即

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

因为形变与位移之间的纯粹几何关系, 不会由于引起形变和位移的原因不同而有所改变。但须注意, 这里的形变和位移是由于变温和温度应力共同作用而引起的。

假定在如图 2-2 所示的无限长柱形体及坐标系中, 没有体力和面力作用, 但是有变温 T 的作用, 而这个变温也只是 x 和 y 的函数, 不随 z 而变化。通过与 § 2-1 及 § 2-4 中相同的论证, 可见这里仍然是平面应变的问题, 有

$$\varepsilon_z = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = 0,$$

并从而由 (2-21) 得出与 (2-22) 相似的物理方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right) + (1+\mu) \alpha T, \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right) + (1+\mu) \alpha T, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2-24)$$

平衡微分方程和几何方程仍然是 (2-23) 和 (2-3)。

将物理方程 (2-24) 与 (2-22) 对比, 可见 E 变换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 变换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, α 变换为 $(1+\mu)\alpha$ 。于是又可见, 针对温度应力的平面应力问题推导出来方程和结论, 进行这样的变换以后, 就适用于温度应力的平面应变问题。这是因为, 在推导过程中所用到的方程, 除了物理方程以外, 都不包含 E 、 μ 、 α 这三个物理常数。

但是必须指出: 在温度应力的平面应变问题中, 除了应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 以外, 还有一个应力分量 σ_z 。在 (2-21) 的第三式中, 命 $\varepsilon_z = 0$, 就得到这个应力分量:

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) - E\alpha T. \quad (2-25)$$

温度应力问题的边界条件仍然有位移边界条件与应力边界条件两种。在平面问题中, 位移边界条件仍然如(2-9)所示。应力边界条件亦仍然如(2-10)所示, 但其中 $\bar{X}=0, \bar{Y}=0$, 即

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s &= 0 \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-26)$$

§2-11 平面温度应力问题的求解

由上一节可知, 在只有变温作用的情况下, 平面温度应力问题的求解就是要在满足位移边界条件(2-9)或应力边界条件(2-26)的前提下, 由两个平衡微分方程(2-23)、三个几何方程(2-3)以及三个物理方程(2-22)或(2-24)求解八个未知函数 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, u$ 和 v 。

下面先讨论按位移求解平面温度应力问题, 导出按位移求解时所需用的微分方程。

由(2-22)求解应力分量, 就得出用形变分量和变温 T 表示应力分量的物理方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

将几何方程(2-3)代入上式, 得出用位移分量和变温 T 表示应力分量的公式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

将式(2-27)代入平衡微分方程(2-23), 简化后得到用位移分量表示的平衡微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-28)$$

再将式(2-27)代入式(2-26), 简化后得到按位移求解时的应力边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left[l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + m \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_s &= l \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[m \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - l \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_s &= m \frac{E\alpha T}{1-\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

位移边界条件仍然如式(2-9)所示。

以上各式是对于平面应力问题求得的, 对于平面应变问题, 须将以上两式中的 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, α 换为 $(1+\mu)\alpha$ 。

我们在式(2-9)或式(2-29)所示边界条件下, 求解方程(2-28), 得到位移分量 u, v 之后, 便可以由式(2-27)求得应力分量 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 。式(2-27)所示的应力分量表达式包含两个部分。当弹性体的形变为零时, $\sigma_x = \sigma_y = -\frac{E\alpha T}{1-\mu}, \tau_{xy} = 0$, 这就是弹性体受到完全约束时, 与变温相应的形变不能发生而产生的应力。实际上, 弹性体通常总是会有形变发生, 上面那部分应力会被“松弛”掉一些, 这就是(2-27)中与位移有关的那部分应力。

我们知道, 式(2-12)及式(2-13)是在体力、面力作用下按位移求解平面问题的平衡微分方程和应力边界条件。将方程(2-28)及(2-29)分别与(2-12)及(2-13)对比, 可见

$$-\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial x} \text{ 及 } -\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial y}$$

代替了体力分量 X 及 Y , 而

$$l \frac{E\alpha T}{1-\mu} \text{ 及 } m \frac{E\alpha T}{1-\mu} \quad (b)$$

代替了面力分量 \bar{X} 及 \bar{Y} 。于是可知, 在一定的位移边界条件下, 弹性体中由于变温 T 而引起的位移, 就等于温度不变而受有下列外力作用时的位移:

(1) 体力, 它的分量是

$$X = -\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Y = -\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial y}; \quad (c)$$

(2) 法向面力

$$\sigma_N = \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \quad (d)$$

它的分量如式 (b) 所示。按照应力边界条件 (2-13) 及位移边界条件 (2-9) 求出微分方程 (2-12) 的解答 u 及 v 以后, 就可以按照 (2-27) 求得应力分量。再次指出, 应力分量包含两部分, 一部分是和通常一样根据位移分量求得的, 另一部分是与各点的变温 T 成正比的、各向相同的正应力 $-\frac{E\alpha T}{1-\mu}$ 。

总结起来, 在温度应力的平面应力问题中, 温度应力就等于体力 (c) 和面力 (d) 所引起的应力, 叠加以各向相同的正应力 $-\frac{E\alpha T}{1-\mu}$ 。这样就把温度应力的平面问题变换成为通常的、已知体力和面力的平面问题。

例如, 为了求出图 2-10a 所示混凝土浇筑块均匀降温 T_0 时的变温应力, 由于体力 $X=Y=0$, 只须在同样的地基约束条件下, 求出法向面力 $\sigma_N = \frac{E\alpha T}{1-\mu} = -\frac{E\alpha T_0}{1-\mu}$ 作用下的应力, 图 2-10b, 叠加上

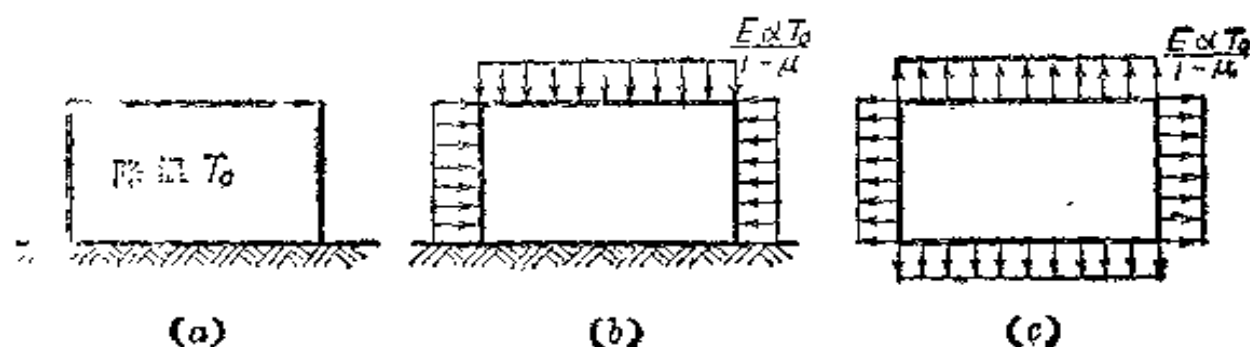


图 2-10

各向相同的应力 $-\frac{E\alpha T}{1-\mu} = -\frac{E\alpha T_0}{1-\mu}$, 图 2-10c。图 2-10b 所示受力条件下的应力, 可以通过各种办法求得, 例如可以采用数值解法或模型试验的方法。

下面再来讨论按应力求解平面温度应力问题, 导出按应力求解时所需用的微分方程。

因为平面温度应力问题的几何方程仍然是式(2-3), 因此, 形变相容方程也仍然是式(2-14)。将物理方程(2-22)代入式(2-14), 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\sigma_x - \mu \sigma_y}{E} + \alpha T \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\sigma_y - \mu \sigma_x}{E} + \alpha T \right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \right]. \end{aligned} \quad (e)$$

式(e)及(2-23)就是按应力求解温度应力时的基本方程。

利用平衡微分方程(2-23), 可以简化相容方程(e)。为此, 将(2-23)中的第一式及第二式分别对 x 及 y 求导, 然后相加, 得

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

代入式(e), 简化以后, 可见相容方程成为

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) + E\alpha \nabla^2 T = 0. \quad (f)$$

现在, 可以把式(2-23)和式(f)作为按应力求解温度应力时的基本

方程。对于平面应变问题,须将式(f)中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, 并将 α 换为 $(1+\mu)\alpha$ 。

在温度应力问题中,没有体力作用,因此,也可以引用应力函数而使问题得到进一步的简化。命

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (g)$$

则平衡微分方程(2-23)总能满足。代入式(f),就得出用应力函数表示的相容方程

$$\nabla^4 \varphi + E\alpha \nabla^2 T = 0. \quad (2-30)$$

应力边界条件仍然是式(2-26),也可以用应力函数表示为

$$\left. \begin{aligned} l \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_s - m \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_s &= 0, \\ m \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_s - l \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-31)$$

位移边界条件也仍然是式(2-9),但是一般无法改用应力分量或应力函数来表示。

这样,按应力求解无位移边界条件的平面温度应力问题,就成为在边界条件(2-31)下求解方程(2-30)。顺便指出,当变温 T 满足 $\nabla^2 T = 0$ 时,也就是说 T 是调和函数时,式(2-30)成为

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (h)$$

显然, $\varphi = 0$ 是方程(h)的满足应力边界条件(2-31)的解答。由于解答的唯一性,这就是当 T 为调和函数时的正确解答。这时,由式(g)将得出

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

这就说明,按调和函数分布的变温 T , 不会在无位移边界条件的单连体中引起应力。

习 题

2-1. 试证明, 当图 2-3 中六面体的各面上所受的应力不是均匀分布时, 平衡微分方程仍为 (2-2)。

2-2. 试证明, 在图 2-4 中, y 方向的位移 v 所引起的线段 PA 的伸缩是高级微量。

2-3. 试利用边界条件证明, 当变截面杆受轴向拉伸时, 图 2-11, 除了正应力 σ_x 外, 还有剪应力 τ_{xy} 和正应力 σ_y 。试确定边界上 σ_y 与 τ_{xy} 及 σ_x 的关系。

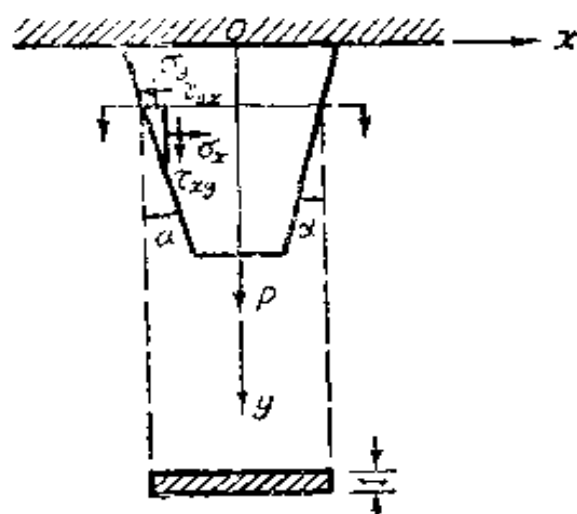


图 2-11

2-4. 设有任意形状的等厚度薄板, 体力可以不计, 在全部边界上 (包括孔口边界上) 受有均匀压力 q 。试证 $\sigma_x = \sigma_y = -q$ 及 $\tau_{xy} = 0$ 能满足平衡微分方程、相容方程和边界条件, 因而就是正确的解答。

2-5. 设有矩形截面的悬臂梁, 在自由端受有集中荷载 P , 图 2-12, 体力可以不计。试根据材料力学公式, 写出弯应力 σ_x 和剪应力 τ_{xy} 的表达式,

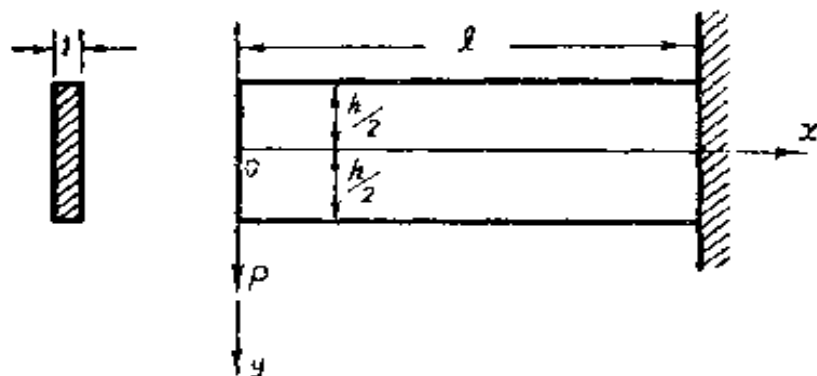


图 2-12

并取挤压应力 $\sigma_y = 0$, 然后证明, 这些表达式满足平衡微分方程和相容方程, 然后说明, 这些表达式是否就表示正确的解答。

2-6. 试证明, 如果体力虽然不是常量, 但却是有势的力, 即体力分量可以表示为

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

其中 V 是势函数, 则应力分量亦可用应力函数表示成为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + V, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + V, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

试导出相应的相容方程。

答案: 平面应力问题中的相容方程为 $\nabla^4 \varphi = -(1-\mu)\nabla^2 V$,

平面应变问题中的相容方程为 $\nabla^4 \varphi = -\frac{1-2\mu}{1-\mu}\nabla^2 V$.

第三章 平面问题的直角坐标解答

§ 3-1 逆解法与半逆解法。多项式解答

在 § 2-9 中已经指出, 求解外力作用下的应力边界问题, 如果体力是常量, 可以归结为在应力边界条件下求解微分方程 (2-19)。由于 (2-19) 是偏微分方程, 它的通解不能写成有限项数的形式, 因此, 在具体求解问题时, 不能直接求解, 而只能采用逆解法或半逆解法。

所谓逆解法, 就是先设定各种形式的、满足相容方程 (2-19) 的应力函数 φ , 用公式 (2-18) 或 (2-20) 求出应力分量, 然后根据应力边界条件来考察, 在各种形状的弹性体上, 这些应力分量对应于什么样的面力, 从而得知所设定的应力函数可以解决什么问题。

所谓半逆解法, 就是针对所要求解的问题, 根据弹性体的边界形状和受力情况, 假设一部或全部应力分量为某种形式的函数, 从而推出应力函数 φ , 然后来考察, 这个应力函数能否满足相容方程, 以及, 原来所假设的应力分量和由这个应力函数求出的其余应力分量能否满足边界条件。如果所有的条件都能满足, 自然也就得出正确的解答。如果某方面的条件不能满足, 就要另作假设, 重新考察。

下面先用逆解法求出几个简单平面问题的多项式解答。假定体力可以不计, 也就是 $X=Y=0$ 。

首先取一次式

$$\varphi = a + bx + cy.$$

不论各系数取任何值, 相容方程 (2-19) 总能满足。由公式 (2-20)

得应力分量 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ 。不论弹性体为任何形状, 也不论坐标系如何选择, 由应力边界条件总是得出 $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ 。由此可见: (1) 线性应力函数对应于无体力、无面力、无应力的状态; (2) 在任何平面问题的应力函数中加上一个线性函数, 并不影响应力。

其次取二次式

$$\varphi = ax^2 + bxy + cy^2.$$

不论各系数取任何值, 相容方程 (2-19) 也总能满足。为明了起见, 试分别考察式中每一项所能解决的问题。

对应于 $\varphi = ax^2$, 应力分量是 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 2a$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ 。对于图 3-1a 所示的矩形板和坐标方向, 当板内发生上述应力时, 由应力边界条件可知左右两边没有面力, 而上下两边分别受有向上和向下的均布面力 $2a$ 。可见, 应力函数 $\varphi = ax^2$ 能解决矩形板在 y 方向受均布拉力 (设 $a > 0$) 或均布压力 (设 $a < 0$) 的问题。

对应于 $\varphi = bxy$, 应力分量是 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -b$ 。对于图 3-1b 所示的矩形板和坐标方向, 当板内发生上述应力时, 也由应力边界条件可知, 在左右两边分别有向下和向上的均布面力 b , 而在上下两边分别有向右和向左的均布面力 b , 可见, 应力函数 $\varphi = bxy$ 能解决矩形板受均布剪力的问题。

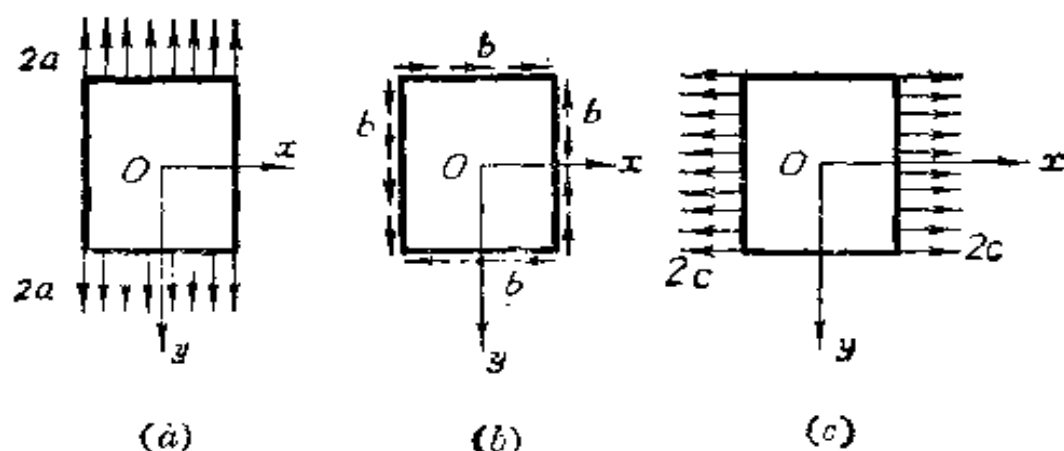


图 3-1

同样可见, 应力函数 $\varphi = cy^2$ 能解决矩形板在 x 方向受均布拉力(设 $c > 0$)或均布压力(设 $c < 0$)的问题, 图 3-1c。

再其次, 取三次式

$$\varphi = ay^3.$$

不论系数 a 取任何值, 相容方程(2-19)也总能满足。

对应的应力分量是 $\sigma_x = 6ay$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ 。对于图 3-2 所示的矩形板和坐标系, 当板内发生上述应力时, 上下两边没有面力; 在左右两边, 没有铅直面力, 有按直线变化的水平面力, 而每一边上的水平面力合成为一个力偶。可见, 应力函数 $\varphi = ay^3$ 能解决矩形梁受纯弯曲的问题, 详细的讨论见下节。

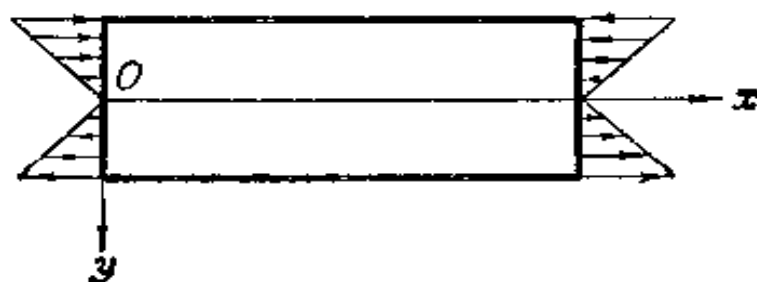


图 3-2

如果取应力函数 φ 为四次或四次以上的多项式, 则其中的系数必须满足一定的条件, 才能满足相容方程。由于这些应力函数不能解决什么重要的实际问题, 这里不进行讨论。

§ 3-2 矩形梁的纯弯曲

设有矩形截面的梁, 它的宽度远小于深度和长度(近似的平面应力情况), 或者远大于深度和长度(近似的平面应变情况), 在两端受相反的力偶而弯曲, 体力可以不计。为了方便, 取单位宽度的梁来考察, 图 3-3, 并命每单位宽度上力偶的矩为 M 。注意, M 的因次是[力][长度]/[长度], 即[力]。

取坐标轴如图所示。由前一节中已知, 应力函数

$$\varphi = ay^3$$

能解决纯弯曲的问题, 而相应的应力分量为

$$\sigma_x = 6ay, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0. \quad (a)$$

现在来考察, 这些应力分量是否能满足边界条件, 如果能满足, 系数 a 应该取什么值。

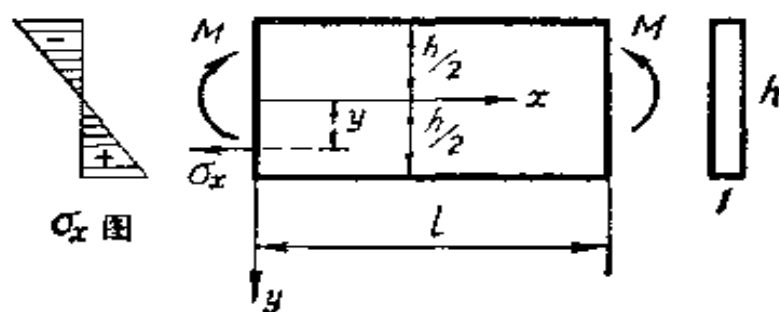


图 3-3

在下边和上边, 都没有面力, 要求

$$(\sigma_y)_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0, \quad (\tau_{yx})_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0.$$

这是能满足的, 因为在所有各点都有 $\sigma_y = 0, \tau_{yx} = 0$ 。在左端和右端, 没有铅直面力, 分别要求

$$(\tau_{xy})_{x=0} = 0, \quad (\tau_{xy})_{x=l} = 0,$$

这也是能满足的, 因为在所有各点都有 $\tau_{xy} = 0$ 。

此外, 在左端和右端, 水平面力应该合成为力偶, 而力偶的矩为 M , 这就要求水平面力的主矢量为零, 主矩为 M , 亦即

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dy = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y dy = M.$$

将式 (a) 中的 σ_x 代入, 上列二式成为

$$6a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y dy = 0, \quad 6a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = M.$$

前一式总能满足, 而后一式要求

$$\alpha = \frac{2M}{h^3}.$$

代入式(a), 得

$$\sigma_x = -\frac{12M}{h^3}y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0. \quad (b)$$

注意到梁截面的惯矩是 $I = \frac{1 \times h^3}{12}$, 上式又可以改写成为

$$\sigma_x = -\frac{M}{I}y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0. \quad (3-1)$$

这就是矩形梁受纯弯曲时的应力分量, 结果与材料力学中完全相同, 即, 梁的各纤维只受单向拉压, 即所谓弯应力, 按直线分布, 如图所示。

应当指出, 组成梁端力偶的面力必须按直线分布, 解答(3-1)才是完全精确的。如果两端的面力按其他方式分布, 解答(3-1)是有误差的。但是, 按照圣维南原理, 只在梁的两端附近有显著的误差; 在离开梁端较远之处, 误差是可以不计的。由此可见, 对于长度 l 远大于深度 h 的梁, 解答(3-1)是有实用价值的; 对于长度 l 与深度 h 同等大小的所谓深梁, 这个解答是没有什么实用意义的。

§ 3-3 位移分量的求出

本节中以矩形梁的纯弯曲问题为例, 说明如何由应力分量求出位移分量。

假定这里是平面应力的情况。将应力分量(3-1)代入物理方程(2-7), 得形变分量

$$\epsilon_x = -\frac{M}{EI}y, \quad \epsilon_y = -\frac{\mu M}{EI}y, \quad \gamma_{xy} = 0. \quad (a)$$

再将式(a)代入几何方程(2-3), 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{M}{EI}y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu M}{EI}y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (b)$$

前二式的积分给出

$$u = \frac{M}{EI}xy - f_1(y), \quad v = -\frac{\mu M}{2EI}y^2 + f_2(x), \quad (c)$$

其中的 f_1 和 f_2 是任意函数。将式(c)代入(b)中的第三式,得

$$\frac{df_2(x)}{dx} + \frac{M}{EI}x - \frac{df_1(y)}{dy} = 0,$$

或者移项而得

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx} + \frac{M}{EI}x.$$

等式左边只是 y 的函数,而等式右边只是 x 的函数。因此,只可能两边都等于同一常数 ω 。于是有

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\omega, \quad \frac{df_2(x)}{dx} = -\frac{M}{EI}x + \omega.$$

积分以后得

$$f_1(y) = -\omega y + u_0, \quad f_2(x) = -\frac{M}{2EI}x^2 + \omega x + v_0.$$

代入式(c),得位移分量

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M}{EI}xy - \omega y + u_0, \\ v &= -\frac{\mu M}{2EI}y^2 - \frac{M}{2EI}x^2 + \omega x + v_0, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

其中的任意常数 ω, u_0, v_0 须由约束条件求得。

由(d)中的第一式可见,不论约束情况如何(也就是不论 ω, u_0, v_0 取任何值),铅直线段的转角都是(见 § 2-3)

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{M}{EI}x - \omega.$$

在同一个横截面上, x 是常量,因而 β 也是常量。于是可见,同一横截面上的各铅直线段的转角相同。这就是说,横截面保持为平面。

又由(d)中的第二式可见, 不论约束情况如何, 梁的各纵向纤维的曲率是

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M}{EI}. \quad (3-2)$$

这是材料力学里求梁的挠度时所用的基本公式。

如果梁是简支梁, 图 3-4a, 则在铰支座 O , 既没有水平位移, 也没有铅直位移; 在连杆支座 A , 没有铅直位移。因此, 约束条件是

$$(u)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0, \quad (v)_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0, \quad (v)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0.$$

于是由式(d)得出下列方程来决定任意常数 ω, u_0, v_0 :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad -\frac{Ml^2}{2EI} + \omega l + v_0 = 0,$$

从而得出

$$\omega = -\frac{Ml}{2EI}, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0.$$

代入式(d), 就得到该简支梁的位移分量

$$u = -\frac{M}{EI} \left(x - \frac{l}{2} \right) y, \quad v = \frac{M}{2EI} (l-x)x - \frac{\mu M}{2EI} y^2. \quad (3-3)$$

梁轴的挠度方程是

$$(v)_{y=0} = \frac{M}{2EI} (l-x)x,$$

和材料力学中的结果相同。

如果梁是悬臂梁, 左端自由而右端完全固定, 图 3-4b, 则在梁

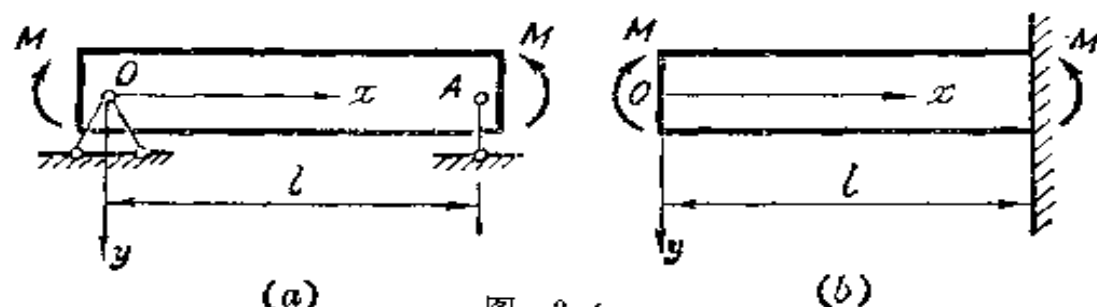


图 3-4

的右端 ($x=l$), 对于 y 的任何值 $\left(-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}\right)$, 都要求 $u=0$ 和 $v=0$ 。在多项式解答中, 这个条件是无法满足的。多项式的解答可以满足这样的约束条件: 在右端, 某一点不移动, 某一个线段不转动。现在和材料力学中一样, 假定右端截面的中点不移动, 该点的水平线段不转动。这样, 约束条件是

$$(u)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0, (v)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0, \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{\substack{x=l \\ y=0}} = 0.$$

于是由式(d)得出下列三个方程来决定 ω, u_0, v_0 :

$$u_0 = 0, -\frac{Ml^2}{2EI} + \omega l + v_0 = 0, -\frac{Ml}{EI} + \omega = 0.$$

求解以后, 得

$$\omega = \frac{Ml}{EI}, u_0 = 0, v_0 = -\frac{Ml^2}{2EI}.$$

代入式(d), 得出该悬臂梁的位移分量

$$u = -\frac{M}{EI}(l-x)y, \quad v = -\frac{M}{2EI}(l-x)^2 - \frac{\mu M}{2EI}y^2. \quad (3-4)$$

梁轴的挠度方程是

$$(v)_{y=0} = -\frac{M}{2EI}(l-x)^2,$$

也和材料力学中的解答相同。

对于平面应变情况下的梁, 须在以上的形变公式和位移公式中, 把 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, 把 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。例如, 梁的纵向纤维的曲率公式(3-2), 应该变换为

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{(1-\mu^2)M}{EI}. \quad (3-5)$$

§ 3-4 简支梁受均布荷载

设有矩形截面的简支梁, 深度为 h , 长度为 $2l$, 体力可以不计,

受均布荷载 q , 由两端的反力 ql 维持平衡, 图 3-5。为了方便, 仍然取单位宽度的梁来考虑。

用半逆解法。由材料力学已知: 弯应力 σ_x 主要是由弯矩引起的, 剪应力 τ_{xy} 主要是由剪力引起的, 挤压应力 σ_y 主要是由直接荷载 q

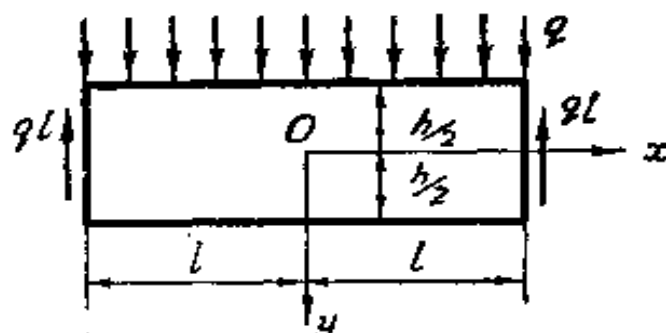


图 3-5

引起的。现在, q 是常量, 因而可以假设 σ_y 不随 x 而变, 也就是假设 σ_y 只是 y 的函数:

$$\sigma_y = f(y).$$

于是由公式(2-20)有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f(y).$$

对 x 积分, 得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = xf(y) + f_1(y), \quad (a)$$

$$\varphi = \frac{x^2}{2}f(y) + xf_1(y) + f_2(y), \quad (b)$$

其中 $f_1(y)$ 和 $f_2(y)$ 是任意函数, 即待定函数。

现在来考察, 式(b)所示的应力函数能否满足相容方程。为此, 求出式(b)的四阶导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{dy^2}, \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= \frac{x^2}{2} \frac{d^4 f(y)}{dy^4} + x \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4} + \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4}. \end{aligned}$$

代入相容方程(2-19), 可见各个待定函数应满足方程

$$\frac{1}{2} \frac{d^4 f(y)}{dy^4} x^2 + \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4} x + \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 0.$$

这是 x 的二次方程, 但相容方程要求它有无数多的根(全梁内的 x

值都应该满足它), 因此, 这个二次方程的系数和自由项都必须等于零, 即

$$\frac{d^4 f(y)}{dy^4} = 0, \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4} = 0, \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 0.$$

前面两个方程要求

$$f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D, f_1(y) = Ey^3 + Fy^2 + Gy. \quad (c)$$

在这里, $f_1(y)$ 中的常数项已被略去, 因为这一项在 φ 的表达式中成为 x 的一次项, 不影响应力分量(见 § 3-1)。第三个方程则要求

$$\frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} = -2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = -12Ay - 4B,$$

也就是要求

$$f_2(y) = -\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2, \quad (d)$$

其中的一次项及常数项都被略去, 因为它们不影响应力分量。将式(c)及式(d)代入式(b), 得应力函数

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{x^2}{2} (Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x(Ey^3 + Fy^2 + Gy) \\ & - \frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2. \end{aligned} \quad (e)$$

将式(e)代入式(2-20), 得应力分量

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{x^2}{2} (6Ay + 2B) - x(6Ey + 2F) \\ & - 2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K, \end{aligned} \quad (f)$$

$$\sigma_y = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \quad (g)$$

$$\tau_{xy} = -x(3Ay^2 + 2By + C) - (3Ey^2 + 2Fy + G). \quad (h)$$

这些应力分量是满足平衡微分方程和相容方程的。因此, 如果能够适当选择常数 A 、 B 、 \dots 、 K , 使所有的边界条件都被满足, 则应力分量(f)、(g)、(h)就是正确的解答。

在考虑边界条件以前, 先考虑一下问题的对称性(如果这个问

题有对称性的话), 往往可以减少一些运算工作。在这里, 因为 yz 面是梁和荷载的对称面, 所以应力分布应当对称于 yz 面。这样, σ_x 和 σ_y 应该是 x 的偶函数, 而 τ_{xy} 应该是 x 的奇函数。于是由式 (f) 和式 (h) 可见

$$E = F = G = 0.$$

如果不考虑问题的对称性, 那么, 在考虑过全部边界条件以后, 也可以得出同样的结果, 但运算工作要比较多些。

通常, 梁的跨度远大于梁的深度, 梁的上下两个边界占全部边界的绝大部分, 因而上下两个边界是主要的边界。在主要的边界上, 边界条件必须完全满足; 在次要的边界上 (很小部分的边界上), 如果边界条件不能完全满足, 就可以引用圣维南原理, 使边界条件得到近似的满足, 仍然可以得出有用的解答。

根据这个理由, 先来考虑上下两边的边界条件:

$$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}}=0, (\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}}=-q, (\tau_{xy})_{y=\pm\frac{h}{2}}=0.$$

将应力分量 (g) 和 (h) 代入, 并注意前面已有 $E = F = G = 0$, 可见这些边界条件要求

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{8} A + \frac{h^2}{4} B + \frac{h}{2} C + D &= 0, \\ -\frac{h^3}{8} A - \frac{h^2}{4} B - \frac{h}{2} C + D &= -q, \\ -x \left(\frac{3}{4} h^2 A + hB + C \right) &= 0, \text{ 即, } \frac{3}{4} h^2 A + hB + C = 0, \\ -x \left(\frac{3}{4} h^2 A - hB - C \right) &= 0, \text{ 即, } \frac{3}{4} h^2 A - hB - C = 0. \end{aligned}$$

由于上列四个方程是互不依赖的, 也是不相矛盾的, 而且只包含四个未知数, 因此可以联立求解而得出

$$A = -\frac{2q}{h^3}, \quad B = 0, \quad C = \frac{3q}{2h}, \quad D = -\frac{q}{2}.$$

将以上已确定的常数代入(f)、(g)、(h)三式,得

$$\sigma_x = -\frac{6q}{h^3}x^2y + \frac{4q}{h^3}y^3 + 6Hy + 2K, \quad (i)$$

$$\sigma_y = -\frac{2q}{h^3}y^3 + \frac{3q}{2h}y - \frac{q}{2}, \quad (j)$$

$$\tau_{xy} = \frac{6q}{h^3}xy^2 - \frac{3q}{2h}x. \quad (k)$$

现在来考虑左右两边的边界条件。由于问题的对称性, 只须考虑其中的一边, 例如右边。如果右边的边界条件能满足, 左边的边界条件自然也能满足。

首先, 在梁的右边, 没有水平面力, 这就要求当 $x=l$ 时, 不论 y 取任何值 $\left(-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}\right)$, 都有 $\sigma_x = 0$ 。由式(i)可见, 这是不可能满足的, 除非是 $q=0$ 。因此, 用多项式求解, 只能要求 σ_x 在这部分边界上合成为平衡力系, 也就是要求

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0, \quad (l)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} y dy = 0. \quad (m)$$

将式(i)代入式(l), 得

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{6ql^2}{h^3}y + \frac{4q}{h^3}y^3 + 6Hy + 2K \right) dy = 0.$$

积分以后得

$$K = 0.$$

将式(i)代入式(m), 并命 $K=0$, 得

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{6ql^2}{h^3}y + \frac{4q}{h^3}y^3 + 6Hy \right) y dy = 0,$$

积分以后得

$$H = \frac{ql^2}{h^3} - \frac{q}{10h}.$$

将 H 和 K 的已知值代入式 (i), 得

$$\sigma_x = -\frac{6q}{h^3}x^2y + \frac{4q}{h^3}y^3 + \frac{6ql^2}{h^3}y - \frac{3q}{5h}y. \quad (n)$$

另一方面, 在梁的右边, 剪应力 τ_{xy} 应该合成为向上的反力 ql , 这就要求

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=l} dy = -ql.$$

在 ql 前面加了负号, 因为右边的剪应力 τ_{xy} 以向下为正, 而 ql 是向上的。将式 (k) 代入, 上式成为

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{6ql}{h^3}y^2 - \frac{3ql}{2h} \right) dy = -ql.$$

积分以后, 可见这一条件是满足的。

将 (n), (j), (k) 三式略加整理, 得应力分量的最后解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6q}{h^3}(l^2 - x^2)y + q\frac{y}{h}\left(\frac{4y^2}{h^2} - \frac{3}{5}\right), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right)\left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2, \\ \tau_{xy} &= -\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \end{aligned} \right\} \quad (p)$$

各应力分量沿铅直方向的变化大致如图 3-6 所示。

注意梁截面的宽度是 $b=1$, 惯矩是 $I=\frac{1}{12}h^3$, 静矩是 $S=\frac{h^2}{8}$

$-\frac{y^2}{2}$, 而梁的任一横截面上的弯矩和剪力分别为

$$M = ql(l-x) - \frac{q}{2}(l-x)^2 = \frac{q}{2}(l^2 - x^2),$$

$$Q = -ql + q(l-x) = -qx,$$

则式(p)可以改写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M}{I}y + q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5}\right), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right)\left(1 + \frac{2y}{h}\right)^2, \\ \tau_{xy} &= \frac{Qs}{bI}. \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

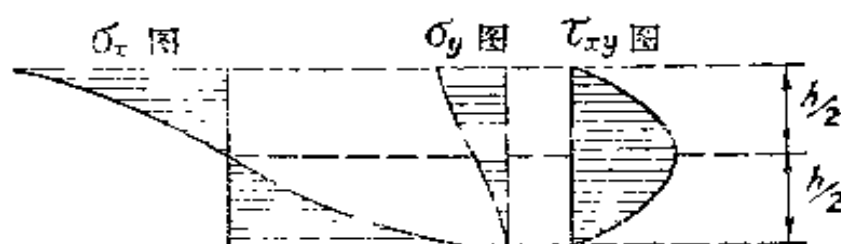


图 3-6

在弯应力 σ_x 的表达式中, 第一项是主要项, 和材料力学中的解答相同, 第二项则是弹性力学提出的修正项。对于通常的浅梁, 修正项很小, 可以不计。对于较深的梁, 则须注意修正项。读者试证: 当梁的跨度两倍于深度时, 修正项将达到主要项的 1/15; 当梁的跨度四倍于深度时, 修正项仅为主要项的 1/60。因此, 对于跨度与深度之比大于 4 的梁, 材料力学中的解答已具有足够的精确度。

应力分量 σ_y 乃是梁的各纤维之间的挤压应力, 它的最大绝对值为 q , 发生在梁顶。在材料力学里, 一般不考虑这个应力分量。

剪应力 τ_{xy} 的表达式和材料力学里完全一样。

注意: 按照式(p), 在梁的右边和左边, 有水平面力

$$\bar{X} = \pm (\sigma_x)_{x=\pm l} = \pm q \frac{y}{h} \left(4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right).$$

但是, 由式(1)及式(m)可见, 每一边的水平面力是一个平衡力系, 因此, 根据圣维南原理, 不管这些面力是否存在, 离两边较远处的应力都和式(3-6)所示的一样。

§ 3-5 楔形体受重力和液体压力

设有楔形体, 图 3-7a, 左面铅直, 右面与铅直面成角 α , 下端作为无限长, 承受重力及液体压力, 楔形体的密度为 ρ , 液体的密度为 γ , 试求应力分量。

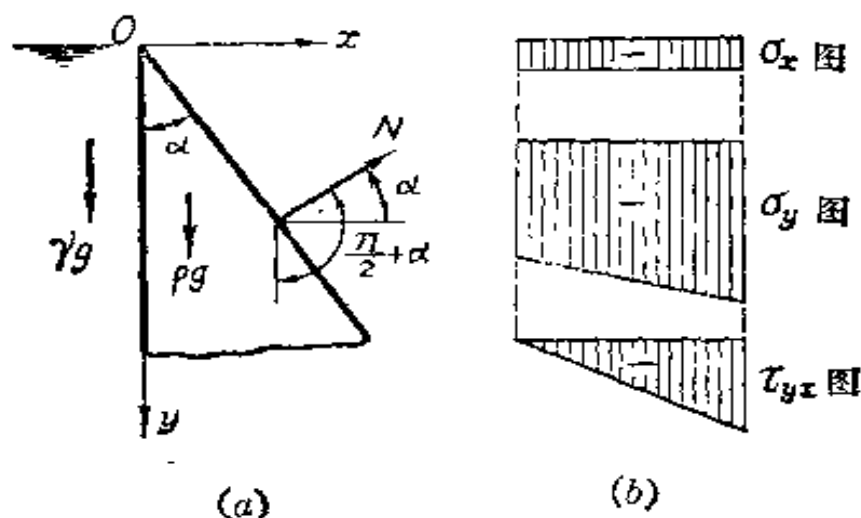


图 3-7

取坐标轴如图所示。在楔形体的任意一点, 每一个应力分量都是由两部分组成的: 第一部分由重力引起, 应当与 ρg 成正比, g 是重力加速度; 第二部分由液体压力引起, 应当与 γg 成正比。当然, 上述每一部分还与 α , x , y 有关。由于应力的因次是 [力][长度]⁻², ρg 和 γg 的因次是 [力][长度]⁻³, α 是无因次的数量, 而 x 和 y 的因次是 [长度], 因此, 如果应力分量具有多项式的解答, 那么, 它们的表达式只可能是 $A\rho gx$, $B\rho gy$, $C\gamma gx$, $D\gamma gy$ 四种项的组合, 而其中的 A , B , C , D 是无因次的数量, 只与 α 有关。这就是说, 各应力

分量的表达式只可能是 x 和 y 的纯一次式, 而应力函数(它对坐标的二阶导数给出应力分量) 应该是 x 和 y 的纯三次式。因此, 假设

$$\varphi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

注意, 在这里, 体力分量 $X=0$ 而 $Y=\rho g$, 于是由公式(2-18)得应力分量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - Xx = 2cx + 6dy, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - Yy = 6ax + 2by - \rho gy, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -2bx - 2cy. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

这些应力分量是满足平衡微分方程和相容方程的, 现在来考察, 如果适当选择各个系数, 是否也能满足应力边界条件。

在左面($x=0$), 应力边界条件是

$$(\sigma_x)_{x=0} = -\gamma gy, \quad (\tau_{xy})_{x=0} = 0.$$

将式(a)代入, 得

$$6dy = -\gamma gy, \quad -2cy = 0,$$

要求 $d = -\frac{\gamma g}{6}$, $c = 0$. 而式(a)成为

$$\sigma_x = -\gamma gy, \quad \sigma_y = 6ax + 2by - \rho gy, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -2bx. \quad (b)$$

在右面($x=y \operatorname{tg} \alpha$), $\bar{X}=\bar{Y}=0$, 应力边界条件是

$$l(\sigma_x)_{x=y \operatorname{tg} \alpha} + m(\tau_{xy})_{x=y \operatorname{tg} \alpha} = 0,$$

$$m(\sigma_y)_{x=y \operatorname{tg} \alpha} + l(\tau_{xy})_{x=y \operatorname{tg} \alpha} = 0.$$

将式(b)代入, 得

$$\left. \begin{aligned} l(-\gamma gy) + m(-2by \operatorname{tg} \alpha) &= 0 \\ m(6ay \operatorname{tg} \alpha + 2by - \rho gy) + l(-2by \operatorname{tg} \alpha) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

但由图可见

$$l = \cos(N, x) = \cos \alpha,$$

$$m = \cos(N, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha.$$

代入式(c), 求解 b 和 a , 即得

$$b = \frac{\gamma g}{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad a = \frac{\rho g}{6} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\gamma g}{3} \operatorname{ctg}^3 \alpha.$$

将这些系数代入式(b), 得李维解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\gamma g y, \\ \sigma_y &= (\rho g \operatorname{ctg} \alpha - 2\gamma g \operatorname{ctg}^3 \alpha)x - (\gamma g \operatorname{ctg}^2 \alpha - \rho g)y, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\gamma g x \operatorname{ctg}^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

各应力分量沿水平方向的变化如图 3-7b 所示。

应力分量 σ_x 沿水平方向没有变化, 这个结果是不能由材料力学公式求得的。应力分量 σ_y 沿水平方向按直线变化, 在左面和右面, 它分别为

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{x=0} &= -(\rho g - \gamma g \operatorname{ctg}^2 \alpha)y, \\ (\sigma_y)_{x=y \operatorname{ctg} \alpha} &= -\gamma g y \operatorname{ctg}^2 \alpha, \end{aligned}$$

与用材料力学里偏心受压公式算得的结果相同。应力分量 τ_{yx} 也按直线变化, 在左面和右面分别为

$$\begin{aligned} (\tau_{yx})_{x=0} &= 0, \\ (\tau_{yx})_{x=y \operatorname{ctg} \alpha} &= -\gamma g y \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

按照材料力学, τ_{yx} 按抛物线变化, 与正确解答不同。

以上所得的解答, 一向被当作是三角形重力坝中应力的基本解答。但是, 必须指出下列三点:

(1) 沿着坝轴, 坝身往往具有不同的截面, 而且坝身也不是无限长, 因此, 严格地说来, 这里不是一个平面问题。但是, 如果沿着坝轴, 有一些伸缩缝把坝身分成若干段, 在每一段范围内, 坝身的截面可以当作没有变化, 而且 τ_{zx} 和 τ_{zy} 可以当作等于零, 那么, 在计算时是可以把这个问题当作平面问题的。

(2) 这里假定楔形体在下端是无限长, 可以自由地变形。但是, 实际上坝身是有限高的, 底部与地基相连, 坝身底部的形变受到地基的约束, 因此对于底部来说, 以上所得的解答是不精确的。

(3) 坝顶总具有一定的宽度, 而不会是一个尖顶, 而且顶部通常还受有其他的荷载, 因此, 在靠近坝顶处, 以上所得的解答也不适用。

关于重力坝的较精确的应力分析, 目前大都采用有限单元法来进行。

§ 3-6 斜面上的应力、主应力

在平面问题中, 如果已知任一点 P 处的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, 图 3-8, 就可以求得经过该点的、平行于 z 轴而倾斜于 x 轴和 y 轴的任何斜面上的应力。为此, 在 P 点附近取一个平面 AB , 它平行于上述斜面, 并与经过 P 点而垂直于 x 轴和 y 轴的两个平面划出一个很小的三角板或三棱柱 PAB 。当平面 AB 趋近于 P 点时, 平面 AB 上的应力就成为上述斜面上的应力。

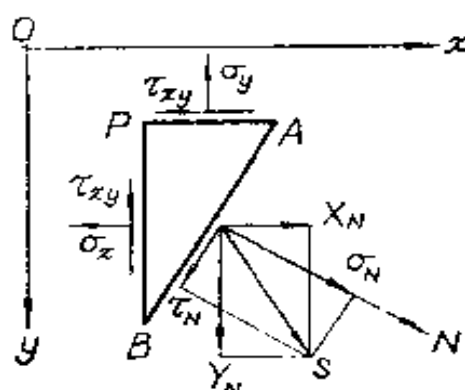


图 3-8

用 N 代表斜面 AB 的外法线方向, 其方向余弦为

$$\cos(N, x) = l,$$

$$\cos(N, y) = m,$$

并用 X_N 及 Y_N 代表斜面 AB 上的应力 s 在 x 轴及 y 轴上的投影,

图 3-8。和 § 2-5 中一样, 可以由 PAB 的平衡条件得到

$$\left. \begin{aligned} X_N &= l\sigma_x + m\tau_{xy}, \\ Y_N &= m\sigma_y + l\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

命斜面 AB 上的正应力为 σ_N , 则由投影可得

$$\sigma_N = lX_N + mY_N.$$

将式(3-8)代入, 即得

$$\sigma_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy}. \quad (3-9)$$

命斜面 AB 上的剪应力为 τ_N , 则由投影可得

$$\tau_N = mX_N - lY_N.$$

将式(3-8)代入, 即得

$$\tau_N = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy}. \quad (3-10)$$

由公式 (3-9)、(3-10) 可见, 如果已知 P 点处的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} , 就可以求得经过 P 点的任一斜面上的正应力 σ_N 及剪应力 τ_N 。

设经过 P 点的某一斜面上的剪应力等于零, 则该斜面上的正应力称为在 P 点的一个主应力, 而该斜面称为在 P 点的一个应力主面, 该斜面的法线方向(即主应力的方向)称为在 P 点的一个应力主向。

现在假定在 P 点有一个应力主面存在。这样, 由于该面上的剪应力等于零, 该面上的全应力就等于该面上的正应力, 也就等于主应力 σ 。于是该面上的全应力在坐标轴上的投影成为

$$X_N = l\sigma, \quad Y_N = m\sigma.$$

将式(3-8)代入, 即得

$$l\sigma_x + m\tau_{xy} = l\sigma, \quad m\sigma_y + l\tau_{xy} = m\sigma.$$

由两式分别解出比值 m/l , 得到

$$\frac{m}{l} = \frac{\sigma - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad \frac{m}{l} = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma - \sigma_y}. \quad (a)$$

由于上列两式的等号左边都是 $\frac{m}{l}$, 因而它们的等号右边也应相等,

于是得 σ 的二次方程

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + (\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0,$$

从而求得两个主应力为

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (3-11)$$

由于根号内的数值(两个数的平方之和)总是正的, 所以 σ_1 和 σ_2 这两个根都是实根。此外, 由式(3-11)极易看出下列关系式成立:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y. \quad (3-12)$$

下面来求出主应力的方向, 即应力主向。设 σ_1 与 x 轴的夹角为 α_1 , 则

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha_1)}{\cos \alpha_1} = \frac{m_1}{l_1}.$$

利用(a)中的第一式, 即得

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad (3-13)$$

设 σ_2 与 x 轴的夹角为 α_2 , 则

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha_2)}{\cos \alpha_2} = \frac{m_2}{l_2}.$$

利用(a)中的第二式, 即得

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}.$$

再利用由式(3-12)得来的 $\sigma_2 - \sigma_y = -(\sigma_1 - \sigma_x)$, 可见有

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_x}. \quad (3-14)$$

于是由式(3-13)及(3-14)可见有 $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$, 也就是说, σ_1 的方向与 σ_2 的方向互相垂直。

如果已经求得任一点的两个主应力 σ_1 和 σ_2 , 以及与之对应

的应力主向,就极易求得这一点的最大与最小的应力。为了简便,将 x 轴和 y 轴分别放在 σ_1 和 σ_2 的方向,于是有

$$\tau_{xy} = 0, \sigma_x = \sigma_1, \sigma_y = \sigma_2. \quad (b)$$

首先来求出最大与最小的正应力。由式(3-9)及式(b)有,

$$\sigma_N = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2.$$

用关系式 $l^2 + m^2 = 1$ 消去 m^2 , 得到

$$\sigma_N = l^2 \sigma_1 + (1 - l^2) \sigma_2 = l^2 (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2.$$

因为 l^2 的最大值为 1 而最小值为零, 所以 σ_N 的最大值为 σ_1 而最小值为 σ_2 。这就是说, 两个主应力也就是最大与最小的正应力。

其次来求出最大与最小的剪应力。按照式(3-10)及式(b), 任一斜面上的剪应力为

$$\tau_N = lm (\sigma_2 - \sigma_1).$$

由关系式 $l^2 + m^2 = 1$, 得 $m = \pm \sqrt{1 - l^2}$, 从而得出

$$\begin{aligned} \tau_N &= \pm l \sqrt{1 - l^2} (\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \sqrt{l^2 - l^4} (\sigma_2 - \sigma_1) \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - l^2\right)^2} (\sigma_2 - \sigma_1). \end{aligned}$$

由上式可见, 当 $\frac{1}{2} - l^2 = 0$ 时 τ_N 为最大或最小, 于是得 $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$,

而最大与最小的剪应力为 $\pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, 发生在与 x 轴(即应力主向)成 45° 的斜面上。

§ 3-7 斜向上的应变

在平面问题中, 如果已知任一点 P 处的应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$, 就可以求得经过该点的、在 xy 面内的任何斜向微小线段 PV 的正应变、以及任何两个斜向微小线段 PV 和 PV' 之间夹角的改变, 图 3-9。命 P 点的坐标为 (x, y) , N 点的坐标为 $(x + dx, y + dy)$, PV 的长度为 dr , PV 的方向余弦为

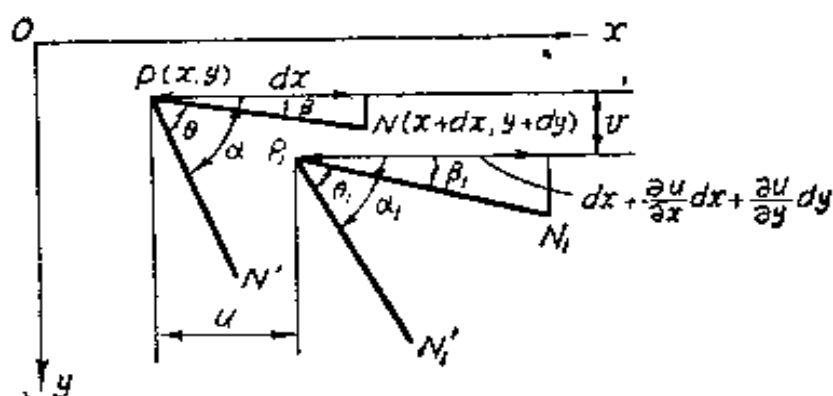


图 3-9

$$\cos(PN, x) = l, \cos(PN, y) = m,$$

于是 PN 在坐标轴上的投影为

$$dx = l dr, dy = m dr. \quad (a)$$

设 P 点的位移分量为 u, v , 则 N 点的位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u_N = u + du &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ v_N = v + dv &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

在变形之后, 线段 PN 移动到 P_1N_1 , 它在坐标轴上的投影成为

$$\left. \begin{aligned} dx + u_N - u &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \\ dy + v_N - v &= dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

命线段 PN 的正应变为 ϵ_N , 则该线段在变形之后的长度为 $dr + \epsilon_N dr$, 而这一长度的平方就等于式 (c) 中的两个投影的平方之和:

$$\begin{aligned} (dr + \epsilon_N dr)^2 &= \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right)^2 \\ &\quad + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)^2. \end{aligned}$$

除以 $(dr)^2$ 并应用式 (a), 得

$$(1 + \varepsilon_N)^2 = \left[l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 + \left[l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]^2.$$

因为 ε_N 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 都是微小的, 它们的乘方或乘积都可以不计, 所以上式可以简化为

$$1 + 2\varepsilon_N = l^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2lm \frac{\partial u}{\partial y} + m^2 \left(1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2lm \frac{\partial v}{\partial x}.$$

注意到 $l^2 + m^2 = 1$, 可以由上式得出

$$\varepsilon_N = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + lm \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (d)$$

再应用式(2-3), 即由式(d)得

$$\varepsilon_N = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + lm \gamma_{xy}. \quad (3-15)$$

现在来求线段 PN 和 PN' 的夹角的改变。在变形之后, 线段 PN 成为 P_1N_1 , 而它的方向余弦成为

$$l_1 = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy}{dr(1 + \varepsilon_N)},$$

$$m_1 = \frac{dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy}{dr(1 + \varepsilon_N)}.$$

运用式(a), 并注意 ε_N 是微量, 可以略去高价微量而取 $\frac{1}{1 + \varepsilon_N} = 1 - \varepsilon_N$, 则由以上两式可得

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= l \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_N \right) + m \frac{\partial u}{\partial y}, \\ m_1 &= m \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_N \right) + l \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

同样, 设线段 PN' 在变形之前的方向余弦是 l', m' , 在变形之后, 线段 PN' 成为 $P_1N'_1$, 而它的方向余弦成为

$$\left. \begin{aligned} l'_1 &= l' \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{N'} \right) + m' \frac{\partial u}{\partial y}, \\ m'_1 &= m' \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_{N'} \right) + l' \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

其中 $\varepsilon_{N'}$ 是线段 PN' 的正应变。

命线段 PN 和 PN' 在变形前后的夹角分别为 θ 及 θ_1 , 由图 3-9 可见

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= l' l + m' m, \\ \cos \theta_1 &= \cos(\alpha_1 - \beta_1) = \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \\ &= l'_1 l_1 + m'_1 m_1. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

将式(e)和式(f)代入(g)中的第二式, 并略去高阶微量, 即得

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= (ll' + mm')(1 - \varepsilon_N - \varepsilon_{N'}) + 2 \left(ll' \frac{\partial u}{\partial x} + mm' \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &\quad + (lm' + l'm) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

应用式(2-3), 并注意(g)中的第一式, 则上式成为

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \cos \theta (1 - \varepsilon_N - \varepsilon_{N'}) + 2(ll' \varepsilon_x + mm' \varepsilon_y) \\ &\quad + (lm' + l'm) \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (3-16)$$

由此求出 θ_1 以后, 即可求得 PN 和 PN' 之间的夹角的改变 $\theta_1 - \theta$.

公式(3-15)可用来由一点的应变分量计算该点任何斜向的正应变。反之, 假若已经知道一点任何三个斜向的正应变, 也可利用式(3-15)来计算形变分量。命该三个斜向的方向余弦分别为 $l_1, m_1, l_2, m_2, l_3, m_3$, 三个斜向的正应变分别为 $\varepsilon_{N_1}, \varepsilon_{N_2}$ 和 ε_{N_3} , 则由式(3-15)可建立下列三式:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= l_1^2 \varepsilon_x + m_1^2 \varepsilon_y + l_1 m_1 \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_{x_2} &= l_2^2 \varepsilon_x + m_2^2 \varepsilon_y + l_2 m_2 \gamma_{xy}, \\ \varepsilon_{x_3} &= l_3^2 \varepsilon_x + m_3^2 \varepsilon_y + l_3 m_3 \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

由此可以求解 ε_x , ε_y 和 γ_{xy} 。

在实验应力分析中, 经常用量测的办法得到 x 轴方向, y 轴方向, 以及与该二轴成 45° 方向的正应变, 这时

$$l_1 = 1, m_1 = 0; l_2 = 0, m_2 = 1; l_3 = m_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

代入式(3-17), 即可解得

$$\varepsilon_x = \varepsilon_N, \varepsilon_y = \varepsilon_N, \gamma_{xy} = 2\varepsilon_N - \varepsilon_N - \varepsilon_N,$$

从而用物理方程求得应力分量。

习 题

3-1. 试考察应力函数 $\varphi = ay^3$ 在图 3-10 所示矩形板和坐标系中能解决什么问题(体力不计)。

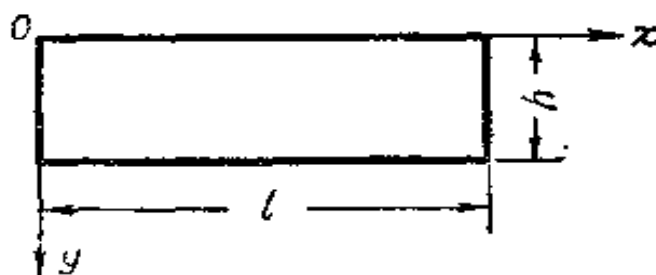


图 3-10

3-2. 试证 $\varphi = \frac{qx^2}{4} \left(-4\frac{y^3}{h^3} + 3\frac{y}{h} - 1 \right) + \frac{qy^2}{10} \left(2\frac{y^3}{h^3} - \frac{y}{h} \right)$ 是一个应力函数, 并考察它在图 3-2 所示矩形板和坐标系中能解决什么问题(设矩形板的长度为 l , 深度为 h , 体力不计)。

答案: 能解决悬臂梁在上边界受均布荷载 q 的问题。

3-3. 设图 3-5 中的简支梁只受重力作用, 而梁的密度为 ρ , 试用 § 3-4 中的应力函数(e)求解应力分量, 并画出截面上的应力分布图。

答案: $\sigma_x = \frac{M}{I}y + \rho gy \left(4\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right)$, $\sigma_y = \frac{\rho g}{2}y \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2} \right)$, $\tau_{xy} = \frac{QS}{bI}$, 其中 $M = \rho gh(l^2 - x^2)/2$, $Q = -\rho ghx$.

3-4. 设有矩形截面的竖柱, 密度为 ρ , 在一边侧面上受均布剪力 q , 图 3-11, 试求应力分量(体力不计)。

提示: 可假设 $\sigma_x = 0$, 或假设 $\tau_{xy} = f(x)$, 或假设 σ_y 如材料力学中偏心受压公式所示。上端边界条件如不能精确满足, 可应用圣维南原理。

答案: $\sigma_x = 0, \sigma_y = 2q \frac{y}{h} \left(1 - 3\frac{x}{h}\right) - \rho g y, \tau_{xy} = q \frac{x}{h} \left(3\frac{x}{h} - 2\right).$

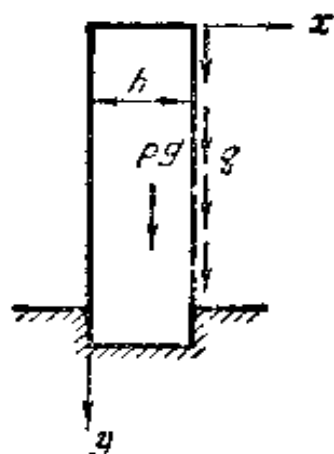


图 3-11

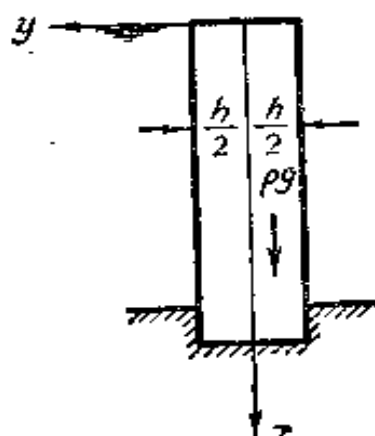


图 3-12

3-5. 挡水墙的密度为 ρ , 厚度为 h , 图 3-12, 水的密度为 γ , 试求应力分量。

提示: 可假设 $\sigma_x = x f(y)$ 。上端的边界条件如不能精确满足, 可应用圣维南原理, 求出近似的解答。

答案: $\sigma_x = \frac{2\gamma g}{h^3} x^3 y + \frac{3\gamma g}{5h} xy - \frac{4\gamma g}{h^3} xy^3 - \rho g x,$

$$\sigma_y = \gamma g x \left(2\frac{y^3}{h^3} - \frac{3y}{2h} - \frac{1}{2}\right),$$

$$\tau_{xy} = -\gamma g x^2 \left(3\frac{y^2}{h^3} - \frac{3}{4h}\right) - \gamma g y \left(-\frac{y^3}{h^3} + \frac{3y}{10h} - \frac{h}{80y}\right).$$

3-6. 设图 3-13 中的三角形悬臂梁只受重力作用, 而梁的密度为 ρ , 试

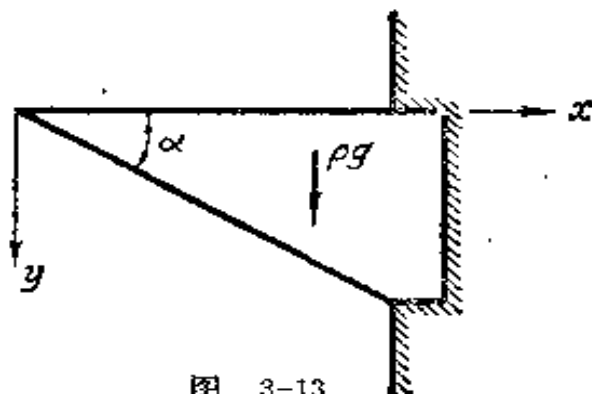


图 3-13

用纯三次式的应力函数求解。

答案: $\sigma_x = \rho g x \operatorname{ctg} \alpha - 2 \rho g y \operatorname{ctg} \alpha$, $\sigma_y = -\rho g y$,

$\tau_{xy} = -\rho g y \operatorname{ctg} \alpha$ 。

3-7. 试证明: 在发生最大与最小剪应力的面上, 正应力的数值都等于两个主应力的平均值。

3-8. 设已求得一点的应力状态如下, 试求主应力与应力主向, 并作图表示之。

(a) $\sigma_x = 100$, $\sigma_y = 50$, $\tau_{xy} = 10\sqrt{50}$;

(b) $\sigma_x = 200$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = -400$;

(c) $\sigma_x = -2000$, $\sigma_y = 1000$, $\tau_{xy} = -400$;

(d) $\sigma_x = -1000$, $\sigma_y = -1500$, $\tau_{xy} = 500$ 。

答案: (a) 150, 0, $35^\circ 16'$; (b) 512, -312, $\pm 37^\circ 57'$;

(c) 1052, -2052, $-82^\circ 32'$; (d) -691, -1809, $31^\circ 43'$ 。

3-9. 设已测得一点的三个正应变为

(a) $\varepsilon_{0^\circ} = -270 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45^\circ} = -365 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{90^\circ} = -10 \times 10^{-6}$;

(b) $\varepsilon_{0^\circ} = -130 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{45^\circ} = 75 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{90^\circ} = 130 \times 10^{-6}$ 。

试求主应力与应力主向。材料的弹性常数为 $E = 2.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\mu = 0.3$ 。

答案: (a) 0, $-840 \times 10^4 \text{ N/m}^2$, 60° ; (b) $242.4 \times 10^4 \text{ N/m}^2$, $-242.4 \times 10^4 \text{ N/m}^2$, 74° 。

3-10. 设已测得一点的三个正应变 ε_{0° , ε_{60° , ε_{120° , 试导出计算应变分量的公式。

答案: $\varepsilon_x = \varepsilon_{0^\circ}$, $\varepsilon_y = \frac{1}{3}(2\varepsilon_{60^\circ} + 2\varepsilon_{120^\circ} - \varepsilon_{0^\circ})$,

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{60^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})。$$

第四章 平面问题的极坐标解答

§ 4-1 极坐标中的平衡微分方程

在求解平面问题时,对于圆形、楔形、扇形等形状物体,用极坐标求解比用直角坐标方便得多。在极坐标中,平面内任一点 P 的位置,用径向坐标 r 及环向坐标 θ 来表示,图 4-1。

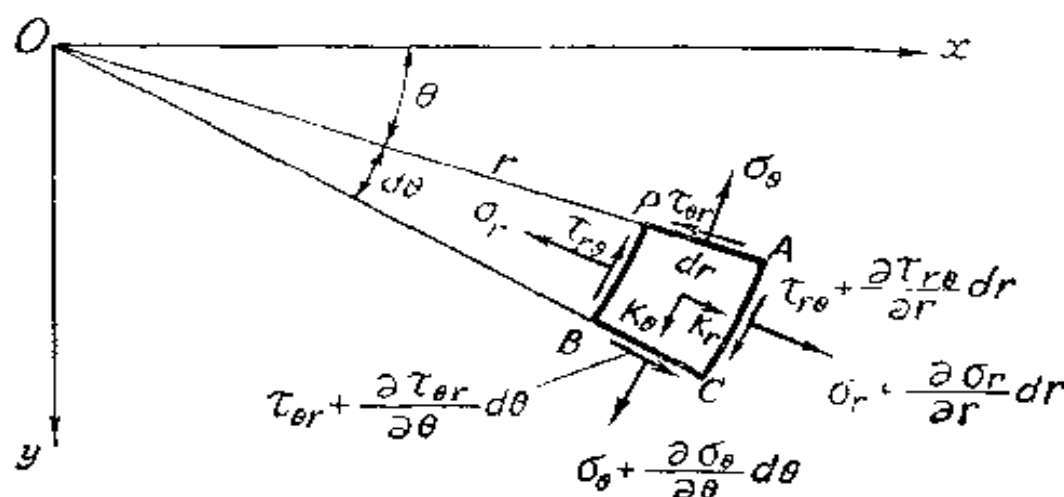


图 4-1

为了表明极坐标中的应力分量,从所考察的薄板或长柱形体取出微分体 $PACB$, 如图所示。沿 r 方向的正应力称为径向正应力,用 σ_r 代表;沿 θ 方向的正应力称为环向正应力或切向正应力,用 σ_θ 代表;剪应力用 $\tau_{r\theta}$ 及 $\tau_{\theta r}$ 代表(根据剪应力的互等性, $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$)。各应力分量的正负号规定和直角坐标中一样,只是 r 方向代替了 x 方向, θ 方向代替了 y 方向。图中所示的应力分量都是正的。径向及环向的体力分量分别用 K_r 及 K_θ 代表。

与直角坐标中相似,由于应力随坐标 r 的变化,设 PB 面上的

径向正应力为 σ_r , 则 AC 面上的将为 $\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr$; 同样, 这两个面上的剪应力分别为 $\tau_{r\theta}$ 及 $\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr$ 。 PA 及 BC 两个面上的环向正应力分别为 σ_θ 及 $\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta$; 这两个面上的剪应力分别为 $\tau_{\theta r}$ 及 $\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta$ 。

取微分体的厚度等于 1, 于是, PB 及 AC 两面的面积分别等于 $r d\theta$ 及 $(r + dr) d\theta$, PA 及 BC 两面的面积等于 dr , 微分体的体积等于 $r d\theta dr$ 。由于 $d\theta$ 是微小的, 可以取 $\sin \frac{d\theta}{2}$ 为 $\frac{d\theta}{2}$, 取 $\cos \frac{d\theta}{2}$ 为 1。

将微分体所受各力投影到微分体中心的径向轴上, 立出径向的平衡方程, 得

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} \\ & - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \tau_{\theta r} dr + K_r r d\theta dr \\ & = 0. \end{aligned}$$

用 $\tau_{r\theta}$ 代替 $\tau_{\theta r}$, 简化以后, 除以 $r d\theta dr$, 再略去微量, 得

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r = 0.$$

将所有各力投影到微分体中心的切向轴上, 立出切向的平衡方程, 得

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_\theta dr + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta \\ & - \tau_{r\theta} r d\theta + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + \tau_{\theta r} dr \frac{d\theta}{2} + K_\theta r d\theta dr = 0. \end{aligned}$$

用 $\tau_{r\theta}$ 代替 $\tau_{\theta r}$, 简化以后, 除以 $r d\theta dr$, 再略去微量, 得

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + K_{\theta} = 0.$$

如果列出该微分体的力矩平衡方程, 将得出 $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$, 只是又一次证明剪应力的互等性。

这样, 极坐标中的平衡微分方程就是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} + K_r &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + K_{\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

这两个平衡微分方程中包含着三个未知函数 σ_r , σ_{θ} 和 $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ 。为了求解问题, 还必须考虑形变和位移。

§ 4-2 极坐标中的几何方程与物理方程

在极坐标中, 用 ε_r 代表径向正应变(径向线段的正应变), 用 ε_{θ} 代表环向正应变(环向线段的正应变), 用 $\gamma_{r\theta}$ 代表剪应变(径向与环向两线段之间的直角的改变), 用 u_r 代表径向位移, 用 u_{θ} 代表环向位移。

现在来导出几何方程。在导出的过程中, 由于位移微小, 都不计高阶微量。

首先, 假定只有径向位移而没有环向位移, 图 4-2a。由于这个径向位移, 径向线段 PA 移到 $P'A'$, 环向线段 PB 移到 $P'B'$, 而 P 、 A 、 B 三点的位移分别为

$$PP' = u_r, \quad AA' = u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr, \quad BB' = u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta.$$

可见, 径向线段 PA 的正应变为

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{P'A' - PA}{PA} = \frac{AA' - PP'}{PA} \\ &= \frac{\left(u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r} dr\right) - u_r}{dr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\end{aligned}\quad (a)$$

环向线段 PB 的正应变为

$$\varepsilon_\theta = \frac{P'B' - PB}{PB} = \frac{(r + u_r)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad (b)$$

径向线段 PA 的转角为

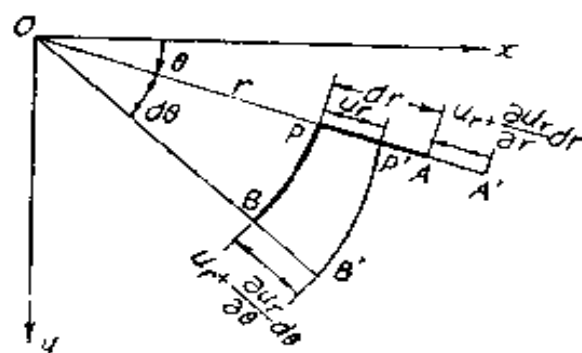
$$\alpha = 0, \quad (c)$$

环向线段 PB 的转角为

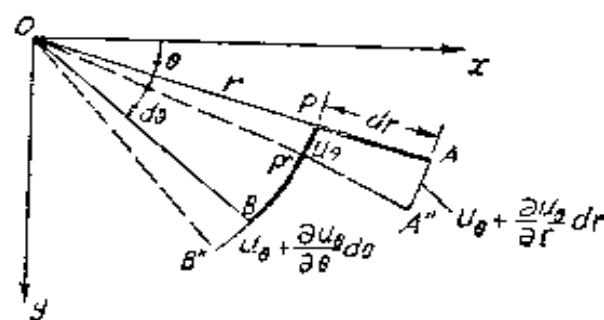
$$\beta = \frac{BB' - PP'}{PB} = \frac{\left(u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta\right) - u_r}{rd\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad (d)$$

剪应变为

$$\gamma_{r\theta} = \alpha + \beta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \quad (e)$$



(a)



(b)

图 4-2

其次, 假定只有环向位移而没有径向位移, 图 4-2b。由于这个环向位移, 径向线段 PA 移到 $P''A''$, 环向线段 PB 移到 $P''B''$, 而 P 、 A 、 B 三点的位移分别为

$$PP'' = u_\theta, \quad AA'' = u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr,$$

$$BB'' = u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta.$$

可见, 径向线段 PA 的正应变为

$$\varepsilon_r = 0, \quad (f)$$

环向线段 PB 的正应变为

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{P'B'' - PB}{PB} = \frac{BB'' - PP''}{PB} = \frac{\left(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} d\theta\right) - u_\theta}{rd\theta} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (g)$$

径向线段 PA 的转角为

$$\alpha = \frac{AA'' - PP''}{PA} = \frac{\left(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr\right) - u_\theta}{dr} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, \quad (h)$$

环向线段 PB 的转角为

$$\beta = -\angle POP'' = -\frac{PP''}{OP} = -\frac{u_\theta}{r}, \quad (i)$$

剪应变为

$$\gamma_{r\theta} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \quad (j)$$

因此, 如果沿径向和环向都有位移, 则由 (a)、(b)、(e) 三式与 (f)、(g)、(j) 三式的分别叠加而得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

这就是极坐标中的几何方程。

由于极坐标和直角坐标同样是正交坐标, 所以极坐标物理方

程与直角坐标物理方程具有同样的形式, 只是下标 x 和 y 分别更换为 r 和 θ 。据此, 在平面应力的情况下, 物理方程是

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

在平面应变的情况下, 须将上式中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, 而物理方程成为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_\theta \right), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_r \right), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

§ 4-3 极坐标中的应力函数与相容方程

和在直角坐标中相似, 当体力可以不计, 平衡微分方程 (4-1) 的通解可以用极坐标应力函数 $\varphi(r, \theta)$ 表示成为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, & \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

极易证明, 当 $K_r = K_\theta = 0$ 时, 这些应力分量确能满足平衡微分方程 (4-1)。

相容方程可以从直角坐标中的方程 (2-19) 得来。为此, 将方程 (2-19) 改写成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \varphi = 0. \quad (a)$$

极坐标与直角坐标之间的关系为

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x},$$

由此得

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

注意 φ 是 r 和 θ 的函数, 但同时也是 x 和 y 的函数, 可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta.$$

重复这个运算, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} \\ &\quad + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (b)$$

同样可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}. \end{aligned} \quad (c)$$

将式(b)与式(c)相加, 得到

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}. \quad (d)$$

代入式(a), 即得极坐标中用应力函数表示的相容方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \varphi = 0. \quad (4-6)$$

用极坐标求解平面问题时(假定体力可以不计), 就只须从微分方程(4-6)求解应力函数 $\varphi = \varphi(r, \theta)$, 然后按照公式(4-5)求出应力分量。当然, 这些应力分量在边界上应当满足应力边界条件; 在多连体中, 与这些应力分量相应的位移还须满足位移单值条件。和直角坐标一样, 通常只能采用逆解法或半逆解法。

§ 4-4 应力分量的坐标变换式

在一定的应力状态下, 如果已知极坐标中的应力分量, 就可以利用简单的关系式求得直角坐标中的应力分量。反之, 如果已知直角坐标中的应力分量, 也可以利用简单的关系式求得极坐标中的应力分量。表示两个坐标系中应力分量的关系式, 就称为应力分量的坐标变换式。

现在, 设已知极坐标中的应力分量 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$, 试求直角坐标中的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 。为此, 在弹性体中取微小的三角板 A , 图 4-3, 它的 ab 边是一个 x 面, ac 边及 bc 边分别为 r 面及 θ 面。命 ab 边的长度为 dy , 则 ac 边及 bc 边的长度分别为 $dy \cos \theta$ 及 $dy \sin \theta$ 。三角板的厚度仍然取为一个单位。

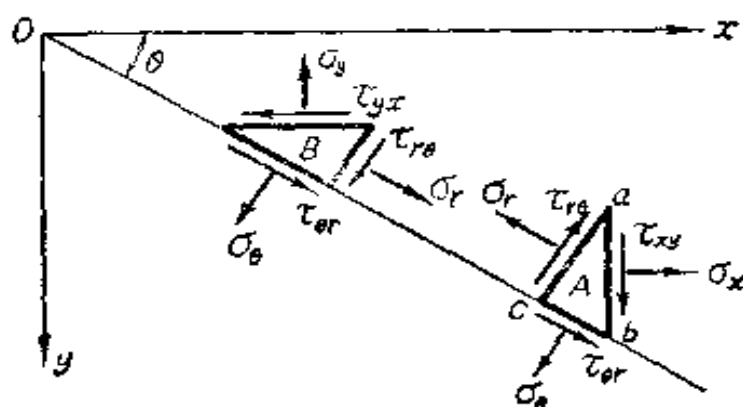


图 4-3

根据三角板 A 的平衡条件 $\sum F_x = 0$, 可以写出平衡方程

$$\begin{aligned} & \sigma_x dy \times 1 + \tau_{r\theta} dy \cos \theta \times 1 \times \sin \theta - \sigma_r dy \cos \theta \times 1 \times \cos \theta \\ & + \tau_{\theta r} dy \sin \theta \times 1 \times \cos \theta - \sigma_\theta dy \sin \theta \times 1 \times \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

用 $\tau_{r\theta}$ 代替 $\tau_{\theta r}$, 并进行简化, 就得到

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta. \quad (a)$$

同样可以由三角板 A 的平衡条件 $\Sigma F_y = 0$ 得到

$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (b)$$

另取微小的三角板 B , 如图所示, 根据它的平衡条件 $\Sigma F_y = 0$, 可以与上相似地得到

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta. \quad (c)$$

归并以上所得的结果, 就是应力分量由极坐标向直角坐标的坐标变换式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

利用简单的三角公式, 也可以将上式改写成为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

读者试导出应力分量由直角坐标向极坐标的坐标变换式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

也就是

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

§ 4-5 轴对称应力和相应的位移

现在, 用逆解法, 假设应力函数 φ 只是径向坐标 r 的函数, 即

$$\varphi = \varphi(r).$$

在这一特殊情况下, 公式(4-5)简化为

$$\sigma_r = -\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}, \quad \sigma_\theta = \frac{d^2\varphi}{dr^2}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0. \quad (4-9)$$

相容方程(4-6)简化为

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 \varphi = 0,$$

或将左边展开而得

$$\frac{d^4\varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (a)$$

为了求解这一常微分方程(尤拉方程), 可以引用变换式 $r = e^t$, 将它变换为常系数的常微分方程, 然后求解, 进行如下。

因为 $r = e^t$, 所以 $t = \ln r$, 于是有

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dt}.$$

类似可得

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

$$\frac{d^3\varphi}{dr^3} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{d^3\varphi}{dt^3} - 3 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} \right),$$

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} = \frac{1}{r^4} \left(\frac{d^4 \varphi}{dt^4} - 6 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + 11 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - 6 \frac{d \varphi}{dt} \right).$$

将以上四式代入式(a), 并乘以 r^4 , 得常系数常微分方程

$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + 4 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0. \quad (b)$$

它的特征方程 $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$ 有两对重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 以及 $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$ 。于是得方程(b)的通解为

$$\varphi = At + Bte^{2t} + Ce^{2t} + D.$$

注意 $t = \ln r$, 即得方程(a)的通解

$$\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D, \quad (4-10)$$

其中的 A, B, C, D 是任意常数。

将(4-10)代入公式(4-9), 得应力分量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C, \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C, \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

因为正应力分量只是 r 的函数, 不随 θ 而变, 而剪应力分量又不存在, 所以应力状态是对称于通过 z 轴的任一平面的, 也就是所谓绕 z 轴对称的。因此, 这种应力称为轴对称应力。

现在来考察与轴对称应力相对应的形变和位移。

对于平面应力的情况, 将应力分量的表达式(4-11)代入物理方程(4-3), 得形变分量

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \left[(1 + \mu) \frac{A}{r^2} + (1 - 3\mu) B \right. \\ &\quad \left. + 2(1 - \mu) B \ln r + 2(1 - \mu) C \right], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \left[-(1 + \mu) \frac{A}{r^2} + (3 - \mu) B \right. \end{aligned}$$

$$+ 2(1-\mu)B \ln r + 2(1-\mu)C \Big],$$

$$\nu_{r\theta} = 0.$$

可见, 形变也是绕 z 轴对称的。

将上面形变分量的表达式代入几何方程(4-2), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{E} \left[(1+\mu) \frac{A}{r^2} + (1-3\mu)B \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\mu)B \ln r - 2(1-\mu)C \right], \\ \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} \left[-(1+\mu) \frac{A}{r^2} + (3-\mu)B \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\mu)B \ln r + 2(1-\mu)C \right], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

由(c)中第一式的积分得

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-(1+\mu) \frac{A}{r} + 2(1-\mu)Br (\ln r - 1) \right. \\ \left. + (1-3\mu)Br + 2(1-\mu)Cr \right] + f(\theta), \quad (d)$$

其中 $f(\theta)$ 是 θ 的任意函数。

其次, 由(c)中的第二式有

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{r}{E} \left[-(1+\mu) \frac{A}{r^2} + 2(1-\mu)B \ln r \right. \\ \left. + (3-\mu)B + 2(1-\mu)C \right] - u_r.$$

将式(d)代入, 得

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{4Br}{E} - f(\theta),$$

积分以后得

$$u_0 = \frac{4Br\theta}{E} - \int f(\theta)d\theta + f_1(r), \quad (e)$$

其中 $f_1(r)$ 是 r 的任意函数。再将(d)及(e)代入(c)中的第三式, 得

$$\frac{1}{r} \frac{df(\theta)}{d\theta} + \frac{df_1(r)}{dr} + \frac{1}{r} \int f(\theta)d\theta - \frac{f_1(r)}{r} = 0,$$

或分开变数而写成为

$$f_1(r) - r \frac{df_1(r)}{dr} = \frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta)d\theta.$$

这方程的左边只是 r 的函数, 而右边只是 θ 的函数, 因此, 只可能两边都等于同一常数 F 。于是有

$$f_1(r) - r \frac{df_1(r)}{dr} = F, \quad (f)$$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + \int f(\theta)d\theta = F. \quad (g)$$

式(f)的解答是

$$f_1(r) = Hr - F, \quad (h)$$

其中 H 是任意常数。式(g)可以变换为

$$\frac{d^2f(\theta)}{d\theta^2} + f(\theta) = 0,$$

而它的解答是

$$f(\theta) = I \cos \theta + K \sin \theta. \quad (i)$$

此外并可由式(g)得

$$\int f(\theta)d\theta = F - \frac{df(\theta)}{d\theta} = F + I \sin \theta - K \cos \theta. \quad (j)$$

将式(i)代入式(d), 并将式(j)及式(h)代入式(e), 得轴对称应力状态下的位移分量

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E} \left[-(1+\mu) \frac{A}{r} - 2(1-\mu) Br (\ln r - 1) \right. \\ &\quad \left. + (1-3\mu) Br + 2(1-\mu) Cr \right] \\ &\quad + I \cos \theta + K \sin \theta, \\ u_\theta &= \frac{4Br\theta}{E} + Hr - I \sin \theta + K \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

其中的 A, B, C, H, I, K 都是待定常数, 而常数 H, I, K 和 § 2-3 中的 ω, u_0, v_0 同样地代表刚体位移。

以上关于形变和位移的公式, 也可以应用于平面应变问题, 但须将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

§ 4-6 圆环或圆筒受均布压力。压力隧洞

设有圆环或圆筒, 内半径为 a , 外半径为 b , 受内压力 q_a 及外压力 q_b , 图 4-4a。显然, 应力分布应当是轴对称的。因此, 取应力分量表达式(4-11), 应当可以用边界条件和位移单值条件求出其中的任意常数 A, B, C 。

边界条件要求

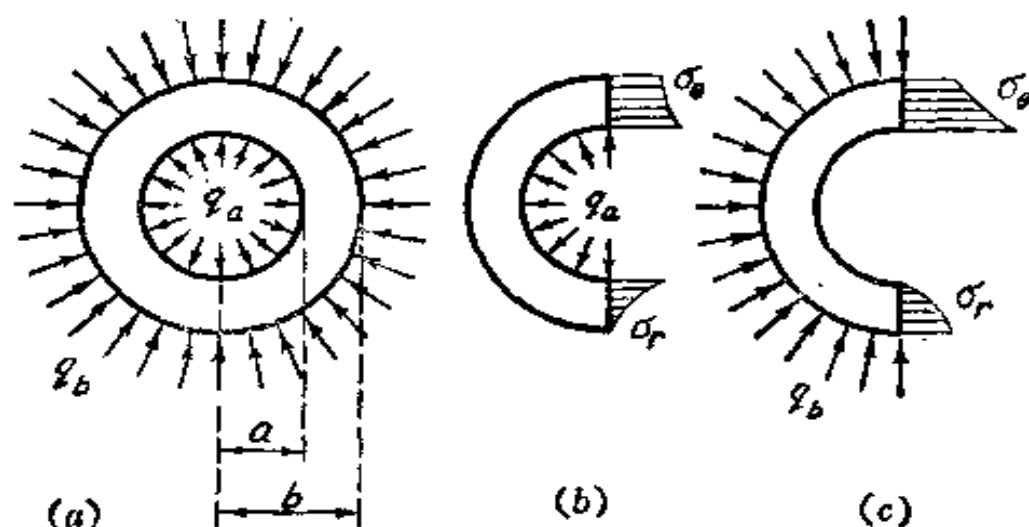


图 4-4

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{r\theta})_{r=a} &= 0, & (\tau_{r\theta})_{r=b} &= 0, \\ (\sigma_r)_{r=a} &= -q_a, & (\sigma_r)_{r=b} &= -q_b. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由表达式(4-11)可见, 前两个条件是满足的, 而后两个条件要求

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{a^2} + B(1 + 2 \ln a) + 2C &= -q_a, \\ \frac{A}{b^2} + B(1 + 2 \ln b) + 2C &= -q_b. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

现在, 边界条件都已满足, 但是两个方程不能决定三个常数 A 、 B 、 C 。因为这里讨论的是多连体, 所以我们来考察位移单值条件。

由(4-12)可见, 在环向位移 u_θ 的表达式中, $\frac{4Br\theta}{E}$ 一项是多值的: 对于同一个 r 值, 例如 $r=r_1$, 在 $\theta=\theta_1$ 时与 $\theta=\theta_1+2\pi$ 时, 环向位移相差 $\frac{8\pi Br_1}{E}$ 。在圆环或圆筒中, 这是不可能的, 因为 (r_1, θ_1) 与 $(r_1, \theta_1+2\pi)$ 是同一点, 不可能有不同的位移。于是可见必须 $B=0$ 。

令 $B=0$, 即可由式(b)求得 A 和 $2C$:

$$A = \frac{a^2 b^2 (q_b - q_a)}{b^2 - a^2}, \quad 2C = \frac{q_a a^2 - q_b b^2}{b^2 - a^2}.$$

代入公式(4-11), 稍加整理, 即得拉密的解答如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} q_a - \frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} q_b, \\ \sigma_\theta &= \frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} q_a - \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} q_b. \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

为明了起见, 试分别考察内压力或外压力单独作用时的情况。

如果只有内压力 q_a 作用, 则 $q_b=0$, 解答(4-13)简化为

$$\sigma_r = -\frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} q_a, \quad \sigma_\theta = \frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} q_a \quad (4-14)$$

可见, σ_r 总是压应力, σ_θ 总是拉应力。应力分布大致如图 4-4b 所示。

当圆筒的外半径趋于无限大时 ($b \rightarrow \infty$), 该圆筒成为具有圆形孔道的无限大弹性体, 而上列解答成为 $\sigma_r = -\frac{a^2}{r^2} q_a$, $\sigma_\theta = \frac{a^2}{r^2} q_a$ 。

可见应力与 $\left(\frac{a}{r}\right)^2$ 成正比。在 r 远大于 a 之处, 应力可以不计。这是可以从圣维南原理推出的结论。因为孔道中的内压力是一个平衡力系。

如果只有外压力 q_b 作用, 则 $q_a = 0$, 而解答 (4-13) 简化为

$$\sigma_r = -\frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} q_b, \quad \sigma_\theta = -\frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} q_b \quad (4-15)$$

可见, σ_r 和 σ_θ 都总是压应力。应力分布大致如图 4-4c 所示。

如果圆筒是埋在无限大弹性体中, 受有均布压力 q , 例如压力隧洞或坝内水管, 图 4-5, 则表达式 (4-11) 仍然适用, 因为应力分布仍然是轴对称的; 而且, 系数 B 仍然等于零, 因为位移仍然应当是单值的。不过, 因为圆筒和无限大弹性体

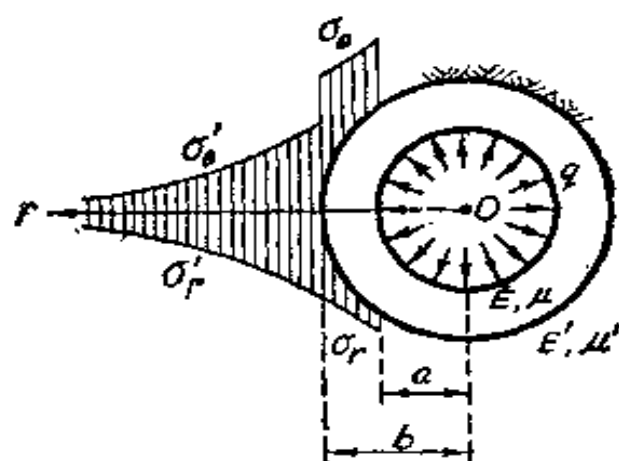


图 4-5

不一定具有相同的弹性常数, 所以两者的应力表达式中的系数 A 和 C 不一定相同。现在, 取圆筒的应力表达式为

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C; \quad (c)$$

取无限大弹性体的应力表达式为

$$\sigma'_r = \frac{A'}{r^2} + 2C', \quad \sigma'_\theta = -\frac{A'}{r^2} + 2C', \quad (d)$$

试建立四个方程来求解常数 A, C, A', C' 。

首先, 在圆筒的内面, 有边界条件 $(\sigma_r)_{r=a} = -q$, 由此得

$$\frac{A}{a^2} + 2C = -q. \quad (e)$$

其次, 在距离圆筒很远之处, 按照圣维南原理, 应当几乎没有应力, 于是有

$$(\sigma'_r)_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (\sigma'_\theta)_{r \rightarrow \infty} = 0.$$

由此得

$$2C' = 0. \quad (f)$$

再其次, 在圆筒和无限大弹性体的接触面上, 应当有

$$(\sigma_r)_{r=b} = (\sigma'_r)_{r=b}.$$

于是由式(c)、(d)及(f)得

$$\frac{A}{b^2} + 2C = \frac{A'}{b^2}. \quad (g)$$

上述条件仍然不足以确定四个常数, 下面来考虑位移。

应用(4-12)中的第一式, 并注意这里是平面应变问题, 而且 $B=0$, 可以写出圆筒和无限大弹性体的径向位移的表达式

$$u_r = \frac{1-\mu}{E} \left[-\left(1 - \frac{\mu}{1-\mu}\right) \frac{A}{r} + 2\left(1 - \frac{\mu}{1-\mu}\right) Cr \right] \\ + f \cos \theta + K \sin \theta,$$

$$u'_r = \frac{1-\mu'}{E'} \left[-\left(1 - \frac{\mu'}{1-\mu'}\right) \frac{A'}{r} + 2\left(1 - \frac{\mu'}{1-\mu'}\right) C' r \right]$$

$$+ I' \cos \theta + K' \sin \theta,$$

其中 E 和 μ 是圆筒的弹性常数, E' 和 μ' 是无限大弹性体的弹性常数。将上式稍加简化, 得

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1+\mu}{E} \left[2(1-2\mu)Cr - \frac{A}{r} \right] + I \cos \theta + K \sin \theta, \\ u_r' &= \frac{1+\mu'}{E'} \left[2(1-2\mu')C'r - \frac{A'}{r} \right] + I' \cos \theta + K' \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

在接触面上, 圆筒和无限大弹性体应当具有相同的位移, 因此有

$$(u_r)_{r=b} = (u_r')_{r=b}.$$

将式 (h) 代入, 得

$$\begin{aligned} & \frac{1+\mu}{E} \left[2(1-2\mu)Cb - \frac{A}{b} \right] + I \cos \theta + K \sin \theta \\ &= \frac{1+\mu'}{E'} \left[2(1-2\mu')C'b - \frac{A'}{b} \right] + I' \cos \theta + K' \sin \theta. \end{aligned}$$

因为这一方程在接触面上的任意一点都应当成立, 也就是在 θ 取任何数值时都应当成立, 所以方程两边与 θ 无关的项必须相等 (当然, 两边 $\cos \theta$ 的系数及 $\sin \theta$ 的系数也必须相等)。于是得

$$\frac{1+\mu}{E} \left[2(1-2\mu)Cb - \frac{A}{b} \right] = \frac{1+\mu'}{E'} \left[2(1-2\mu')C'b - \frac{A'}{b} \right].$$

经过简化并利用式 (f), 得

$$n \left[2C(1-2\mu) - \frac{A}{b^2} \right] + \frac{A'}{b^2} = 0, \quad (i)$$

其中

$$n = \frac{E'(1+\mu)}{E(1+\mu')}.$$

由方程 (e)、(g)、(i) 求出 A 、 C 、 A' , 然后代入式 (c) 及 (d), 得圆筒及无限大弹性体的应力分量表达式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= q \frac{\left[1 - (1-2\mu)n \right] \frac{b^2}{r^2} - (1-n)}{\left[1 + (1-2\mu)n \right] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)}, \\ \sigma_\theta &= q \frac{\left[1 + (1-2\mu)n \right] \frac{b^2}{r^2} + (1-n)}{\left[1 + (1-2\mu)n \right] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)}, \\ \sigma_r' &= -\sigma_\theta' = -q \frac{2(1-\mu)n \frac{b^2}{r^2}}{\left[1 + (1-2\mu)n \right] \frac{b^2}{a^2} - (1-n)} \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

当 $n < 1$ 时, 应力分布大致如图 4-5 所示。

这个问题是最简单的一个所谓接触问题, 即两个或两个以上不同弹性体互相接触的问题。在接触问题中, 通常都假定各弹性体在接触面上保持“完全接触”, 即, 既不互相脱离也不互相滑动。这样, 在接触面上就有应力和位移两方面的接触条件。应力方面的接触条件是: 两弹性体在接触面上的正应力相等, 剪应力也相等。位移方面的接触条件是: 两弹性体在接触面上的法向位移相等, 切向位移也相等。以前已经看到, 对平面问题说来, 在通常的边界面上, 有两个边界条件。现在看到, 在接触面上, 有四个接触条件, 条件并没有增多或减少, 因为接触面是两个弹性体的同样形状的边界。

光滑接触是“非完全接触”。在光滑接触面上, 也有四个接触条件: 两个弹性体的剪应力都等于零 (这是两个条件), 两个弹性体的正应力相等, 法向位移也相等 (由于有滑动, 切向位移并不相等)。

§ 4-7 圆孔的孔边应力集中

设受力的弹性体具有小孔, 则孔边的应力将远大于无孔时的

应力,也远大于距孔稍远处的应力。这种现象称为孔边应力集中。

孔边的应力集中,绝不是由于截面减小了一些而应力有所增大。即使截面比无孔时只减小了百分之几或千分之几,应力也会集中到若干倍。而且,对于同样形状的孔说来,集中的倍数几乎与孔的大小无关。实际上是,由于孔的存在,孔附近的应力状态与形变状态完全改观。

孔边应力集中是局部现象。在几倍孔径以外,应力几乎不受孔的影响,应力的分布情况以及数值的大小都几乎与无孔时相同。一般说来,集中的程度越高,集中的现象越是局部性的,也就是,应力随着距孔的距离增大而更快地趋近于无孔时的应力。

应力集中的程度,首先是与孔的形状有关。一般说来,圆孔孔边的集中程度最低。因此,如果有必要在构件中挖孔或留孔,应当尽可能地用圆孔代替其它形状的孔。如果不可能采用圆孔,也应当采用近似于圆形的孔(例如椭圆孔),以代替具有尖角的孔。

因为只有圆孔孔边的应力可以用较简单的数学工具进行分析,所以这里只以圆孔为例,简略讨论孔边应力集中的问题。

首先,设有矩形薄板(或长柱)在离开边界较远处有半径为 a 的小圆孔,在四边受均布拉力,集度为 q ,图4-6a。坐标原点取在圆孔的中心,坐标轴平行于边界。

就直边的边界条件而论,宜用直角坐标;就圆孔的边界条件而论,宜用极坐标。因为这里主要是考察圆孔附近的应力,所以用极坐标求解,而首先将直边变换为圆边。为此,以远大于 a 的某一长度 b 为半径,以坐标原点为圆心,作一个大圆,如图中虚线所示。由应力集中的局部性可见,在大圆周处,例如在 A 点,应力情况与无孔时相同,也就是, $\sigma_x = q$, $\sigma_y = q$, $\tau_{xy} = 0$ 。代入坐标变换式(1-8),得到该处的极坐标应力分量为 $\sigma_r = q$, $\tau_{r\theta} = 0$ 。于是,原来的问题变换为这样一个新问题:内半径为 a 而外半径为 b 的圆环或圆筒,

在外边界上受均布拉力 q 。

为了得出这个新问题的解答, 只须在圆环(或圆筒)受压力时的解答(4-15)中命 $-q_b = q$ 。于是得

$$\sigma_r = q \frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad \sigma_\theta = q \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0.$$

既然 b 远大于 a , 可以取 $\frac{a}{b} = 0$, 从而得到解答

$$\sigma_r = q \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = q \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0. \quad (4-17)$$

其次, 设该矩形薄板(或长柱)在左右两边受有均布拉力 q 而在上下两边受有均布压力 q , 图 4-6b。进行与上相同的处理和分析, 可见在大圆周处, 例如在 A 点, 应力情况与无孔时相同, 也就是 $\sigma_x = q, \sigma_y = -q, \tau_{xy} = 0$ 。利用坐标变换式(4-8), 可得

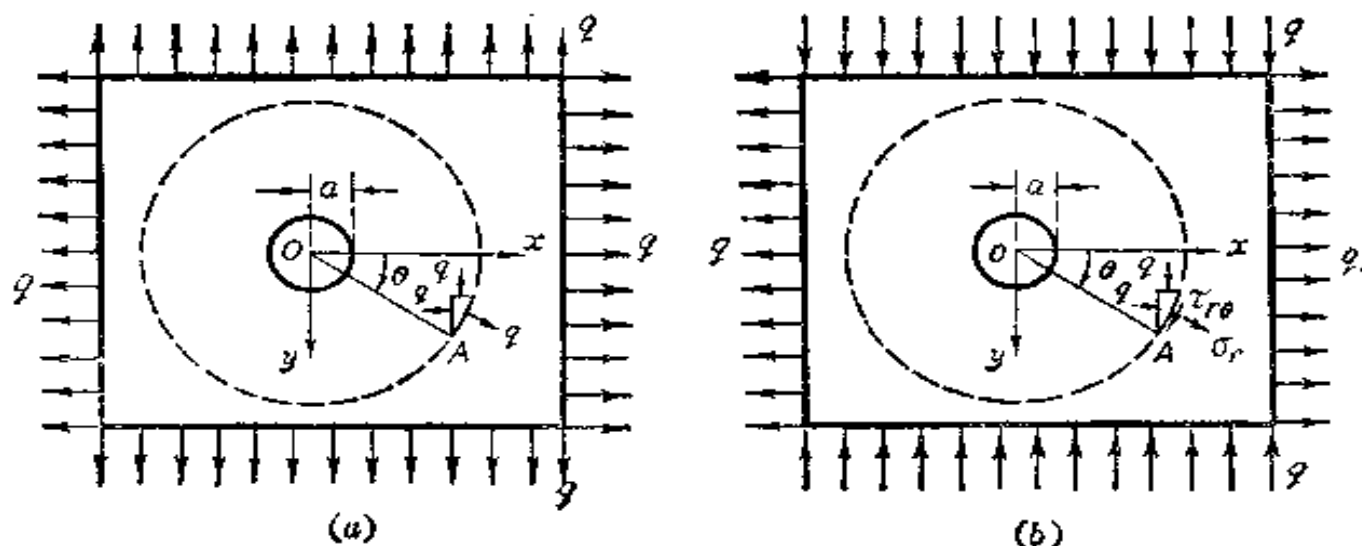


图 4-6

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{r=b} &= q \cos^2 \theta - q \sin^2 \theta = q \cos 2\theta, \\ (\tau_{r\theta})_{r=b} &= -2q \sin \theta \cos \theta = -q \sin 2\theta, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

而这也正是圆环(或圆筒)的外边界上的边界条件。

在孔边, 边界条件是

$$(\sigma_r)_{r=a}=0, (\tau_{r\theta})_{r=a}=0. \quad (b)$$

由边界条件(a)和(b)可见, 用半逆解法时, 可以假设 σ_r 为 r 的某一函数乘以 $\cos 2\theta$, 而 $\tau_{r\theta}$ 为 r 的另一函数乘以 $\sin 2\theta$ 。但

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}, \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right),$$

因此可以假设

$$\varphi = f(r) \cos 2\theta. \quad (c)$$

将式(c)代入相容方程(4-6), 得

$$\cos 2\theta \left[\frac{d^4 f(r)}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f(r)}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{df(r)}{dr} \right] = 0.$$

删去因子 $\cos 2\theta$ 以后, 求解这个常微分方程(仍是尤拉方程), 得

$$f(r) = Ar^4 + Br^2 + C + \frac{D}{r^2},$$

其中 A, B, C, D 为任意常数。代入式(c), 得应力函数

$$\varphi = \cos 2\theta \left(Ar^4 + Br^2 + C + \frac{D}{r^2} \right),$$

从而由公式(4-5)得应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\cos 2\theta \left(2B + \frac{4C}{r^2} + \frac{6D}{r^4} \right), \\ \sigma_\theta &= \cos 2\theta \left(12Ar^2 + 2B - \frac{6D}{r^4} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \sin 2\theta \left(6Ar^2 + 2B - \frac{2C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

将式(d)代入边界条件式(a)和(b), 得

$$2B + \frac{4C}{b^2} + \frac{6D}{b^4} = -q,$$

$$6Ab^2 - 2B - \frac{2C}{b^2} - \frac{6D}{b^4} = -q,$$

$$2B + \frac{4C}{a^2} + \frac{6D}{a^4} = 0,$$

$$6Aa^3 + 2B - \frac{2C}{a^2} - \frac{6D}{a^4} = 0.$$

求解 A, B, C, D , 然后取 $\frac{a}{b} \rightarrow 0$, 得

$$A=0, B=-\frac{q}{2}, C=qa^2, D=-\frac{qa^4}{2}.$$

再将各已知值代入式(d), 得应力分量的最后表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= q \cos 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - 3\frac{a^2}{r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= -q \cos 2\theta \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = -q \sin 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + 3\frac{a^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

如果该矩形薄板(或长柱)在左右两边受有均布拉力 q_1 , 在上下两边受有均布拉力 q_2 , 图 4-7 a, 可以将荷载分解为两部分: 第一部分是四边的均布拉力 $\frac{q_1+q_2}{2}$, 图 4-7 b, 第二部分是左右两边的均布拉力 $\frac{q_1-q_2}{2}$ 和上下两边的均布压力 $\frac{q_1-q_2}{2}$, 图 4-7 c。对于第一部分荷载, 可应用解答(4-17)而命 $q = \frac{q_1+q_2}{2}$; 对于第二部分荷载, 可应用解答(4-18)而命 $q = \frac{q_1-q_2}{2}$ 。将两部分解答叠加, 即

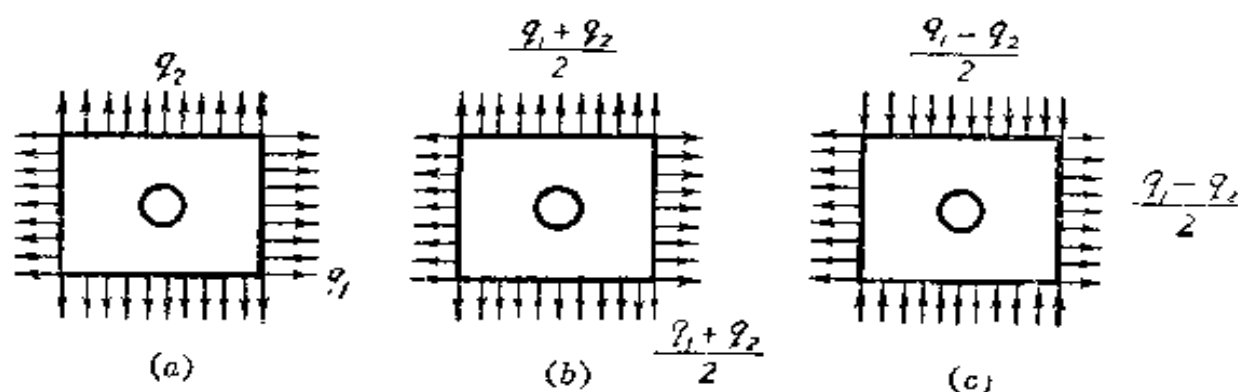


图 4-7

得原荷载作用下的应力分量。

例如, 设该矩形薄板(或长柱)只在左右两边受有均布拉力 q , 图 4-8, 则由上述叠加法得出齐尔西的解答:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{q}{2} \cos 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right), \\ \sigma_\theta &= -\frac{q}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{q}{2} \cos 2\theta \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right), \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= -\frac{q}{2} \sin 2\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

沿着孔边, $r=a$, 环向正应力是

$$\sigma_\theta = q(1 - 2 \cos 2\theta),$$

它的几个重要数值如下表所示。

θ	0°	30°	45°	60°	90°
σ_θ	$-q$	0	q	$2q$	$3q$

沿着 y 轴, $\theta=90^\circ$, 环向正应力是

$$\sigma_\theta = q \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \right).$$

它的几个重要数值如下表所示。

r	a	$2a$	$3a$	$4a$
σ_θ	$3q$	$1.22q$	$1.07q$	$1.04q$

可见应力在孔边达到原来的三倍并随着远离孔边而急剧趋近于 q , 图 4-8。

沿着 x 轴, $\theta=0^\circ$, 环向正应力是

$$\sigma_\theta = -\frac{q}{2} \frac{a^2}{r^2} \left(3 \frac{a^2}{r^2} - 1 \right).$$

在 $r=a$ 处, $\sigma_\theta = -q$; 在 $r=\sqrt{3}a$ 处, $\sigma_\theta = 0$, 如图 4-8 所示。在

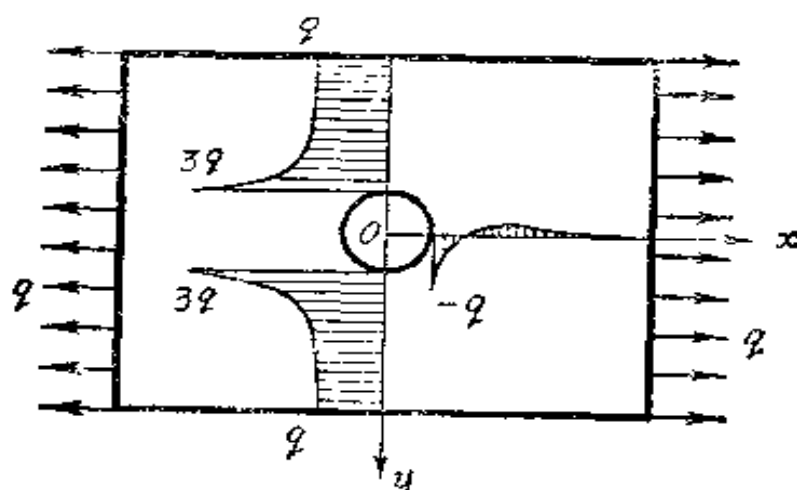


图 4-8

$r=a$ 与 $r=\sqrt{3}a$ 之间、压应力的合力为

$$P = \int_a^{\sqrt{3}a} (\sigma_r)_{\theta=90^\circ} dr = -0.1924qa.$$

显然, 当 q 为均布压力时, 在 $r=a$ 与 $r=\sqrt{3}a$ 之间将发生拉应力, 其合力为 $0.1924qa$ 。

以上导出的(4-17)和(4-18)两组解答, 是计算圆孔孔边应力的基本公式。从导出该两组解答的过程可以知道, 它们只是对于无限域中的小圆孔才是精确的。由于孔边应力集中的范围是极其局部的, 在实用上, 只要弹性体的边界离开圆孔的中心有足够的距离(例如三倍孔径左右), 应用这三式时就不会引起足资重视的误差。为了说明这一点, 可以考察在单向受均布拉力 q 的半无限大板中, 靠近边界处有一圆孔的情况, 图 4-9, 以及在单向受均布拉力 q 的有限宽板条中, 对称轴上有一圆孔的情况, 图 4-10。在这两种情况下, m 与 n 两点的水平正应力如下表所示(以 q 为单位)。由表可见, 对于 $\frac{d}{a} = 5$ 的情况(即边界离开圆孔中心为二倍半孔径), 与 $\frac{d}{a} = \infty$ (即为无限域)的情况, 孔边最大应力的相对差别仅

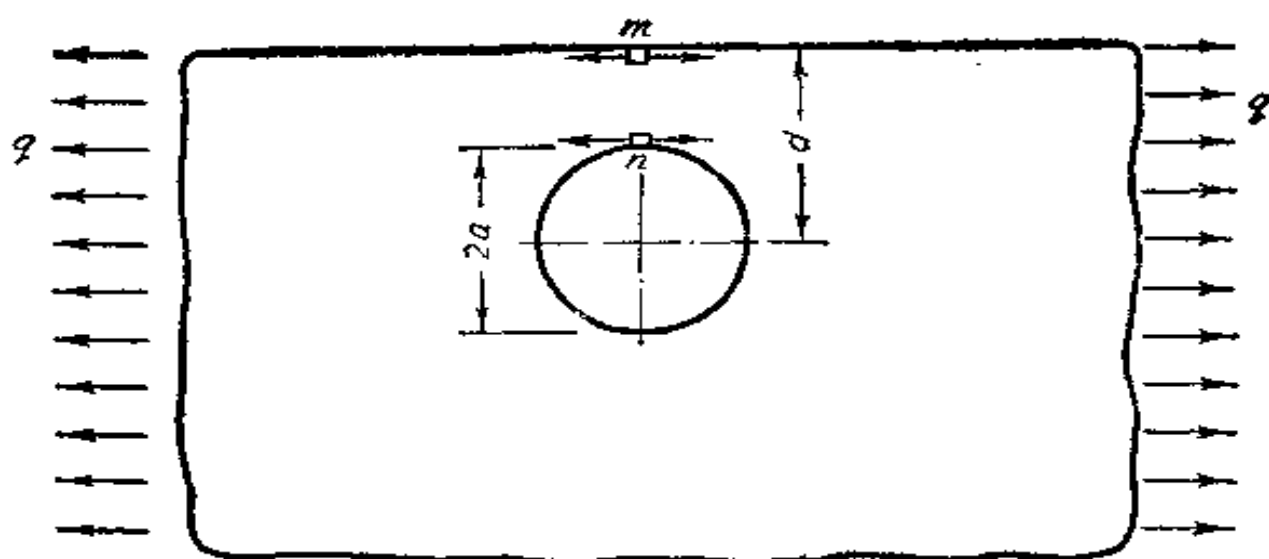


图 4-3

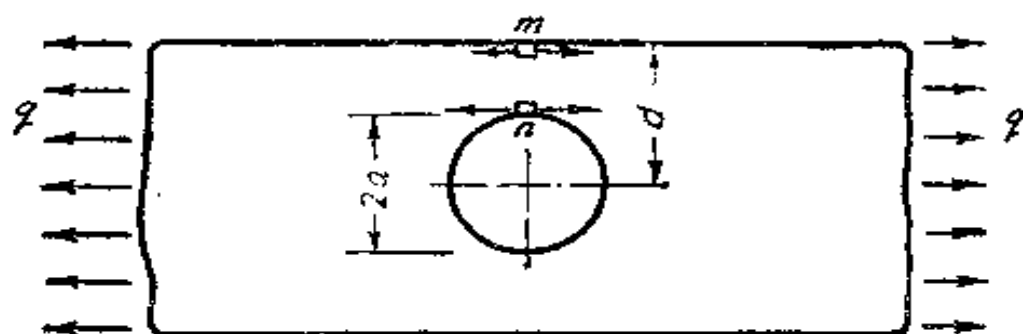


图 4-4

$\frac{d}{a}$		∞	10	5	2.5	2
半无限大板	m	1	0.96	0.92	0.79	0.70
	n	3	3.05	3.15	3.41	3.70
有限宽板	m	1	0.99	0.97	0.81	0.73
	n	3	3.03	3.14	3.74	4.32

百分之五左右。

根据以上所述,如果有任意形状的薄板(或长柱),受有任意面力,而在距边界较远处有一小圆孔,那么,只要有了无孔时的应力解答,也就可以计算孔边的应力。为此,只须先求出无孔时相应于圆孔中心处的应力分量,从而求出相应的两个应力主向以及主应力 σ_1 和 σ_2 。如果圆孔确是很小,圆孔的附近部分就可以当做是沿两

个主向分别受均布拉力 $q_1 = \sigma_1$ 及 $q_2 = \sigma_2$, 也就可以应用前面所说的叠加法。这样求得的孔边应力, 当然会有一定的误差, 但在工程实际上却很有参考价值。用这种方法解决的孔边应力集中问题, 通常称为小孔口问题。

§ 4-8 半平面体在边界上受集中力

设有半平面体, 在其直边界上受有集中力, 与边界法线成角 β , 图 4-11, 取单位宽度的部分来考虑, 并命单位宽度上所受的力为 P , 它的因次是[力][长]⁻¹。取坐标轴如图所示。

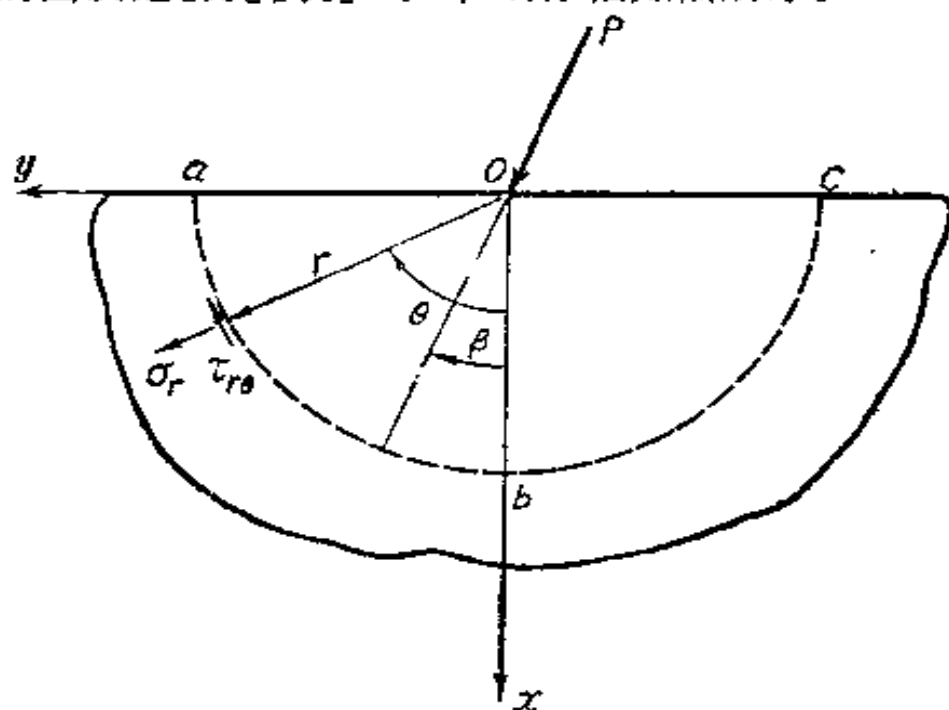


图 4-11

在这里, 半平面体内任意一点的应力分量决定于 β 、 P 、 r 、 θ , 因而各应力分量的表达式中只会包含这几个量。但是, 应力分量的因次是[力][长度]⁻², P 的因次是[力][长度]⁻¹, 而 β 和 θ 是无因次的数量。因此, 各应力分量的表达式只可能取 $\frac{P}{r} N$ 的形式, 其中 N 是无因次数量 β 和 θ 组成的无因次的数量。这就是说, 在各应力分量的表达式中, r 只可能以负一次幂出现。由公式(4-5)又可

以看出, 应力函数 φ 中的 r 的幂次应当比各应力分量中的 r 的幂次高出两次。因此, 可以假设应力函数 φ 是 θ 的某一函数乘以 r 的一次幂, 即

$$\varphi = rf(\theta). \quad (a)$$

将式(a)代入相容方程(4-6), 得

$$\frac{1}{r^3} \left[\frac{d^4 f(\theta)}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} + f(\theta) \right] = 0.$$

删去因子 $\frac{1}{r^3}$, 求解这一常微分方程, 得

$$f(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \theta(C \cos \theta + D \sin \theta),$$

其中 A, B, C, D 是任意常数。代入式(a), 得

$$\varphi = Ar \cos \theta + Br \sin \theta + r\theta(C \cos \theta + D \sin \theta).$$

由 § 3.1 中已知, 式中的前两项 $Ar \cos \theta + Br \sin \theta = Ax + By$, 不影响应力, 可以删去。因此, 只须取

$$\varphi = r\theta(C \cos \theta + D \sin \theta). \quad (4-20)$$

于是由公式(4-5)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{2}{r} (D \cos \theta - C \sin \theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0, \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

应力边界条件要求

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}, r \neq 0} = 0, \quad (\tau_{\theta r})_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}, r \neq 0} = 0.$$

由式(b)中的后二式可见, 这些边界条件是满足的。此外, 在 O 点附近的一小部分边界上, 有一组面力作用, 它的分布没有给出, 但已知它在单位宽度上合成为 P 。显然, 在半平面体的任何一个半圆形截面 abc 上的应力的整体, 必须和这一组面力合成平衡力系,

因而就必须和荷载 P 合成平衡力系。于是得出由边界条件变来的平衡方程:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r r d\theta \cos \theta + P \cos \beta = 0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_r r d\theta \sin \theta - P \sin \beta = 0.$$

将(b)中的第一式代入, 进行积分以后, 得

$$\pi D + P \cos \beta = 0, \quad -\pi C + P \sin \beta = 0,$$

由此得

$$D = -\frac{P}{\pi} \cos \beta, \quad C = \frac{P}{\pi} \sin \beta.$$

代入式(b), 即得应力分量的最后解答

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} (\cos \beta \cos \theta + \sin \beta \sin \theta), \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0. \quad (4-21)$$

由上式可见, 当 r 无限小时, σ_r 无限增大。实际上, 一当最大的 σ_r 超过半平面体材料的比例极限, 弹性力学的基本方程就不再适用, 以上的解答也就不适用。因此, 我们必须这样来理解: 半平面体在 O 点附近受有一定的面力, 这个面力以及所引起应力的最大集度不超过比例极限, 而面力的合成是图中所示的力 P 。当然, 面力分布的方式不同, 应力分布也就不同。但是, 按照圣维南原理, 不论这个面力如何分布, 在离开面力稍远的处所, 应力分布都相同, 也就和公式(4-21)所示的分布相同。

当力 P 垂直于直线边界时, 图 4-12, 解答最为有用。为了得出这一情况下的应力分量, 只须在公式(4-21)中取 $\beta = 0$, 于是得

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0. \quad (4-22)$$

应用坐标变换式(4-7), 由上式求得直角坐标中的应力分量:

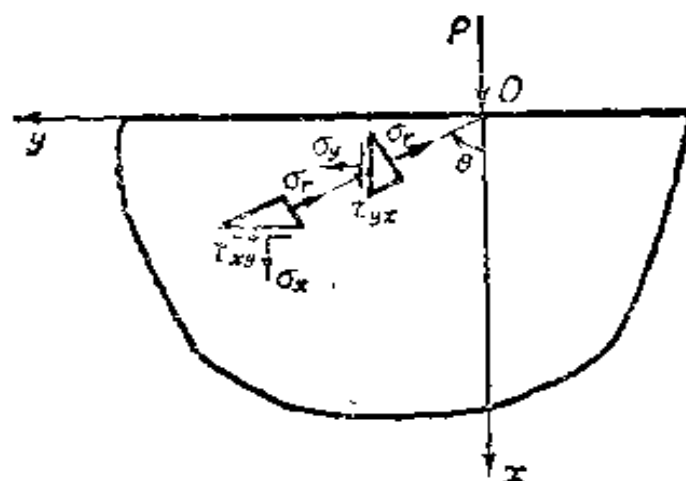


图 4-12

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{r}, \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r}, \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2P}{\pi} \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

这是把直角坐标中的应力分量用极坐标表示。也可以把(4-23)中的极坐标变换为直角坐标而得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4-24)$$

现在来求出位移。先假定这里是平面应力情况。将应力分量(4-22)代入物理方程(4-3), 得形变分量

$$\varepsilon_r = -\frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{2\mu P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = 0.$$

再将这形变分量代入几何方程(4-2), 得

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r},$$

$$\begin{aligned} \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= \frac{2\nu P \cos \theta}{\pi E r^2}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} &= 0. \end{aligned}$$

进行和 § 4-5 中相同的运算, 可以得出位移分量

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \ln r \\ &\quad - \frac{(1-\mu)P}{\pi E} \theta \sin \theta - I \cos \theta + K \sin \theta, \\ u_\theta &= \frac{2P}{\pi E} \sin \theta \ln r + \frac{(1-\mu)P}{\pi E} \sin \theta \\ &\quad - \frac{(1-\mu)P}{\pi E} \theta \cos \theta + Hr - I \sin \theta + K \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

其中的 H, I, K 都是任意常数。

由问题的对称条件有

$$(u_\theta)_{\theta=0} = 0.$$

将式(c)中的 u_θ 代入, 得 $H = K = 0$ 。于是式(c)成为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \ln r - \frac{(1-\mu)P}{\pi E} \theta \sin \theta + I \cos \theta, \\ u_\theta &= \frac{2P}{\pi E} \sin \theta \ln r - \frac{(1-\mu)P}{\pi E} \theta \cos \theta \\ &\quad - \frac{(1+\mu)P}{\pi E} \sin \theta - I \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

如果半平面体不受沿铅直方向的约束, 则常数 I 不能确定, 因为常数 I 就代表铅直方向(x 方向)的刚体平移。如果半平面体受有铅直方向的约束, 就可以根据这个约束条件来确定常数 I 。

为了求得边界上任意一点 M 向下的铅直位移, 即所谓沉陷, 可应用(d)中的第二式。注意, 位移分量 u_θ 是以沿 θ 正方向的为正, 因此, M 点的沉陷是

$$-(u_v)_{x=0} = -\frac{2P}{\pi E} \ln r - \frac{(1+\mu)P}{\pi E} + I. \quad (e)$$

如果常数 I 未能确定, 则沉陷 (e) 也不能确定。这时, 只能求得相对沉陷。试在边界上取一个基点 B (图 4-13), 它距荷载作用点 O 的水平距离为 s 。边界上任意一点 M 对于基点 B 的相对沉陷, 等于 M 点的沉陷减去 B 点的沉陷, 即

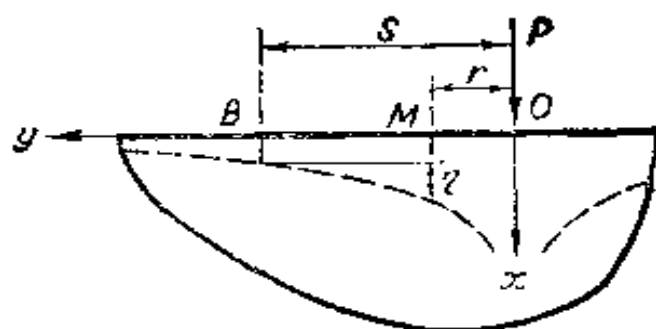


图 4-13

$$\begin{aligned} \eta &= \left[-\frac{2P}{\pi E} \ln r - \frac{(1+\mu)P}{\pi E} + I \right] \\ &= \left[-\frac{2P}{\pi E} \ln s - \frac{(1+\mu)P}{\pi E} + I \right]. \end{aligned}$$

简化以后, 得

$$\eta = \frac{2P}{\pi E} \ln \frac{s}{r}. \quad (4-25)$$

对于平面应变情况下的半平面体, 在以上关于形变或位移的公式中, 须将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, 将 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

本节中的解答, 是由符拉芒首先得出的。

§ 4-9 半平面体在边界上受分布力

有了上一节中关于半平面体在边界上受集中力作用时的应力公式和沉陷公式, 即可通过叠加而得出分布力作用时的应力和沉陷。设半平面体在其边界的 AB 一段上受有铅直分布力, 它在各点

的集度为 q . 图 4-14。为了求出半平面体内某一点 M 处的应力, 取坐标轴如图所示, 命 M 点的坐标为 (x, y) 。在 AB 一段上距坐标原点 O 为 ξ 处取微小长度 $d\xi$, 将其上所受的力 $dP = qd\xi$ 看作一个微小集中力。对于这个微小集中力引起的应力, 即可应用公式(4-24)。注意, 在公式(4-24)中, x 和 y 分别为欲求应力之点与集中力 P 作用点的铅直和水平距离, 而在图 4-14 中, M 点与微小集中力 dP 的铅直及水平距离分别为 x 及 $y - \xi$ 。因此, 微小集中力 $dP = qd\xi$ 在 M 点引起的应力为

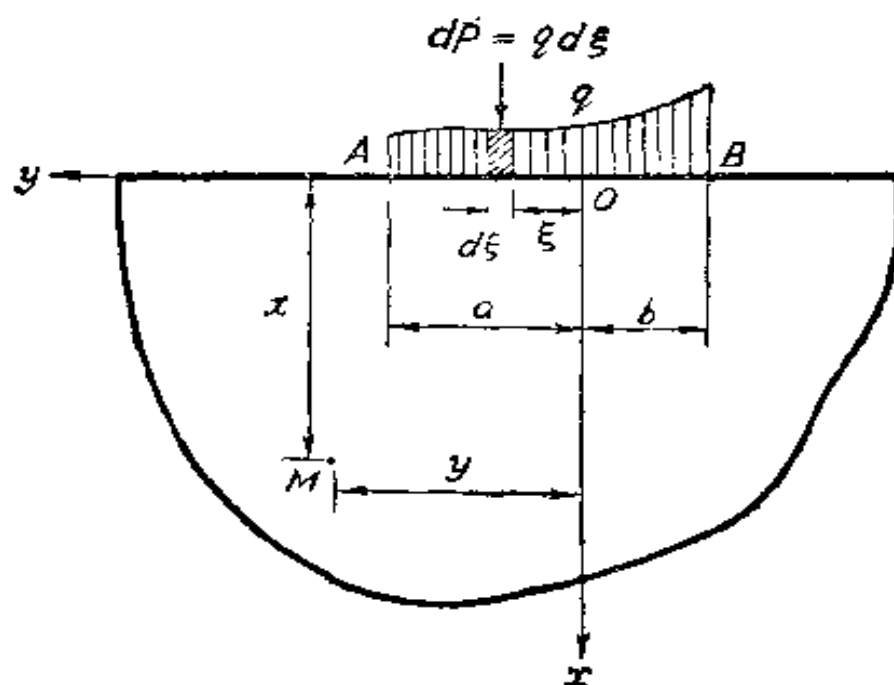


图 4-14

$$d\sigma_x = -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x^3}{[x^2 + (y - \xi)^2]^2},$$

$$d\sigma_y = -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x(y - \xi)^2}{[x^2 + (y - \xi)^2]^2},$$

$$d\tau_{xy} = -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x^2(y - \xi)}{[x^2 + (y - \xi)^2]^2}.$$

为了求出全部分布力引起的应力, 只须将所有各个微小集中力引起的应力相叠加, 也就是求上列三式的积分, 从 $\xi = -b$ 到 $\xi = a$;

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{qx^3 d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2}, \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{qx(y-\xi)^2 d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{qx^2(y-\xi) d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-26)$$

在应用上述公式时, 须将分布力的集度 q 表示成为 ξ 的函数, 然后再进行积分。

对于均布荷载, q 是常量, 应用公式(4-26), 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2q}{\pi} \int_{-b}^a \frac{x^3 d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2} = -\frac{q}{\pi} \left[\arctg \frac{y+b}{x} \right. \\ &\quad \left. - \arctg \frac{y-a}{x} + \frac{x(y-b)}{x^2 + (y-b)^2} - \frac{x(y-a)}{x^2 + (y-a)^2} \right], \\ \sigma_y &= -\frac{2q}{\pi} \int_{-b}^a \frac{x(y-\xi)^2 d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2} = -\frac{q}{\pi} \left[\arctg \frac{y+b}{x} \right. \\ &\quad \left. - \arctg \frac{y-a}{x} - \frac{x(y-b)}{x^2 + (y-b)^2} + \frac{x(y-a)}{x^2 + (y-a)^2} \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{2q}{\pi} \int_{-b}^a \frac{x^2(y-\xi) d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2} = \frac{q}{\pi} \left[\frac{x^2}{x^2 + (y-b)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^2}{x^2 + (y-a)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

下面再来导出半平面体边界上受有均布单位力作用时的沉陷公式。

设有单位力均匀分布在半平面体边界的长度 c 上面 (分布集度为 $\frac{1}{c}$), 图 4-15。为了求得距均布力中点 I 为 x 的一点 K 的沉陷, 将这均布力分为微分力 $dP = \frac{1}{c} dr$, 其中 r 为该微分力至 K 点的距离。应用半平面体的沉陷公式 (4-25), 得出 K 点由于 dP 作用而引起的微分沉陷

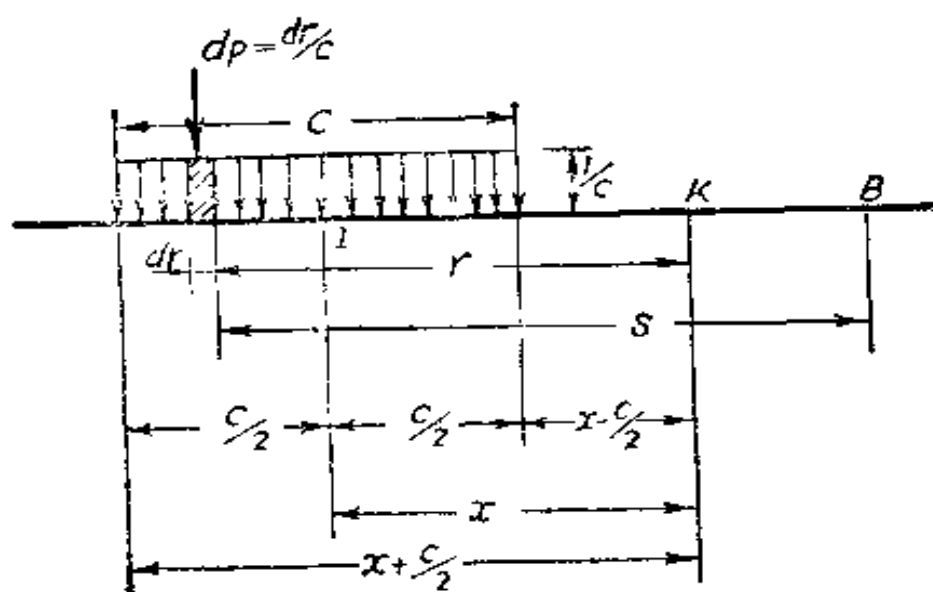


图 4-15

$$d\eta_{ki} = \frac{2dP}{\pi E} \ln \frac{s}{r} = \frac{2}{\pi E c} \ln \frac{s}{r} d\tau, \quad (a)$$

其中 s 是微分力与基点 B 之间的距离。将式(a)对 r 进行积分,即可求得沉降 η_{ki} 。

如果 K 点在均布力之外,则沉降为

$$\eta_{ki} = \int_{x-c/2}^{x+c/2} d\eta_{ki} = \int_{x-c/2}^{x+c/2} \frac{2}{\pi E c} \ln \frac{s}{r} d\tau.$$

显然,上式中的 s 也是随 r 而变化的,为简单起见,我们假定沉降的基点取得很远($s \gg r$),积分时可以把 s 当做常量。积分的结果可以写成

$$\eta_{ki} = \frac{1}{\pi E} (F_{ki} + C), \quad (4-28)$$

其中
$$F_{ki} = -2 \frac{x}{c} \ln \left(\frac{2 \frac{x}{c} + 1}{2 \frac{x}{c} - 1} \right) - \ln \left(4 \frac{x^2}{c^2} - 1 \right), \quad (b)$$

$$C = 2 \left(\ln \frac{s}{c} + 1 + \ln 2 \right). \quad (c)$$

如果 K 点在均布力的中点 $I(x=0)$, 则沉降为

$$\eta_{ki} = \frac{2}{\pi E c} - 2 \int_0^{c/2} \ln \frac{s}{r} dr,$$

积分的结果仍然可以写成公式(4-28)的形式, 而且常数 C 仍然如式(c)所示, 但 $F_{ki} = 0$ 。

当 $\frac{x}{c}$ 值为整数时(包括 $\frac{x}{c} = 0$ 在内), 可以从下表查得公式(4-28)中的 F_{ki} 的数值。

半平面体沉陷公式中的 F_{ki} 值

$\frac{x}{c}$	F_{ki}	$\frac{x}{c}$	F_{ki}	$\frac{x}{c}$	F_{ki}	$\frac{x}{c}$	F_{ki}
0	0	6	-6.967	11	-8.181	16	-8.931
1	-3.296	7	-7.276	12	-8.356	17	-9.052
2	-4.751	8	-7.541	13	-8.516	18	-9.167
3	-5.574	9	-7.780	14	-8.664	19	-9.275
4	-6.154	10	-7.991	15	-8.802	20	-9.378

对于平面应变情况下的半平面体, 沉陷公式(4-28)仍然适用, 但式中的 E 应当换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 。

在用连杆法计算基础梁的平面问题时, 要应用沉陷公式(4-28)。

§ 4-10 对心受压圆盘中的应力

本节中利用半平面体在边界上受垂直集中力时的解答(4-22), 来导出对心受压圆盘中的应力, 图 4-16。

首先, 假设每一个集中力 P 在圆盘内都是引起一个如(4-22)所示的简单的径向应力分布。显然, 这样的应力是满足相容方程的, 下面来考察这样的应力是否也能满足边界条件。在圆周上任一点 M , 有沿 r_1 方向和 r_2 方向的压应力, 分别等于 $\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_1}{r_1}$ 和

$\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta_2}{r_2}$, 注意 r_1 与 r_2 互相垂

直, 而且

$$\frac{\cos \theta_1}{r_1} = \frac{\cos \theta_2}{r_2} = \frac{1}{d},$$

其中 d 是圆盘的直径, 可见这两个压应力就是 M 点的两个主应力, 大小都等于 $\frac{2P}{\pi d}$ 。因此, 在经

过 M 而垂直于圆盘平面的任一平面上, 都有相同的压应力 $\frac{2P}{\pi d}$ 作用

着, 即在圆周上也有均布压应力

$\frac{2P}{\pi d}$ 作用着。由于圆周上实际并不受力, 所以必须将均布拉应力

$\frac{2P}{\pi d}$ 与两个简单的径向应力分布相叠加, 才能得到满足全部条件的

解答。

现在来求出圆盘的垂直直径截面上 N 处的应力。由于对称, 可以断定该截面上的剪应力 $\tau_{xy} = 0$ 。 N 点的正应力则是三部分之和: 与两个集中力 P 对应的径向压应力所引起的正应力以及拉应力 $\frac{2P}{\pi d}$ 。应用 (4-23) 中的前二式, 就得到垂直直径截面上 N 处

的正应力为

$$\sigma_x = -2 \frac{2P}{\pi} \frac{\cos^3 \theta}{r} + \frac{2P}{\pi d},$$

$$\sigma_y = -2 \frac{2P}{\pi} \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r} + \frac{2P}{\pi d},$$

其中 r 是距离 AN (或 BN), θ 是 AN (或 BN) 与铅直直径之间

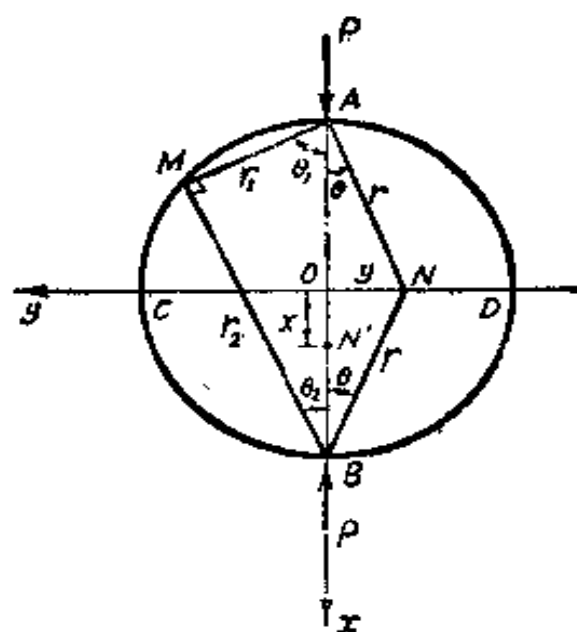


图 4-16

的夹角。注意到 $r = \sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$, $\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4y^2}}$, 就得到

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi d} \left[1 - \frac{4d^4}{(d^2 + 4y^2)^2} \right],$$

它在直径 CD 上的分布大致如图 4-17 所示。最大压应力是在圆盘的中心, 在那里

$$\sigma_x = -\frac{6P}{\pi d};$$



图 4-17

在直径的两端, $\sigma_x = 0$ 。

在铅直直径截面上的 N' 处, 注意 $r_1 = d/2 + x$, $r_2 = d/2 - x$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, 可得该处的正应力为

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \left[\frac{1}{\frac{d}{2} + x} - \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{d}{2} - x} \right] + \frac{2P}{\pi d} = -\frac{8Pd}{\pi(d^2 - 4x^2)} + \frac{2P}{\pi d},$$

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi d}.$$

由于对称, 该处的剪应力 $\tau_{xy} = 0$ 。

由于在铅直直径截面上的正应力是均匀拉应力 $\frac{2P}{\pi d}$, 因而常用圆柱的对心受压试验来求出混凝土、岩石等材料的抗拉强度。

习 题

4-1. 试用 (3-9) 及 (3-10) 导出应力分量的坐标变换式 (4-7) 及 (4-8)。

4-2. 试导出直角坐标的位移分量 u, v 与极坐标的位移分量 u_r, u_θ 之间的坐标变换式。

4-3. 设轴对称应力问题的约束条件也绕 z 轴对称, 则位移亦绕 z 轴对称, 这种问题称为轴对称位移问题。试导出按位移求解轴对称位移问题时的基本方程。

提示: $u_r = u_r(r), u_\theta = 0$ 。

答案: $\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0$.

4-4. 设在(4-11)中,

$$A = -\frac{4M}{N} a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}, \quad B = -\frac{2M}{N} (b^2 - a^2),$$

$$C = \frac{M}{N} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \ln b - a^2 \ln a)],$$

其中 $N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2$ 。试考察这样的应力分量能解答图 4-18 所示曲梁的什么问题。

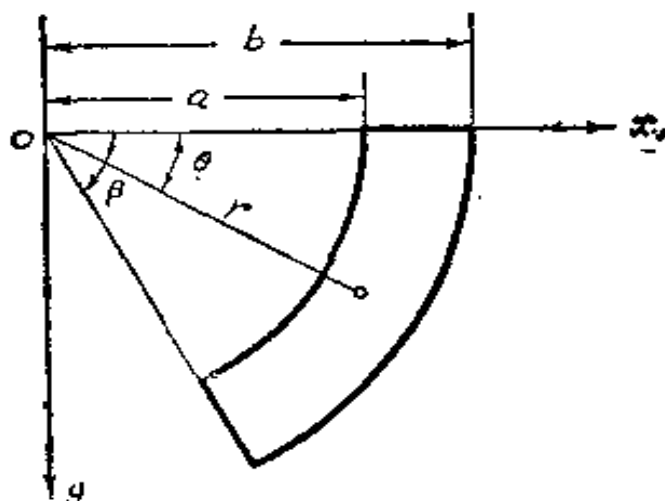


图 4-18

答案: 能解答曲梁的纯弯曲问题, 而 M 为作用的弯矩。

4-5. 设有内半径为 a 而外半径为 b 的圆筒受内压力 q , 试求内半径和外半径的改变, 并求圆筒厚度的改变。

$$\text{答案: } \frac{qa(1-\mu^2)}{E} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \right), \quad \frac{qa(1-\mu^2)}{E} \frac{2ab}{b^2 - a^2},$$

$$-\frac{qa(1-\mu^2)}{E} \left(\frac{b-a}{b+a} + \frac{\mu}{1-\mu} \right).$$

4-6. 设有一刚体, 具有半径为 b 的圆柱形孔道, 孔道内放置外半径为 b 而内半径为 a 的圆筒, 圆筒受内压力 q , 试求圆筒的应力。

$$\text{答案: } \sigma_\theta = \frac{1-2\mu}{r^2} \frac{1}{\frac{1-2\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2}} b^2 q, \quad \sigma_r = -\frac{1-2\mu}{r^2} \frac{1}{\frac{1-2\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2}} q.$$

4-7. 有一内半径为 a 、外半径为 b 、受内水压力 q 作用的压力隧洞埋在

岩层中。设岩层对于隧洞的抗力可按文克勒假定计算, 即 $p = k(u_r)_{r=b}$, 其中 p 是岩层对隧洞的弹性抗力, $(u_r)_{r=b}$ 是隧洞在外半径 L 的径向位移, k 是弹性抗力系数, 与岩层的性质有关。试求弹性抗力 p 。

答案:
$$p = \frac{2N(1-\mu)}{(t^2-1) + N[1 + (1-2\mu)t^2]} q, \text{ 其中 } t = \frac{b}{a},$$
$$N = \frac{k b (1 + \mu)}{E}.$$

4-8. 矩形薄板受有纯剪, 剪力的集度为 q , 图 4-19。如果离板边较远处有一小圆孔, 试求孔边的最大和最小的正应力。

答案: 最大 $4q$, 最小 $-4q$ 。

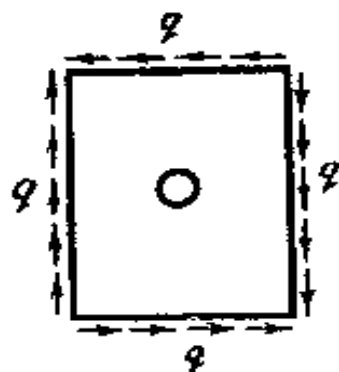


图 4-19

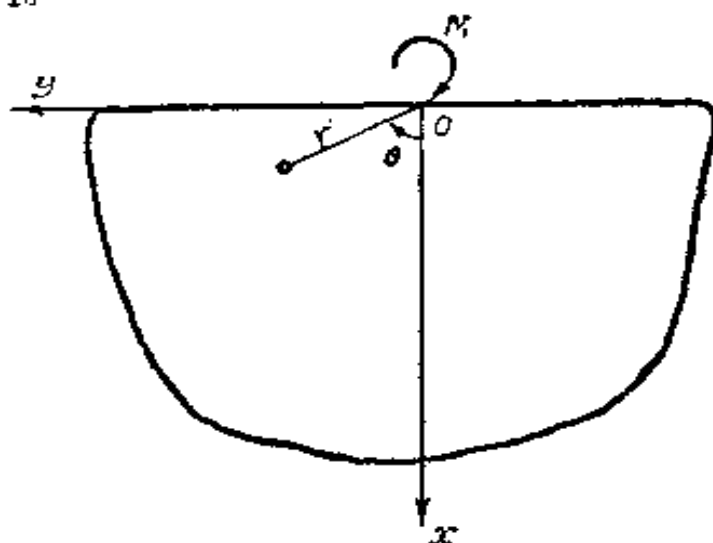


图 4-20

4-9. 设半平面体在直边界上受有集中力偶, 单位宽度上力偶矩为 M , 图 4-20。试求应力分量。

提示: M 的因次是[力][长度]/[长度] = [力]。

答案:
$$\sigma_r = \frac{2M \sin 2\theta}{\pi r^2}, \sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = -\frac{M(\cos 2\theta + 1)}{\pi r^2}.$$

4-10. 试证 $\varphi = C[r^2(\alpha - \theta) + r^2 \sin \theta \cos \theta - r^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \alpha]$ 是应力函数, 设有三角形悬臂梁受均布荷载 q , 图 4-21, 试用上述应力函数求解其应力, 对于 $\alpha = 20^\circ$ 的情况, 试画出铅直截面 I 上 σ_x 与 τ_{xy} 的分布图, 并与材料力学的结果加以比较。

答案:
$$\sigma_x = \frac{q}{(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)} - (\alpha - \theta) - \sin \theta \cos \theta,$$

$$\tau_{xy} = \frac{q}{(\operatorname{tg} \alpha - \alpha)} \sin^2 \theta.$$

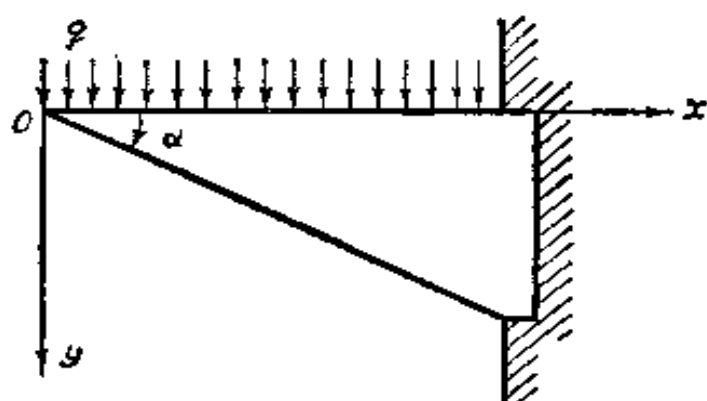


图 4-21

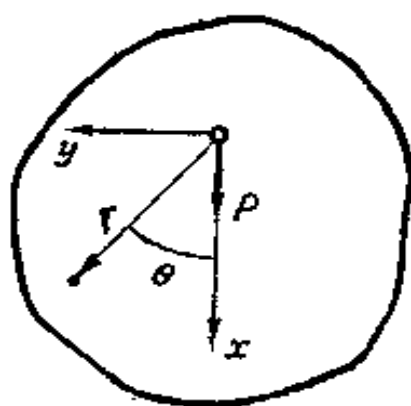


图 4-22

4-11. 设有无限大薄板, 在板内小孔中受集中力 P , 图 4-22, 试用如下的应力函数求解:

$$\varphi = Ar \ln r \cos \theta + Br \theta \sin \theta.$$

提示: 需要考虑位移单值条件。

答案: $\sigma_r = -\frac{(3+\mu)P}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r},$

$$\sigma_\theta = \frac{(1-\mu)P}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r},$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{(1-\mu)P}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r}.$$

第五章 用差分法与变分法解平面问题

§ 5-1 差分公式的推导

自从弹性力学基本方程建立以后, 这些方程在各种问题的边界条件下如何求解, 曾经有过很多的研究。但是, 对于工程上许多重要的问题, 并没有能够得出函数式解答。因此, 弹性力学问题的各种数值解法便具有重要的实际意义。差分法和变分法是沿用较久的两种数值解法。

所谓差分法, 是把基本方程和边界条件(一般均为微分方程)近似地改用差分方程(代数方程)来表示, 把求解微分方程的问题改换成为求解代数方程的问题。因此, 在讲述差分法之前, 先来导出弹性力学上常用的一些差分公式, 以使用它们来建立差分方程。

我们在弹性体上用相隔等间距 h 而平行于坐标轴的两组平行线织成网格, 图 5-1。设 $f = f(x, y)$ 为弹性体内的某一个连续函数, 它可能是某一个应力分量或者位移分量, 也可能是应力函数, 等等。这个函数, 在平行于 x 轴的一根网线上, 例如在 3-0-1 上, 它只随 x 坐标的改变而变化。在邻近结点 0 处, 函数 f 可以展为台劳级数如下:

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 (x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 (x - x_0)^4 + \dots \quad (a)$$

在结点 3 及结点 1, x 分别等于 $x_0 - h$ 及 $x_0 + h$, 即 $x - x_0$ 分别等于 $-h$ 及 h 。代入式(a), 得

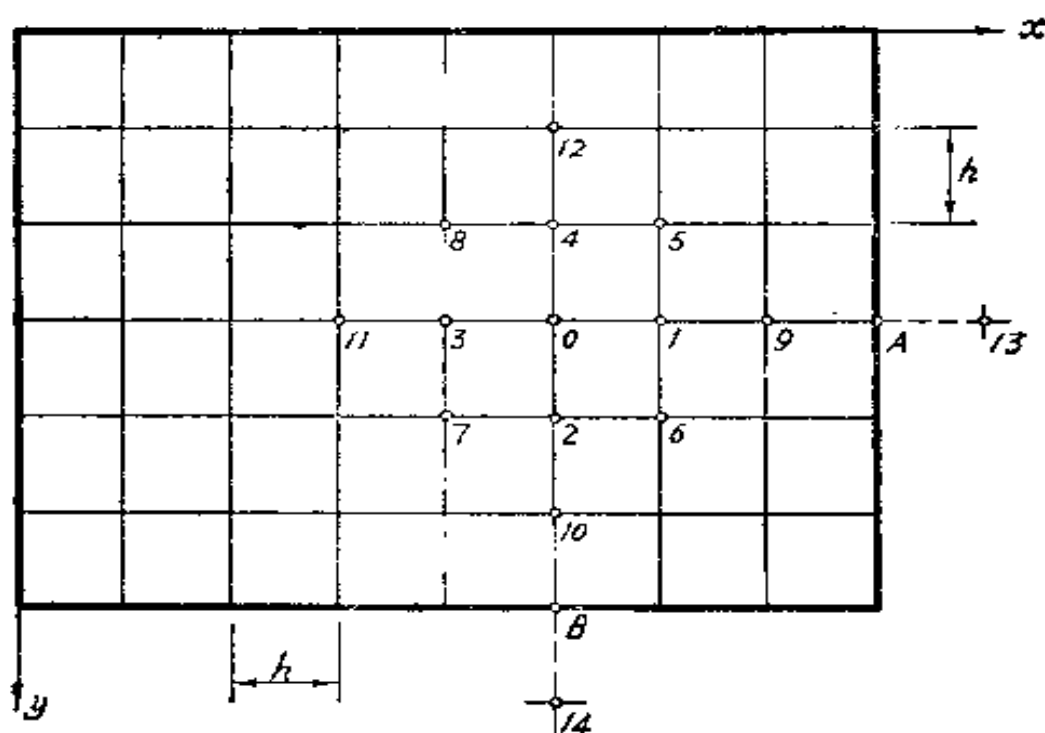


图 5-1

$$f_3 = f_0 - h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 - \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_0 + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_0 - \dots, \quad (b)$$

$$f_1 = f_0 + h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 + \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_0 + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_0 + \dots, \quad (c)$$

假定 h 是充分小的, 因而可以不计它的三次幂及更高次幂的各项, 则式(b)及式(c)简化为

$$f_3 = f_0 - h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0, \quad (d)$$

$$f_1 = f_0 + h \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0. \quad (e)$$

联立求解 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0$ 及 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0$, 得差分公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 = \frac{f_1 - f_3}{2h}, \quad (5-1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{h^2}. \quad (5-2)$$

同样可以得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{f_2 - f_4}{2h}, \quad (5-3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{h^2}. \quad (5-4)$$

公式(5-1)至(5-4)是基本差分公式, 可以从而导出其他的差分公式。例如, 利用公式(5-1)及(5-3), 可以导出混合二阶导数的差分公式如下:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_0 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_3}{2h} \\ &= \frac{\frac{f_6 - f_4}{2h} - \frac{f_8 - f_2}{2h}}{2h} = \frac{1}{4h^2} [(f_6 + f_2) - (f_4 + f_8)]. \end{aligned} \quad (5-5)$$

又例如, 用同样的方法, 由公式(5-2)及(5-4)可以导出四阶导数的差分公式如下:

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 = \frac{1}{h^4} [6f_0 - 4(f_1 + f_3) + (f_5 + f_{11})], \quad (5-6)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 &= \frac{1}{h^4} [4f_0 - 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \\ &\quad - (f_5 + f_6 + f_7 + f_8)], \end{aligned} \quad (5-7)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0 = \frac{1}{h^4} [6f_0 - 4(f_2 + f_4) + (f_{10} + f_{12})]. \quad (5-8)$$

建议读者自行推导这些公式, 以资练习。

以上在导出基本差分公式(5-1)至(5-4)时, 在式(a)中略去了 $x-x_0$ 的三次幂及更高次幂的各项。这样, 就把函数 f 简化为 x 的二次函数, 也就是说, 在连续两段网格间距之内, 把 f 看做按抛物线变化。因此, 基本差分公式(5-1)至(5-4)常称为抛物线差分公式。

§ 5-2 应力函数的差分解

在 § 2-9 中已知, 在不计体力的情况下, 平面问题中的应力分

量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 可以用应力函数 φ 的二阶导数表示如下:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (a)$$

如果在弹性体上织成如图 5-1 所示的网格, 应用差分公式(5-4)、(5-2)、(5-5), 就可以把任一结点 0 处的应力分量表示成为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{1}{h^2} [(\varphi_2 + \varphi_4) - 2\varphi_0], \\ (\sigma_y)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{1}{h^2} [(\varphi_1 + \varphi_3) - 2\varphi_0], \\ (\tau_{xy})_0 &= \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_0 = \frac{1}{4h^2} [(\varphi_5 + \varphi_7) - (\varphi_6 + \varphi_8)]. \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

可见, 如果已知各结点处的 φ 值, 就可以求得各结点处的应力分量。

为了求得弹性体边界以内各结点处的 φ 值, 须利用应力函数的重调和方程, 但须首先把它变换为差分方程。为此, 要把差分公式(5-6)至(5-8)代入 $(\nabla^4 \varphi)_0 = 0$, 即

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_0 + 2 \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right)_0 = 0.$$

这样就得出

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8) + (\varphi_9 + \varphi_{10} + \varphi_{11} + \varphi_{12}) = 0. \quad (5-10)$$

对于弹性体边界以内的每一结点, 都可以建立这样一个差分方程。但是, 对于边界内一行的(距边界为 h 的)结点, 差分方程中还将包含边界上各结点处的 φ 值, 并包含边界外一行的虚结点处的 φ 值。

为了求得边界上各结点处的 φ 值, 须要应用应力边界条件(2-10), 即

$$l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s = \bar{X}, \quad m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s = \bar{Y}.$$

利用式(a), 可将它变换成为

$$l\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_s - m\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_s = \bar{X}, \quad m\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_s - l\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_s = \bar{Y}. \quad (b)$$

由图 5-2 可见

$$l = \cos(N, x) = \cos \alpha = \frac{dy}{ds},$$

$$m = \cos(N, y) = \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}.$$

因此, 式(b)可以改写成

$$\frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_s + \frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_s = \bar{X}, \quad -\frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_s - \frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_s = \bar{Y},$$

或

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_s = \bar{X}, \quad -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_s = \bar{Y} \quad (c)$$

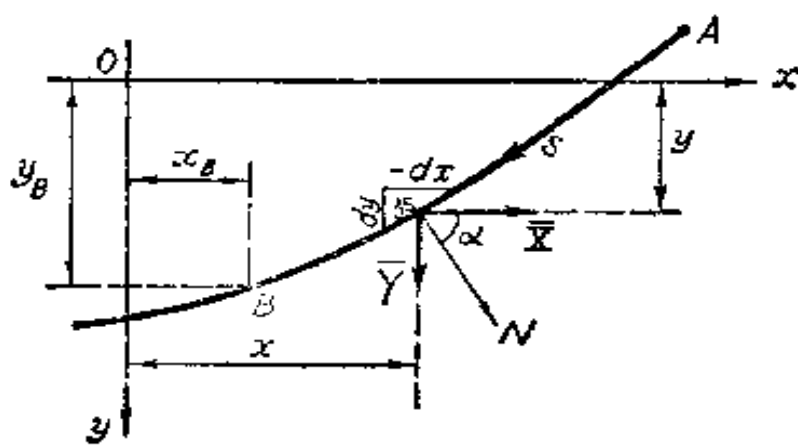


图 5-2

将上列二式对 s 积分, 从 A 点到 B 点, 得

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_B = \int_A^B \bar{X} ds, \quad -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_B = \int_A^B \bar{Y} ds,$$

或

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_B = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A + \int_A^B \bar{X} ds, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_B = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A - \int_A^B \bar{Y} ds. \quad (d)$$

另一方面, 注意 $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$, 将此式亦对 s 积分, 从 A 点到

B 点, 则由分部积分得

$$\begin{aligned} \left(\varphi\right)_A^B &= \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A^B - \int_A^B x \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_s ds \\ &+ \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A^B - \int_A^B y \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_s ds, \end{aligned}$$

或将式(c)代入而得

$$\left(\varphi\right)_A^B = \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A^B + \int_A^B x \bar{Y} ds + \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A^B - \int_A^B y \bar{X} ds,$$

也就是

$$\begin{aligned} \varphi_B - \varphi_A &= x_B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_B - x_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A + \int_A^B x \bar{Y} ds \\ &+ y_B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_B - y_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A - \int_A^B y \bar{X} ds. \end{aligned}$$

再将式(d)代入, 得

$$\begin{aligned} \varphi_B - \varphi_A &= x_B \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A + \int_A^B \bar{Y} ds \right] - x_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A + \int_A^B x \bar{Y} ds \\ &+ y_B \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A + \int_A^B \bar{X} ds \right] - y_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A - \int_A^B y \bar{X} ds, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \varphi_B - \varphi_A &+ (x_B - x_A) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A + (y_B - y_A) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A \\ &+ \int_A^B (y_B - y) \bar{X} ds + \int_A^B (x - x_B) \bar{Y} ds. \end{aligned} \quad (e)$$

由式(e)及式(d)可见, 设已知 φ_A 、 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A$ 、 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A$, 即可根据面力分量 \bar{X} 及 \bar{Y} 求得 φ_B 、 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_B$ 、 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_B$ 。但在 §3-1 中已经说明, 在应力函数 φ 中加上一个线性函数, 并不影响应力。因此, 我们可以假想在函数 φ 中加上 $a + bx + cy$, 并调整 a 、 b 、 c 三个系数, 使得 $\varphi_A = 0$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A = 0$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A = 0$ 。这样就可以使得式(d)及

式(e)简化为

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_B = \int_A^B \bar{X} ds, \quad (5-11)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_B = - \int_A^B \bar{Y} ds, \quad (5-12)$$

$$\varphi_B = \int_A^B (y_B - y) \bar{X} ds + \int_A^B (x - x_B) \bar{Y} ds. \quad (5-13)$$

观察图 5-2, 可见式(5-11)右边的积分式表示 A 与 B 之间的、 x 方向的面力之和; 式(5-12)右边的积分式表示 A 与 B 之间的、 y 方向的面力之和改号; 式(5-13)右边的积分式表示 A 与 B 之间的面力对于 B 点的力矩之和 (在如图 5-2 所示的 x 轴向右而 y 轴向下的坐标系中, 这个力矩以顺时针转向为正)。

以上是针对单连体导出的结果。对于多连体, 情况就不象这样简单。虽然在多连体的每一个连续边界上, 式(d)和式(e)都仍然适用, 但是, 当我们在某一个连续边界 s 上任意选定基点 A 并取 $\varphi_A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A = 0$ 以后, 应力函数 φ 就不再具有任意性, 它在弹性体的任何一点都有了一定的数值。因此, 对于另一个连续边界 s_1 上任选的基点 A_1 , 就不能再取

$$\varphi_{A_1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{A_1} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{A_1} = 0.$$

只有应用位移单值条件, 才能确定 φ_{A_1} 、 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{A_1}$ 、 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{A_1}$, 从而求出 s_1 上其它各点的 φ 值、 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 值、 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 值。而且由于 φ_{A_1} 、 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{A_1}$ 、 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{A_1}$ 一般都不等于零, 于是只能直接应用公式(d)和(e), 而不能应用简化了的公式(5-11)至(5-13)。这就使得差分法在多连体问题中应用起来很不方便。本教程以后所讨论的对象只

在 B 点附近, 把应力函数 φ 展为台劳级数:

$$\varphi = \varphi_B + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_B (x - x_B) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_B (x - x_B)^2 + \dots$$

命 x 分别等于 $x_B - \xi h$, x_B , $x_B + (1 + \xi)h$, 也就是命 $x - x_B$ 分别等于 $(1 - \xi)h$, 0 , $(1 + \xi)h$, 得出

$$\varphi_0 = \varphi_B + (1 - \xi)h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_B + \frac{1}{2} (1 - \xi)^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_B + \dots, \quad (f)$$

$$\varphi_1 = \varphi_B - \xi h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_B + \frac{1}{2} \xi^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_B - \dots, \quad (g)$$

$$\varphi_2 = \varphi_B + (1 + \xi)h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_B + \frac{1}{2} (1 + \xi)^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_B + \dots, \quad (h)$$

不计 h 的三次幂及更高次幂的各项, 首先从式 (f) 及式 (h) 中消去 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_B$, 然后从式 (g) 及式 (h) 中消去 $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_B$, 得

$$\varphi_0 = \frac{1 + \xi}{(1 - \xi)^2} \varphi_B - \frac{2(1 - \xi)}{1 + \xi} h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_B + \frac{(1 - \xi)^2}{(1 + \xi)^2} \varphi_2, \quad (i)$$

$$\varphi_1 = \frac{1 + 2\xi}{(1 - \xi)^2} \varphi_B - \frac{\xi}{1 + \xi} h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_B - \frac{\xi^2}{(1 + \xi)^2} \varphi_2. \quad (j)$$

应用差分方程 (5-10) 时, 其中的 φ_0 及 φ_1 应当如式 (i) 及式 (j) 所示。当 $\xi = 0$ 时, 结点 B 与结点 1 重合, 式 (j) 成为 $\varphi_1 = \varphi_B$, 不起作用, 而式 (i) 成为 $\varphi_0 = \varphi_B + 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_B$, 与 (5-14) 中第一式的意义相同。

§ 5-3 应力函数差分解的实例

设有正方形的混凝土深梁, 图 5-4, 上边受有均布向下的铅直荷载 q , 由下角点处的反力维持平衡, 试用应力函数的差分解求出应力分量。

在这里, 假定反力集中作用在一点, 不一定能符合实际情况。

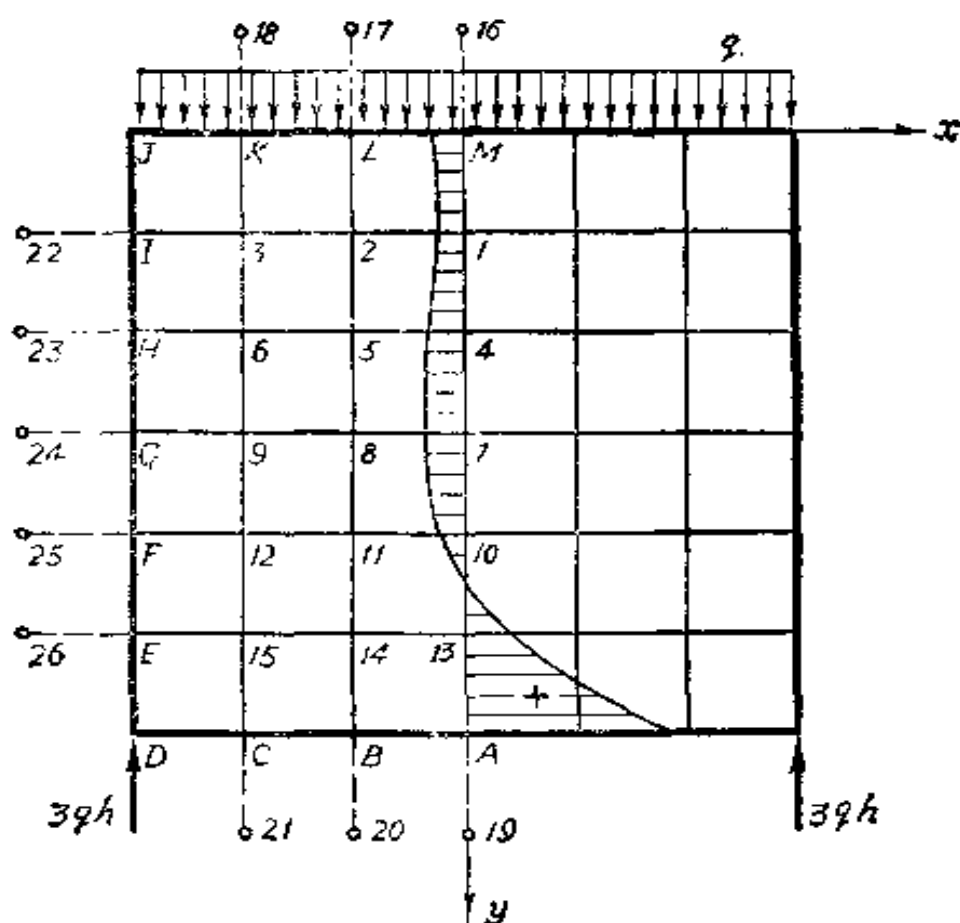


图 5-4

但是, 这里的主要问题在于求出梁底中点 A 附近的拉应力, 而反力的分布方式对于这个拉应力的影响是不会大的。因此, 为了计算简便, 就假定反力是集中力。

取坐标轴如图所示, 取网格间距 h 等于六分之一边长。由于对称, 只须计算梁的一半, 例如左一半。现在按前一节末尾所说的步骤进行计算如下。

(1) 取梁底中点 A 作为基点, 取 $\varphi_A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A = 0$, 计算边界上所有各结点处的 φ 值以及必需的 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 值和 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 值, 列表如下(不必需的导数值没有计算, 在表中用短横线表示)。

(2) 将边界外一行各个虚结点处的 φ 值 (φ_{16} 至 φ_{26}) 用边界

结 点	A	B, C	D	E, F, G, H, I	J	K	L	M
$\frac{\partial \varphi}{\partial x}$	0	—	—	$3qh$	—	—	—	—
$\frac{\partial \varphi}{\partial y}$	0	0	—	—	—	0	0	0
φ	0	0	0	0	0	$2.5qh^2$	$4.0qh^2$	$4.5qh^2$

内一行各结点处的 φ 值表示。在上下两边, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$, 所以有

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{16} &= \varphi_1, & \varphi_{17} &= \varphi_2, & \varphi_{18} &= \varphi_3, \\ \varphi_{19} &= \varphi_{13}, & \varphi_{20} &= \varphi_{14}, & \varphi_{21} &= \varphi_{15}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

在左边, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3qh$, 所以有

$$\varphi_3 = \varphi_{22} + 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_I = \varphi_{22} + 2h(3qh) = \varphi_{22} + 6qh^2,$$

即

$$\varphi_{22} = \varphi_3 - 6qh^2. \quad (b)$$

同样有

$$\varphi_{23, 24, 25, 26} = \varphi_{6, 9, 12, 15} - 6qh^2. \quad (c)$$

(3) 对边界内的各结点建立差分方程。例如, 对结点 1, 注意对称性, 由公式(5-10)得

$$\begin{aligned} 20\varphi_1 - 8(2\varphi_2 + \varphi_4 + \varphi_M) + 2(2\varphi_5 + 2\varphi_L) \\ + (2\varphi_3 + \varphi_7 + \varphi_{16}) = 0, \end{aligned}$$

将上表中 φ_M 及 φ_L 的已知值代入, 并注意式(a)中的 $\varphi_{16} = \varphi_1$, 得

$$21\varphi_1 - 16\varphi_2 + 2\varphi_3 - 8\varphi_4 + 4\varphi_5 + \varphi_7 - 20qh^2 = 0. \quad (d)$$

又例如, 对结点 15, 得

$$\begin{aligned} 20\varphi_{15} - 8(\varphi_{12} + \varphi_{18} + \varphi_C + \varphi_E) + 2(\varphi_{11} + \varphi_B + \varphi_D + \varphi_F) \\ + (\varphi_9 + \varphi_{13} + \varphi_{21} + \varphi_{26}) = 0. \end{aligned}$$

将上表中的 φ_C 、 φ_E 、 φ_B 、 φ_D 、 φ_F 代入, 并注意式(a)中的 $\varphi_{21} = \varphi_{15}$ 及式(c)中的 $\varphi_{26} = \varphi_{15} - 6qh^2$, 得

$$\varphi_9 + 2\varphi_{11} - 8\varphi_{12} + \varphi_{13} - 8\varphi_{14} + 22\varphi_{15} - 6qh^2 = 0. \quad (e)$$

象式(d)和(e)这样的方程共有 15 个, 其中包含 15 个未知值 φ_1 至 φ_{15} 。联立求解, 得(以 qh^2 为单位):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 4.36, & \varphi_2 &= 3.89, & \varphi_3 &= 2.47, \\ \varphi_4 &= 3.98, & \varphi_5 &= 3.59, & \varphi_6 &= 2.35, \\ \varphi_7 &= 3.29, & \varphi_8 &= 3.03, & \varphi_9 &= 2.10, \\ \varphi_{10} &= 2.23, & \varphi_{11} &= 2.13, & \varphi_{12} &= 1.63, \\ \varphi_{13} &= 0.92, & \varphi_{14} &= 0.94, & \varphi_{15} &= 0.88. \end{aligned}$$

(4) 计算边界外一行各结点处的 φ 值。由(a)、(b)、(c)三式得(以 qh^2 为单位):

$$\begin{aligned} \varphi_{16} &= 4.36, & \varphi_{17} &= 3.89, & \varphi_{18} &= 2.47, \\ \varphi_{19} &= 0.92, & \varphi_{20} &= 0.94, & \varphi_{21} &= 0.88, \\ \varphi_{22} &= -3.53, & \varphi_{23} &= -3.65, & \varphi_{24} &= -3.90, \\ \varphi_{25} &= -4.37, & \varphi_{26} &= -5.12. \end{aligned}$$

(5) 计算应力。例如, 在结点 M , 按公式(5-9)可得

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_M &= \frac{1}{h^2} [(\varphi_1 + \varphi_{16}) - 2\varphi_M] \\ &= (4.36 + 4.36 - 2 \times 4.50)q = -0.28q. \end{aligned}$$

同样可以得出

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{1, 4, 7, 10, 13, A} &= -0.24q, \quad -0.31q, \quad -0.37q, \\ &\quad -0.25q, \quad 0.39q, \quad 1.84q. \end{aligned}$$

沿着梁的中线 MA , σ_x 的变化如图 5-4 中曲线所示。

如果按照材料力学中的公式计算弯应力 σ_x , 则得

$$(\sigma_x)_M = -0.75q, \quad (\sigma_x)_A = 0.75q.$$

可见, 对于象本例题中这样的深梁, 用材料力学公式算出的应力,

是远远不能反映实际情况的。

§ 5-4 温度应力问题的差分解

在 § 2-11 中已经指出, 对于温度应力的平面问题, 如果按应力求解, 可以引用应力函数 φ , 而应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (a)$$

应力函数应满足相容方程

$$\nabla^4 \varphi + E\alpha \nabla^2 T = 0. \quad (b)$$

对于平面应变问题, 须将其中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, α 换为 $(1+\mu)\alpha$ 。

在温度应力问题中, 面力分量 $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ 。因此, 如果在边界上选定了某一基点 A , 取 $\varphi_A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_A = 0$, 则在任意其他一点 B 都有 $\varphi_B = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_B = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_B = 0$ 。这就是说, 在边界的所有各点, 都有

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (c)$$

于是, 求解温度应力的平面问题, 就简化为在式(c)所示的边界条件下求解微分方程(b), 然后按式(a)求出应力分量。

用差分法求解温度应力时, 须将微分方程(b)化为差分方程。参阅图 5-1, 利用差分公式(5-2)及(5-4), 可见有

$$(\nabla^2 T)_0 = \frac{1}{h^2} (T_1 + T_5 + T_3 + T_4 - 4T_0). \quad (d)$$

利用差分公式(5-6)至(5-8), 可见有

$$\begin{aligned} (\nabla^4 \varphi)_0 = & \frac{1}{h^4} [20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ & + 2(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8) + (\varphi_9 + \varphi_{10} + \varphi_{11} + \varphi_{12})], \quad (e) \end{aligned}$$

对于任一内结点 O , 由式 (b) 有

$$(\nabla^2 \varphi)_O + E\alpha(\nabla^2 T)_O = 0. \quad (f)$$

将式 (d) 及式 (e) 代入式 (f), 即得所需用的差分方程

$$\begin{aligned} 20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_5 + \varphi_6 + \varphi_7 + \varphi_8) \\ + (\varphi_9 + \varphi_{10} + \varphi_{11} + \varphi_{12}) \\ + E\alpha h^2(T_1 + T_2 + T_3 - T_4 - 4T_0) = 0. \end{aligned} \quad (5-15)$$

参阅图 5-1, 利用公式 (5-14), 有

$$\varphi_{13} = \varphi_9 - 2h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A, \quad \varphi_{14} = \varphi_{10} + 2h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_B.$$

按照边界条件 (c), 有 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A = 0$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_B = 0$, 于是得

$$\varphi_{13} = \varphi_9, \quad \varphi_{14} = \varphi_{10}. \quad (5-16)$$

这就是说, 边界外一行结点处的 φ 值, 就等于边界内一行相应结点处的 φ 值。同时, 按照 (c) 中的第一式, 可见在边界上的所有各结点处, 有 $\varphi = 0$ 。

这样, 用差分法求解温度应力问题, 就是在 $\varphi = 0$ 及 (5-16) 所示的边界条件下求解 (5-15) 型的差分方程。这些方程中将只包含内结点处的 φ 值作为未知值, 因而可以用来求解这些未知值, 从而用式 (5-9) 求得各结点处的应力分量。可见, 变温作用时的温度应力问题, 与荷载作用时的应力问题相比, 是比较简单的。

§ 5-5 差分解的若干应用场合

对于某些平面问题, 虽然不可能用通常的方法求得精确解答, 但如注意到这些问题的特性, 加以适当处理, 就可以用应力函数的差分解求得应力。有时, 联合应用材料力学及结构力学中的计算方法, 能得到更好的效果。

例如, 某些局部受压的混凝土构件, 如图 5-5a 所示的承压墙,

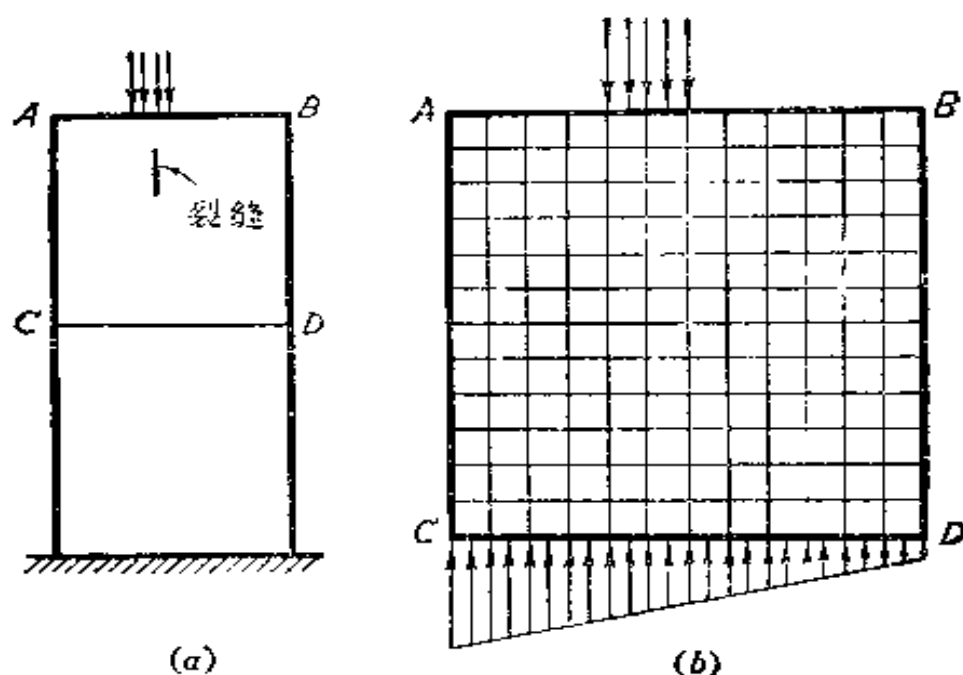


图 5-5

由于所受的荷载比较集中，往往在靠近荷载作用处出现平行于荷载方向的裂缝。这说明该处受有垂直于荷载方向的拉应力。乍看起来，这是一个混合边界问题，而且是局部应力的问题，好象很难用弹性力学方法求得这个拉应力。但是，就该构件的整体说来，这是一根偏心受压的等截面直杆；在离开墙顶 AB 一段距离的横截面 CD 上，应力将和用材料力学求得的一样，即，正应力按直线分布而剪应力等于零。于是，我们就可以把 $ABCD$ 部分作为计算对象，图 5-5b，织上网格，在边界 CD 上施以按材料力学算出的应力，作为荷载，应用应力函数的差分解，就不难求得如上所述的局部拉应力。如果这个拉应力超过容许数值，就要把承压面积适当增大，或放置少量的局部钢筋。对于图 5-6 所示的承压柱，也可以同样处理。

又例如，在刚架的结点附近，图 5-7，局部应力也是难于用通常的方法求得的。但是，就整体说来，刚架是由等截面直杆构成的。对于每一构件，除了两端靠近结点处以外，可以把结构力学刚架分析给出的应力作为真实的应力。因此，我们可以把 AB 以左、



图 5-6

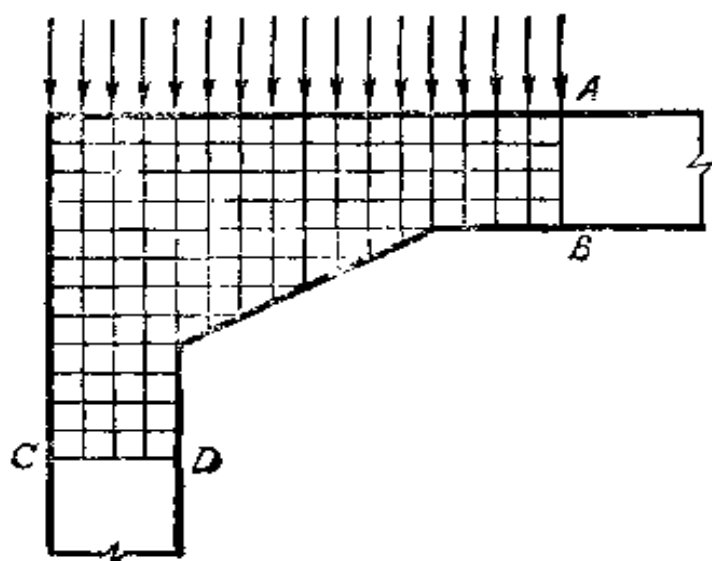


图 5-7

CD 以上的结点附近部分作为计算对象, 织上网格, 在边界 AB 及 CD 上施以刚架分析给出的应力, 作为荷载, 应用应力函数的差分解。很明显, 不论刚架是静定的还是超静定的, 也不论通过结点的构件是两个、三个、或者四个, 上述方法都同样适用。

再例如, 在某宽缝重力坝的应力分析中, 由于要考虑孔洞对坝身应力的影响, 须计算如图 5-8 所示的对象, 我们曾如下进行: 首先把该计算对象作为一个闭合框架, 上下两构件作为无限刚, 左右两构件作为有限刚, 用结构力学中的刚架分析法求出两构件截面 AB 及 CD 上的应力。然后把 AB 及 CD 以上的部分①作为计算的对象, 织上网格, 在边界 AB 及 CD 上施以上述应力, 作为荷载, 用应力函数的差分解求出应力。用同样的方法, 再计算 AB 及 CD 以下的部分②。算出的结果, 是和光弹量测所得的结果相符的。

对于类似图 5-9 所示的大头坝, 也可用应力函数的差分解来求出大头部分的局部应力。通常就假定 ED 截面上只有均匀分布的压应力(FE 大致等于 ED)。根据平衡条件, 可见这个压应力的大小为 $\frac{2 \times 12hq}{2 \times 4h} = 3q$ 。以对称轴的一边作为计算对象, 织上网格,

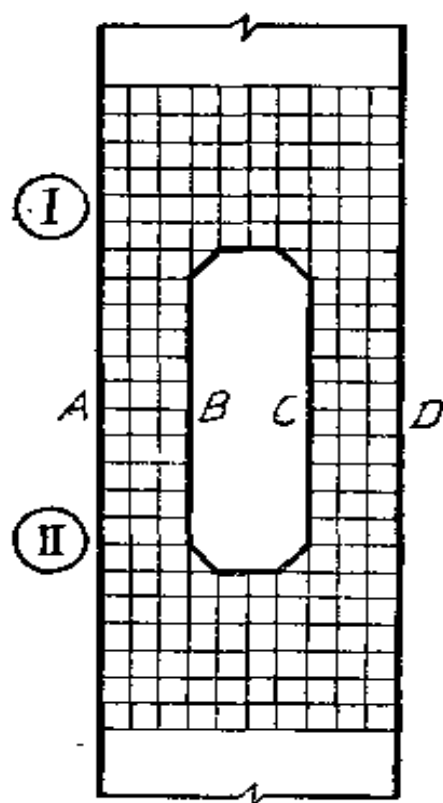


图 5-8

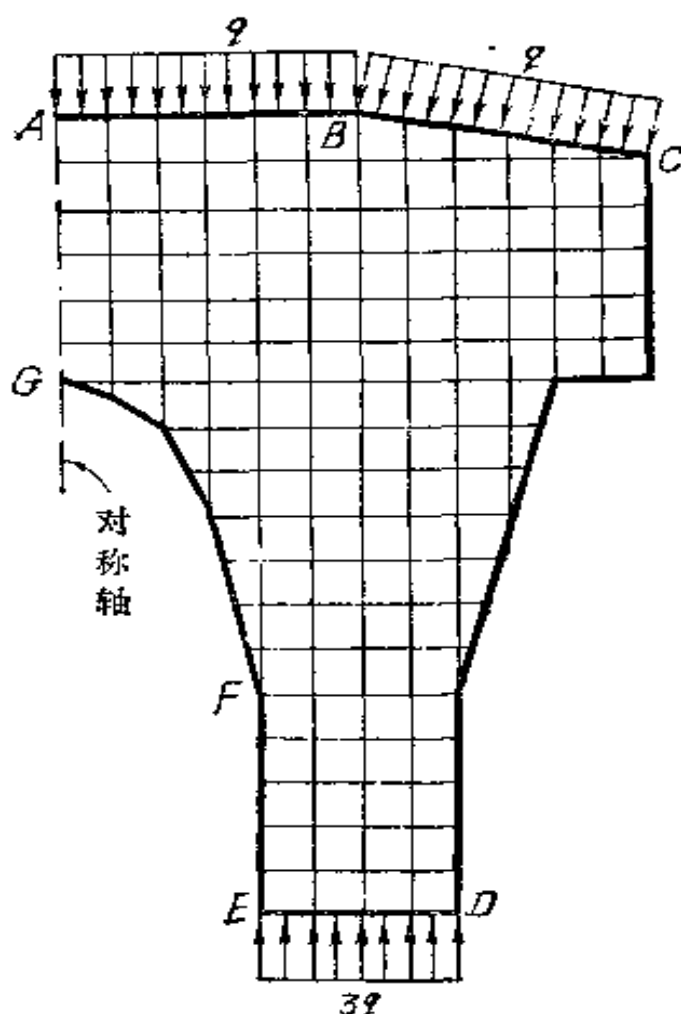


图 5-9

取边界 ED 上的荷载等于 $3q$, 连同 AB 及 BC 部分上的水压力, 进行应力函数的差分计算, 可以求得所需的应力。

§ 5-6 弹性体的形变势能

弹性力学问题的变分法, 一般是和弹性体的形变势能密切相关的。因此, 在讲述变分法之前, 先来说明弹性体的形变势能与应力、形变、位移之间的关系, 并导出相应的计算公式。

按照材料力学里的论证, 设弹性体只在某一个方向, 例如 x 方向, 受有均匀的正应力 σ_x , 相应的正应变为 ϵ_x , 则其每单位体积中具有形变势能, 即所谓形变势能密度或比能, 为 $\frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x$ (这里假

定,弹性体在受力作用的过程中始终保持平衡,因而没有动能的改变,而且弹性体的非机械能也没有变化,于是,外力势能的减少完全转换为形变势能)。同样,设弹性体只在某两个互相垂直的方向,例如 x 和 y 方向,受有均匀的剪应力 τ_{xy} , 相应的剪应变为 γ_{xy} , 则其比能为 $\frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}$ 。

设弹性体受有全部六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$, 则形变势能的计算似乎很复杂, 因为这时的每一个应力分量会引起与另一个应力分量相应的形变分量(例如 σ_x 会引起 ϵ_y , 等等), 好象形变势能将随着弹性体受力的次序不同而不同。但是, 根据能量守恒定理, 形变势能的多少与弹性体受力的次序无关, 而完全确定于应力及形变的最终大小(要不然, 我们按某一种次序对弹性体加载, 而按另一种次序卸载, 就将在一个循环中使弹性体增加或减少一定的能量, 而这是不可能的)。因此, 我们假定六个应力分量和六个形变分量全都同时按同样的比例增加到最后的大小, 这样就可以很简单地算出相应于每一个应力分量的比能, 然后把它们相叠加, 从而得出弹性体的全部比能:

$$U_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (a)$$

在平面问题中, $\tau_{yz} = 0, \tau_{zx} = 0$ 。在平面应力问题中还有 $\sigma_z = 0$; 在平面应变问题中, 还有 $\epsilon_z = 0$ 。因此, 在两种平面问题中, 弹性体的比能的表达式都简化为

$$U_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (b)$$

在一般的平面问题中, 弹性体受力并非均匀, 各个应力分量和形变分量都是坐标 x 和 y 的函数, 因而比能 U_1 一般也是坐标 x 和 y 的函数。为了得出整个弹性体具有的形变势能 U , 必须将比能 U_1 在整个弹性体内积分。和以前一样, 为了简便, 在 z 方向取一个单位

长度。这样就得到

$$U = \iiint U_1 dx dy = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy, \quad (c)$$

形变势能可以单用形变分量来表示。为此, 须利用物理方程(2-11), 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

代入式(b), 得

$$U_1 = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^2 \right], \quad (e)$$

并由式(c)得

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iiint \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^2 \right] dx dy. \quad (5-17)$$

试将式(e)分别对 ε_x , ε_y , γ_{xy} 求导, 再参阅式(d), 可见有

$$\frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}. \quad (5-18)$$

它们表示: 弹性体每单位体积中的形变势能对于任一形变分量的改变率, 就等于相应的应力分量。

形变势能还可以用位移分量来表示。为此, 只须利用几何方程(2-3), 即,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

代入式(e), 得

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (f)$$

并由式(c)得

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (5-19)$$

在式(5-17)和(5-19)中, 只须将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, 将 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, 就得出平面应变问题中的相应公式。形变势能也可以单用应力分量来表示, 读者试自行推导之。

§ 5-7 位移变分方程

设有平面问题中的任一单位厚度的弹性体, 在一定的外力作用下处于平衡状态。命 u, v 为该弹性体中实际存在的位移分量, 它们满足用位移分量表示的平衡微分方程, 并满足位移边界条件以及用位移分量表示的应力边界条件。现在, 假想这些位移分量发生了位移边界条件所容许的微小改变, 即所谓虚位移或位移变分 $\delta u, \delta v$ 而成为

$$u' = u + \delta u, \quad v' = v + \delta v,$$

然后来考察, 能量方面将发生什么样的改变。

假定弹性体在虚位移过程中并没有温度的改变, 也没有速度的改变, 也就是, 没有热能或动能的改变。这样, 按照能量守恒定理, 形变势能的增加应当等于外力势能的减少, 也就等于外力所做的功, 即所谓虚功。注意外力包括分量为 X, Y 的体力, 以及分量为 \bar{X}, \bar{Y} 的面力, 可见形变势能的变分为

$$\delta U = \iint (X \delta u + Y \delta v) dx dy + \int (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds,$$

其中的二重积分须包括弹性体在 xy 面内的全部面积, 线积分须包括全部边界。将上式进行归项以后, 得到

$$\delta U = \iint (X \delta u + Y \delta v) dx dy + \int (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds. \quad (5-20)$$

这就是所谓位移变分方程, 有的文献把它叫做拉格朗日变分方程。

从位移变分方程(5-20)出发, 可以推出弹性力学中的一个原理, 即所谓极小势能原理。由于虚位移是微小的, 因此, 在虚位移过程中, 外力的大小和方向可以当做保持不变, 只是作用点有了改变。这样, 我们就可以把方程(5-20)右边的变分记号 δ 提到积分号的前面, 得到

$$\delta U = \delta \left[\iint (Xu + Yv) dx dy + \int (\bar{X}u + \bar{Y}v) ds \right],$$

也就是

$$\delta \left[U + \iint (Xu + Yv) dx dy + \int (\bar{X}u + \bar{Y}v) ds \right] = 0. \quad (\alpha)$$

现在, 用 V 代表外力的势能(以 $u = v = 0$ 时的自然状态下的势能为零), 它也就等于外力在实际位移上所做的功冠以负号, 即

$$V = - \iint (Xu + Yv) dx dy - \int (\bar{X}u + \bar{Y}v) ds. \quad (5-21)$$

代入式(α)即得

$$\delta(U + V) = 0. \quad (5-22)$$

因为 $U + V$ 是形变势能与外力势能的总和, 所以由此可见, 在给定的外力作用下, 实际存在的位移应使总势能的变分成为零。这就推出这样一个原理: 在给定的外力作用下, 在满足位移边界条件的所有各组位移中间, 实际存在的一组位移应使总势能成为极值。如果考虑二阶变分, 就可以证明: 对于稳定平衡状态, 这个极值是极小值。因此, 上述原理称为极小势能原理。

应用位移变分方程, 还可以导出另一个重要方程, 即所谓虚功方程。为此, 把比能 U_1 看做形变分量的函数, 得出

$$\begin{aligned}\delta U &= \delta \iint U_1 dx dy = \iint \delta U_1 dx dy \\ &= \iint \left(\frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U_1}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right) dx dy.\end{aligned}$$

将式(5-18)代入得

$$\delta U = \iint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy.$$

代入位移变分方程(5-20), 即得

$$\begin{aligned}& \iint (X \delta u + Y \delta v) dx dy + \int (\bar{X} \delta u + \bar{Y} \delta v) ds \\ &= \iint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy.\end{aligned}\quad (5-23)$$

这就是所谓虚功方程。把该方程右边的各项称为应力在虚应变上所做的虚功, 则虚功方程表示: 如果在虚位移发生之前, 弹性体是处于平衡状态, 那么, 在虚位移过程中, 外力在虚位移上所做的虚功就等于应力在虚应变上所做的虚功。

从以上的讨论可知, 位移变分方程(5-20), 极小势能原理的表达式(5-22)以及虚功方程(5-23), 这三者的本质是一样的。它们都是在实际平衡状态的位移发生虚位移时, 能量守恒原理的具体应用, 只是表达方式有所不同而已。以后将根据不同的需要, 采用其中的一种。

我们以前已经看到, 实际存在的位移, 除了满足位移边界条件以外, 还应当满足用位移表示的平衡微分方程和应力边界条件; 现在又看到, 实际存在的位移, 除了满足位移边界条件以外, 还满足位移变分方程(或极小势能原理, 或虚功方程)。而且, 通过运算, 还可以从位移变分方程(或极小势能原理, 或虚功方程)导出平衡微分方程和应力边界条件。于是可见, 位移变分方程(或极小势能原理, 或虚功方程), 可以代替平衡微分方程和应力边界条件。下面用位移变分方程来导出平衡微分方程和应力边界条件。

由于位移分量的变分, 形变分量也将有相应的变分。按照几何方程, 形变分量的变分为

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \delta u, \quad \delta \varepsilon_y = \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \delta v, \\ \delta \gamma_{xy} &= \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} \delta v. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

由于形变分量的变分, 形变势能也将有相应的变分

$$\delta U = \iint \delta U_1 dx dy.$$

把比能 U_1 看做形变分量的函数, 则上式成为

$$\delta U = \iint \left(\frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U_1}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right) dx dy.$$

将(5-18)及式(b)代入, 得

$$\delta U = \iint \left[\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} \delta v + \tau_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \delta u + \frac{\partial}{\partial x} \delta v \right) \right] dx dy. \quad (c)$$

现在来对式(c)右边方括号内四项中的每一项进行分部积分。例如,

$$\begin{aligned} \iint \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u dx dy &= \iint \left(\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u dx \right) dy \\ &= \int \left(\sigma_x \delta u - \int \delta u \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x dx \right) dy \\ &= \int \sigma_x \delta u dy - \iint \delta u \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x dx dy. \end{aligned}$$

注意在边界上有 $dy = l ds$, 则上式可以改写成为

$$\iint \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta u dx dy = \int l \sigma_x \delta u ds - \iint \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x \delta u dx dy.$$

对于式(c)中的其它各项都进行相似的处理, 并注意 $dx = -m ds$, 则式(c)成为

$$\delta U = \int [(l \sigma_x + m \tau_{xy}) \delta u + (m \sigma_y + l \tau_{xy}) \delta v] ds$$

$$-\iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \delta u - \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \delta v \right] dx dy.$$

代入位移变分方程(5-20), 进行整理以后, 可得

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right) \delta u + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) \delta v \right] dx dy \\ & - \int [(l\sigma_x + m\tau_{xy} - \bar{X})\delta u \\ & + (m\sigma_y + l\tau_{xy} - \bar{Y})\delta v] ds = 0. \end{aligned} \quad (d)$$

由于虚位移 δu 和 δv 均是任意的, 为了使上式成立, 必须所有括弧内的表达式为零, 即

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0, \\ l\sigma_x + m\tau_{xy} - \bar{X} &= 0, & m\sigma_y + l\tau_{xy} - \bar{Y} &= 0. \end{aligned}$$

这样就得出平衡微分方程与应力边界条件。

最后来考察, 如果位移分量除了满足位移边界条件以外, 还满足应力边界条件, 那么, 从能量观点看来, 弹性体的位移变分又应当满足什么条件。因为现在应力边界条件也得到满足, 利用式(2-10), 则式(d)简化为

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right) \delta u + \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) \delta v \right] dx dy = 0. \quad (5-24)$$

这就是当位移分量满足位移边界条件及应力边界条件时, 位移变分所应满足的方程。有些文献把它称为伽辽金变分方程。

§ 5-8 位移变分法

上一节中导出的位移变分方程, 给弹性力学问题提供这样一个近似解法: 设定位移分量的表达式, 使其满足位移边界条件, 但其中包含若干个待定系数, 然后利用位移变分方程决定这些系数。

试取位移分量的表达式如下:

$$u = u_0 + \sum_m A_m u_m, \quad v = v_0 + \sum_m B_m v_m, \quad (5-25)$$

其中 A_m, B_m 为互不依赖的 $2m$ 个系数; u_0, v_0 为设定的函数, 它们的边界值等于边界上的已知位移, u_m, v_m 为在边界上等于零的设定函数。这样, 不论系数 A_m, B_m 如何取值, u, v 总能满足位移边界条件。注意: 位移的变分只是由系数 A_m, B_m 的变分来实现, 至于各个设定函数, 则仅随坐标而变, 与位移的变分无关。

按照表达式(5-25), 位移分量的变分是

$$\delta u = \sum_m u_m \delta A_m, \quad \delta v = \sum_m v_m \delta B_m, \quad (a)$$

而形变势能的变分是

$$\delta U = \sum_m \left(\frac{\partial U}{\partial A_m} \delta A_m + \frac{\partial U}{\partial B_m} \delta B_m \right). \quad (b)$$

将式(b)及(a)代入位移变分方程(5-20), 得

$$\begin{aligned} & \sum_m \left(\frac{\partial U}{\partial A_m} \delta A_m + \frac{\partial U}{\partial B_m} \delta B_m \right) \\ &= \sum_m \iint (X u_m \delta A_m + Y v_m \delta B_m) dx dy \\ &+ \sum_m \int (\bar{X} u_m \delta A_m + \bar{Y} v_m \delta B_m) ds. \end{aligned}$$

进行移项, 将每个系数的变分归并, 得到

$$\begin{aligned} & \sum_m \left[\frac{\partial U}{\partial A_m} - \iint X u_m dx dy - \int \bar{X} u_m ds \right] \delta A_m \\ &+ \sum_m \left[\frac{\partial U}{\partial B_m} - \iint Y v_m dx dy - \int \bar{Y} v_m ds \right] \delta B_m = 0. \end{aligned}$$

因为变分 $\delta A_m, \delta B_m$ 是完全任意的, 而且是互不依赖的, 所以在上

式中它们的系数必须等于零。于是得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_m} &= \iint X u_m dx dy + \int \bar{X} u_m ds, \\ \frac{\partial U}{\partial B_m} &= \iint Y v_m dx dy + \int \bar{Y} v_m ds. \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

由形变势能的表达式 (5-19) 及位移分量的表达式 (5-25) 可见, 形变势能 U 是系数 A_m 、 B_m 的二次函数, 因而方程 (5-26) 将是各个系数的一次方程。既然各个系数是互不依赖的, 就总可以由这些方程求得各个系数, 从而由表达式 (5-25) 求得位移分量。很多文献上把这个方法称为瑞次法。

如果选择表达式 (5-25) 中的函数, 使得位移边界条件和应力边界条件都能得到满足, 那么, 将式 (a) 代入式 (5-24), 就得到

$$\begin{aligned} \sum_m \iint \delta A_m \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right) u_m dx dy \\ + \sum_m \iint \delta B_m \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) v_m dx dy = 0. \end{aligned}$$

根据 δA_m 、 δB_m 的任意性, 它们的系数应当分别等于零, 于是得

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \right) u_m dx dy &= 0, \\ \iint \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y \right) v_m dx dy &= 0. \end{aligned}$$

将上列两方程中的应力分量通过物理方程 (2-11) 用形变分量表示, 再通过几何方程 (2-3) 用位移分量表示, 简化以后, 即得

$$\left. \begin{aligned} \iint \left[\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + X \right] u_m dx dy &= 0, \\ \iint \left[\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + Y \right] v_m dx dy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5-27)$$

对于平面应变问题, 须将上式中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, 将 μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

由表达式(5-25)可见, 位移分量 u 、 v 是系数 A_m 、 B_m 的一次式, 所以方程(5-27)将是这些系数的一次方程。既然各个系数是互不依赖的, 就总可以由这些方程求得系数 A_m 、 B_m , 从而由表达式(5-25)求得位移分量。这个方法就是所谓伽辽金法。

用位移变分法求得位移分量以后, 不难通过几何方程(2-3)求得形变分量, 进而通过物理方程(2-11)求得应力分量, 但往往出现这样的情况: 取不多的系数 A_m 、 B_m , 就可以求得较精确的位移, 而由此求出的应力却很不精确。为了求得的应力充分精确, 必须取更多的系数。

§ 5-9 位移变分法的例题

作为例题, 设有矩形薄板, 四边固定, 图 5-10, 受有平行于板面的体力。取坐标轴如图所示, 按照表达式(5-25)的形式, 把位移分量取为

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ v &= \sum_m \sum_n B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \right\} (a)$$

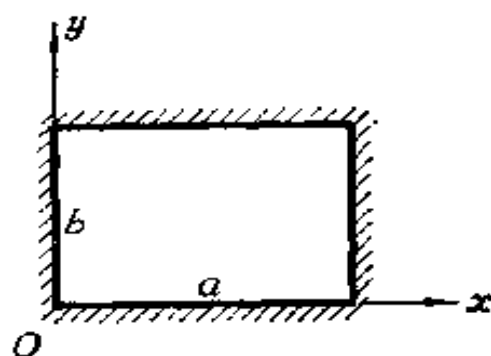


图 5-10

其中 m 及 n 均为正奇数。在这里, 由于位移分量在边界上等于零, 所以把 u_0 及 v_0 取为零。在边界上, 有 $x=0$, 或 $x=a$, 或 $y=0$, 或 $y=b$, 因而有 $\sin \frac{m\pi x}{a} = 0$ 或 $\sin \frac{n\pi y}{b} = 0$, 所以位移边界条件是满足的。

应用瑞次法。在这里, 由于位移分量在边界上为零, 所以方程

(5-26)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_{mn}} &= \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \\ \frac{\partial U}{\partial B_{mn}} &= \int_0^a \int_0^b Y \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

公式(5-19)在这里成为

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

将式(a)代入, 积分以后, 得

$$U = \frac{E\pi^2 ab}{4} \left\{ \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \left[2(1-\mu^2) \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{4(1+\mu)} \frac{n^2}{b^2} \right] + \sum_m \sum_n B_{mn}^2 \left[2(1-\mu^2) \frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{4(1+\mu)} \frac{m^2}{a^2} \right] \right\}.$$

代入式(b), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{E\pi^2 ab}{4} \left[\frac{m^2}{a^2(1-\mu^2)} + \frac{n^2}{2b^2(1+\mu)} \right] A_{mn} \\ = \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \\ \frac{E\pi^2 ab}{4} \left[\frac{n^2}{b^2(1-\mu^2)} + \frac{m^2}{2a^2(1+\mu)} \right] B_{mn} \\ = \int_0^a \int_0^b Y \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

可见, 不论体力如何分布, 都不难求得式(c)右边的积分, 从而求得系数 A_{mn} 及 B_{mn} 。将这些系数代入式(a), 即可得出位移分量, 从而用几何方程求得形变分量, 再用物理方程求得应力分量。

例如, 对于体力是自重的情况, $X=0$, $Y=-\rho g$, 其中 ρ 是密度, g 是重力加速度。将它们代入式(c), 进行积分, 则由第一式得 $A_{mn}=0$, 由第二式得

$$\begin{aligned} & \frac{E\pi^2 ab}{4} \left[\frac{n^2}{b^2(1-\mu^2)} + \frac{m^2}{2a^2(1+\mu)} \right] B_{mn} \\ &= -\rho g \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= -\rho g \frac{ab}{mn\pi^2} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi). \end{aligned}$$

注意 m 及 n 均为奇数, 因而有

$$1 - \cos m\pi = 1 - \cos n\pi = 2,$$

即由上式得出

$$B_{mn} = \frac{-16\rho g}{\pi^4 E mn} \left[\frac{n^2}{b^2(1-\mu^2)} + \frac{m^2}{2a^2(1+\mu)} \right].$$

将 A_{mn} 和 B_{mn} 代入式(a), 得位移分量

$$u=0,$$

$$\begin{aligned} v = \sum_m \sum_n \frac{-16\rho g}{\pi^4 E mn} \left[\frac{n^2}{b^2(1-\mu^2)} + \frac{m^2}{2a^2(1+\mu)} \right] & \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (d)$$

($m, n=1, 3, 5, \dots$)

利用物理方程及几何方程, 可由式(d)求得应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \sum_m \sum_n \frac{16\rho g \mu}{\pi^3 mb} \left[\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2(1-\mu)}{2a^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= \sum_m \sum_n \frac{-16\rho g}{\pi^3 mb} \left[\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2(1-\mu)}{2a^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} - \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \sum_m \sum_n \frac{-8\rho g}{\pi^3 m a \left[b^2 (1-\mu) + \frac{m^2}{2a^2} \right]} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.\end{aligned}$$

在以上三式中, $m, n = 1, 3, 5, \dots$.

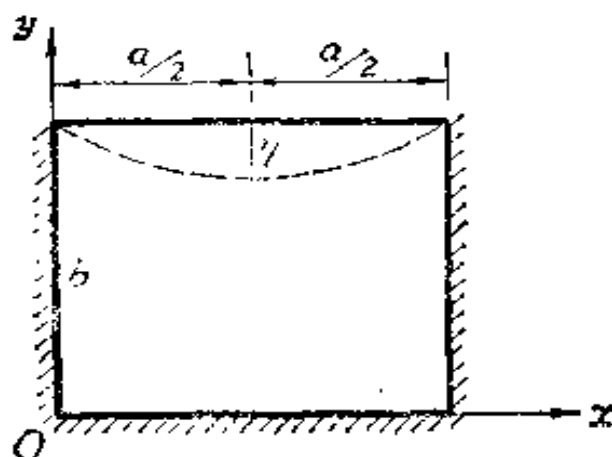


图 5-11

作为第二个例题, 设有矩形薄板, 三边固定, 图 5-11, 而第四边上的位移给定为

$$u = 0, \quad v = -\eta \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (e)$$

设定位移分量为

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ v &= -\eta \frac{y}{b} \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_m \sum_n B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

其中 m 及 n 为正奇数, 可以满足位移边界条件。

在这里, 我们可以和前一例题中同样地应用瑞次法, 但计算形变势能的工作量较大。由于在这一问题中并没有应力边界条件, 所以我们可以认为, 式(f)所示的位移不但满足位移边界条件, 同时也满足应力边界条件, 这就可以应用伽辽金法, 运算工作比较少一些。当然, 在前一例题中, 也可以应用伽辽金法, 但因运算工

作量相差不多, 所以应用了瑞次法, 使两个例题分别说明两个方法的应用。

方程(5-27)在这里成为

$$\int_0^a \int_0^b \left[\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + X \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left[\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + Y \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0.$$

将式(f)代入, 进行积分以后, 得

$$\left. \begin{aligned} & \frac{E\pi^2 ab}{4} \left[\frac{m^2}{a^2(1-\mu)^2} + \frac{n^2}{2b^2(1+\mu)} \right] A_{mn} \\ & = \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \\ & \frac{E\pi^2 ab}{4} \left[\frac{n^2}{b^2(1-\mu)^2} + \frac{m^2}{2a^2(1+\mu)} \right] B_{mn} \\ & = \int_0^a \int_0^b Y \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ & + \frac{E\pi^2 \eta}{2a^2(1+\mu)} \int_0^a \int_0^b \frac{y}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \\ & \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

当 $\eta=0$ 时, 这一例题即简化为前一例题: 式(f)简化为式(a), 而式(g)简化为式(c)。

由式(g)可见, 如果体力可以不计, 即 $X=Y=0$, 则所有的系数 A_{mn} 都成为零, 而系数 B_{mn} 由下式确定:

$$\frac{E\pi^2 ab}{4} \left[\frac{n^2}{b^2(1-\mu)^2} + \frac{m^2}{2a^2(1+\mu)} \right] B_{mn}$$

$$= \frac{E\pi^2\eta}{2a^2(1+\mu)} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \frac{y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (h)$$

当 $m \neq 1$ 时, $\int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = 0$, 得出 $B_{mn} = 0$ 。当 $m = 1$ 时, 式(h)成为

$$\begin{aligned} & \frac{E\pi^2 ab}{4} \left[\frac{n^2}{b^2(1-\mu^2)} + \frac{1}{2a^2(1+\mu)} \right] B_{1n} \\ &= \frac{E\pi^2\eta}{2a^2(1+\mu)} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx \int_0^b \frac{y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ &= \frac{E\pi b}{4a(1+\mu)n} \eta \end{aligned}$$

由此得

$$B_{1n} = \frac{\eta}{\pi a^2} \cdot \frac{1}{n \left[\frac{n^2}{b^2(1-\mu)} + \frac{1}{2a^2} \right]}.$$

代入式(f), 只保留 $m = 1$ 的各项, 得

$$u = 0, \quad v = -\eta \frac{y}{b} \sin \frac{\pi x}{a} + \sum_n \frac{n}{\pi a^2} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left[\frac{n^2}{b^2(1-\mu)} + \frac{1}{2a^2} \right]},$$

或

$$u = 0, \quad v = -\eta \sin \frac{\pi x}{a} \left[\frac{y}{b} - \frac{1}{\pi} \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi y}{b}}{\frac{n^3 a^2}{b^2(1-\mu)} + \frac{n}{2}} \right]. \quad (i)$$

利用物理方程及几何方程, 可由式(i)求得应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{E\mu}{1-\mu^2} \frac{\eta}{b} \sin \frac{\pi x}{a} \left[1 - \sum_n \frac{\cos \frac{n\pi y}{b}}{\frac{n^2 a^2}{b^2(1-\mu)} + \frac{1}{2}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ &= -\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\eta}{b}\sin\frac{\pi x}{a}\left[1 - \sum_n \frac{\cos\frac{n\pi y}{b}}{\frac{n^2 a^2}{b^2(1-\mu)} + \frac{1}{2}}\right], \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ &= -\frac{\pi E}{2(1+\mu)}\frac{\eta}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\left[\frac{y}{b} - \frac{1}{\pi}\sum_n \frac{(-1)^n \sin\frac{n\pi y}{b}}{\frac{n^3 a^2}{b^2(1-\mu)} - \frac{n}{2}}\right].\end{aligned}$$

当 $\mu=0$ 及 $b=a$ 时, 由上列各式得

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= -E\frac{\eta}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\left[1 - 2\sum_n \frac{\cos\frac{n\pi y}{a}}{2n^2 + 1}\right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{\pi}{2}E\frac{\eta}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\left[\frac{y}{a} - \frac{2}{\pi}\sum_n \frac{\sin\frac{n\pi y}{a}}{(2n^2 + 1)n}\right].\end{aligned}$$

在 $y=b=a$ 处,

$$\begin{aligned}\bar{Y} = \sigma_y &= -\frac{E\eta}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\left(1 - 2\sum_n \frac{1}{2n^2 + 1}\right) \\ &= -1.89\frac{E\eta}{a}\sin\frac{\pi x}{a}, \\ \bar{X} = \tau_{xy} &= -\frac{\pi}{2}E\frac{\eta}{a}\cos\frac{\pi x}{a} = -1.57\frac{E\eta}{a}\cos\frac{\pi x}{a}.\end{aligned}$$

这就是为了维持上述边界位移而需要在 $y=b$ 处所施的面力。

应用极小势能原理的表达式 (5-22) 或虚功方程 (5-23) 计算上述两题, 将得到同样的结果。下面应用极小势能原理来计算图 5-10 所示的例题。由于位移分量已取为式 (a), 而且位移的变分只

是由系数 A_{mn} 、 B_{mn} 的变分来实现, 因而由式(5-19)及(5-21)可见, 形变势能 U 与外力势能 V 都成为系数 A_{mn} 及 B_{mn} 的函数, 于是总势能成为极值的条件是

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial A_{mn}}=0, \quad \frac{\partial(U+V)}{\partial B_{mn}}=0,$$

或改写为

$$\frac{\partial U}{\partial A_{mn}} = -\frac{\partial V}{\partial A_{mn}}, \quad \frac{\partial U}{\partial B_{mn}} = -\frac{\partial V}{\partial B_{mn}}. \quad (j)$$

将式(a)代入式(5-21), 再代入(j), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_{mn}} &= \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &\quad + \int \bar{X} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} ds, \\ \frac{\partial U}{\partial B_{mn}} &= \int_0^a \int_0^b Y \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &\quad + \int \bar{Y} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} ds. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

由于位移分量在边界上为零, 上列两式中等号右边的线积分项为零, 于是式(k)与式(b)完全一样。

习 题

5-1. 试导出四阶导数的差分公式(5-6)至(5-8)。

5-2. 对于图 5-4 所示深梁,

(1) 试建立结点 11、12 处的差分方程, 并将 φ 的解答代入, 以资校核;

(2) 试求出 LB 截面上各结点的 σ_x 值以及 7、8、9、 G 各结点的 σ_y 值。

5-3. 用差分法计算图 5-12 所示基础的最大拉应力, 并与材料力学给出的解答对比, 采用 2×4 的网格, 如图所示。

答案: 差分法给出 $(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_x)_A = 1.28q$, 材料力学公式给出 $\sigma_{\max} = (\sigma_x)_A = 2.25q$ 。

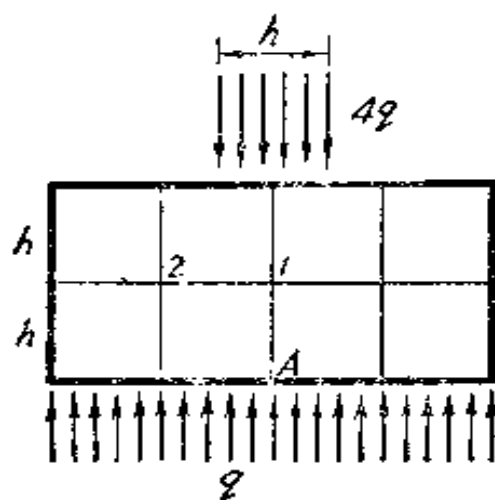


图 5-12

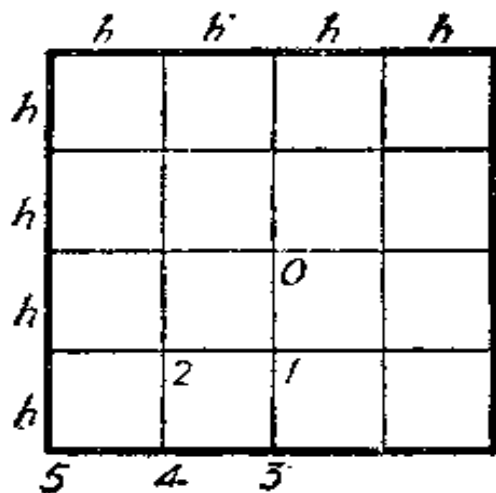


图 5-13

5-4. 图 5-13 示一混凝土柱的正方形截面。在混凝土散热期间的某一时刻, 柱中温度超出浇筑时温度的数值是: 在结点 0 为 $T=T_0$, 在 1 型的结点为 $T=\frac{3}{4}T_0$, 在 2 型的结点为 $T=\frac{9}{16}T_0$, 在边界结点为 $T=0$ 。试求温度应力, 并画出截面上的应力分布图。

提示: 温度场可作为平面温度场, 应力场可作为处于平面应变的情况。由于对称, 只有三个独立的未知 φ 值。

答案: $(\sigma_x)_s = 0.531 \frac{E\alpha T_0}{1-\mu}$

5-5. 试用虚功方程计算图 5-10 所示例题。

5-6. 试用瑞次法计算图 5-11 所示例题。

5-7. 铅直平面内的正方形薄板, 边长为 $2a$, 四边固定, 图 5-14, 只受重力的作用。设 $\mu=0$, 试取位移分量的表达式为

$$u = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \frac{x}{a} \frac{y}{a} \left(A_1 + A_2 \frac{x^2}{a^2} + A_3 \frac{y^2}{a^2} + \dots\right),$$

$$v = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \left(B_1 + B_2 \frac{x^2}{a^2} + B_3 \frac{y^2}{a^2} + \dots\right),$$

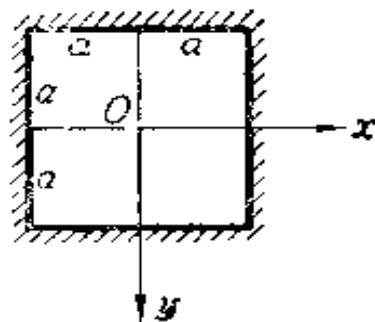


图 5-14

用瑞次法或伽辽金法求解(在 u 的表达式中, 布置了因子 x 和 y , 因为按照问题的对称条件, u 应为 x 和 y 的奇函数)。

答案: 当只取 A_1 项及 B_1 项时, 得:

$$\sigma_x = -\frac{450}{533} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \rho g y.$$

第六章 用有限单元法解平面问题

§ 6-1 基本量及基本方程的矩阵表示

从上一章中对于差分法与变分法的讨论可以看出, 当实际问题的边界条件比较复杂时, 要从这两种数值解法获得解答, 仍是很困难的。有限单元法也是一种数值解法, 但可以用来解决各种复杂的边界问题。在有限单元法中, 为了简洁清晰地表示各种基本量之间的关系, 也为了便于应用电子计算机进行实际计算, 大量采用了矩阵表示与矩阵运算。因此, 在这一节中, 先来介绍以前已经遇到的一些基本量及基本方程的矩阵表示。

物体所受的体力分量 X 、 Y 、 Z 可以用一个列阵 $\{p\}$ 来表示其总体:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = [X \quad Y \quad Z]^T. \quad (6-1)$$

这里用波纹括号 $\{ \}$ 表示列阵, 而方括号 $[\quad]$ 表示普通的矩阵或行阵, 上标 T 表示矩阵的转置。

在平面问题里, 不论是平面应力问题还是平面应变问题, 都有 $Z=0$, 因此式(6-1)可以简化为

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = [X \quad Y]^T. \quad (6-2)$$

同样, 物体所受的面力分量 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} 可以用列阵表示为

$$\{\bar{p}\} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} = [\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{Z}]^T. \quad (6-3)$$

在平面问题里, $\bar{Z} = 0$, 式(6-3)可以简化为

$$\{\bar{p}\} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} [\bar{X} \quad \bar{Y}]^T, \quad (6-4)$$

物体任一点的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 可以用列阵表示为

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T. \quad (6-5)$$

在平面问题里, 只有 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 三个独立的应力分量, 于是式(6-5)可以简化为

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T. \quad (6-6)$$

物体任一点的应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 可以用列阵表示为

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T. \quad (6-7)$$

在平面问题里, 只有 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 三个独立的应变分量, 于是式(6-7)可以简化为

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T. \quad (6-8)$$

物体任一点的位移分量 u, v, w 可以用列阵表示为

$$\{f\} = [u \quad v \quad w]^T. \quad (6-9)$$

在平面问题里, 或者 w 等于零(平面应变问题), 或者 w 不必计算(平面应力问题), 于是式(6-9)可以简化为

$$\{f\} = [u \quad v]^T. \quad (6-10)$$

一般说来, 以上(6-1)、(6-3)、(6-5)、(6-7)与(6-9)各式中的分量都是 x, y, z 三个坐标的函数, 而(6-2)、(6-4)、(6-6)、(6-8)与(6-10)各式中的分量都只是 x, y 两个坐标的函数。

有了基本量的矩阵表达式, 极易将基本方程用矩阵来表示。平面问题的几何方程(2-3)可以用矩阵表示为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (6-11)$$

平面应力问题的物理方程(2-11)可以用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (6-12)$$

或简写成为

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}, \quad (6-13)$$

其中列阵 $\{\sigma\}$ 及 $\{\varepsilon\}$ 分别如式(6-6)及(6-8)所示,而矩阵 $[D]$ 为

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (6-14)$$

这个矩阵中只包含弹性常数 E 与 μ ,称为平面应力问题的弹性矩阵。平面应变问题的物理方程也可以用矩阵表示为式(6-13),但须将(6-14)所示弹性矩阵 $[D]$ 中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

除了几何方程与物理方程之外,平衡微分方程以及应力边界条件与位移边界条件,也都可以用矩阵来表示。但是,在本章讨论的有限单元位移法中,与瑞次法一样,位移边界条件通常是预先予以满足,而平衡微分方程与应力边界条件通常可以用虚功方程来代替。这是因为由§5-7已经知道,虚功方程或位移变分方程一样可以代替平衡微分方程和应力边界条件。所以,这里只讨论虚功方程的矩阵表示。

下面用 u^*, v^* 表示虚位移, 亦即位移的变分 $\delta u, \delta v$; 用 $\epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \gamma_{xy}^*$ 表示与该虚位移相应的虚应变, 亦即应变的变分 $\delta \epsilon_x, \delta \epsilon_y, \delta \gamma_{xy}$ 。于是虚功方程(5-23)可以用矩阵表示为

$$\iint \{f^*\}^T \{p\} dx dy + \int \{f^*\}^T \{\bar{p}\} ds = \iint \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy, \quad (c)$$

其中 $\{p\}, \{\bar{p}\}, \{\sigma\}$ 如(6-2)、(6-4)、(6-6)三式所示, 而

$$\{f^*\} = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \end{Bmatrix},$$

$$\{\epsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^* \\ \epsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix}.$$

在有限单元法中, 作用在弹性体上的体力与面力都以作用在一些点上的集中力来代替。在厚度为 t 的薄板中, 图 6-1, 设作用在 i 点的外力沿坐标轴的分量为 U_i, V_i , 在 j 点的外力沿坐标轴的分量为 U_j, V_j , 等等。这些外力的总体以及在这些点的虚位移分量 $u_i^*, v_i^*, u_j^*, v_j^*, \dots$, 可以用列阵表示为

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \{\delta^*\} = \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ \vdots \end{Bmatrix}.$$

于是外力在虚位移上的虚功是

$$U_i u_i^* + V_i v_i^* + U_j u_j^* + V_j v_j^* + \dots = \{\delta^*\}^T \{F\}.$$

将它除以薄板的厚度 t , 得出薄板单位厚度上外力的虚功, 以代替式(a)的左边, 于是式(a)成为

$$\{\delta^*\}^T \{F\} = \iint \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy t. \quad (6-15)$$

以后就用上式来代替平衡微分方程与应力边界条件。

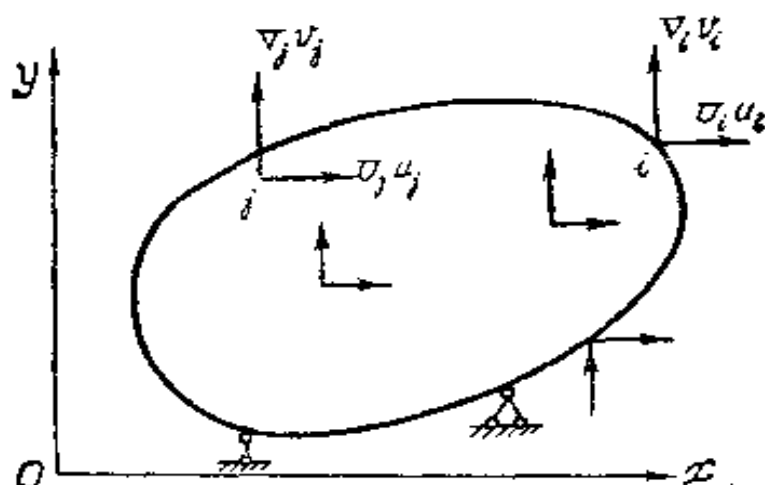


图 6-1

§ 6-2 有限单元法的概念

本节中以平面问题为例，概述有限单元法的计算简图与分析步骤。

为了能用结构力学里的方法计算弹性力学上的问题，首先对弹性体进行所谓离散化：把一个连续的弹性体变换成为一个离散的结构物。离散结构物是由有限多个有限大小的构件在有限多个结点相互联系而组成。这些有限大小的构件就称为有限单元，也简称为单元。对于每个具体问题，离散化的具体内容就是决定单元的形状、数目、大小、布局与结点连接型式。对于平面问题，最简单、因而最常用的单元是三角形单元，在平面应力问题中，它们是三角板，见图 6-2 所示的深梁；在平面应变问题中，它们是三棱柱，见图 6-3 所示的重力坝。至于单元的数目多少，面积大小与布局情况，主要取决于对计算精度的要求以及对弹性体内位移与应力变化趋势的认识。在精度要求较高处

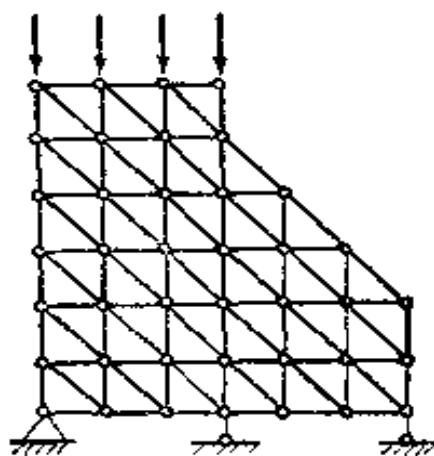


图 6-2

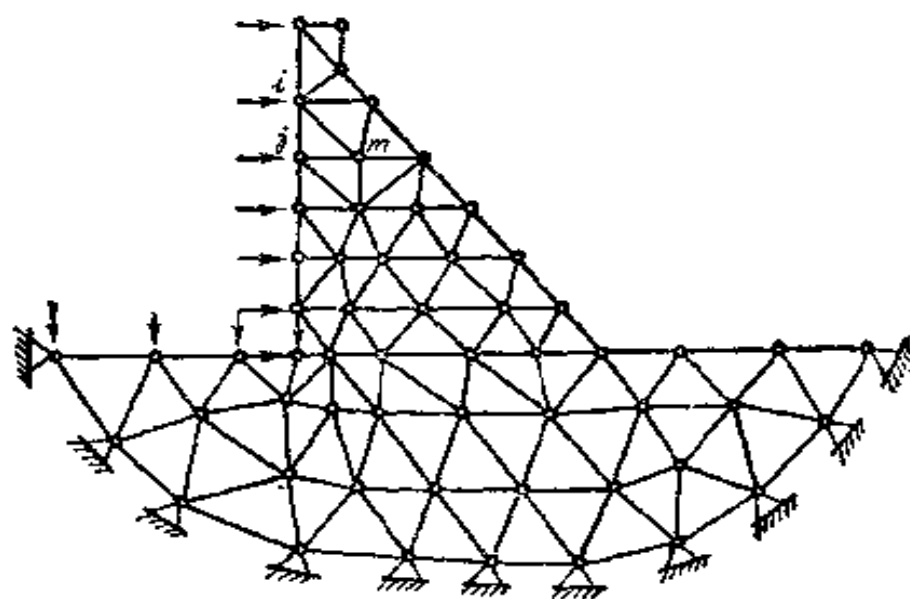


图 6-3

或应力变化较剧烈处,单元应当布置得多些,小些,稠密些;反之则单元可以少些,大些,稀疏些。

对于离散化了的结构物上的每个结点均须编上序号,称为结点的整体编码。在平面问题中,每个结点有两个坐标方向的位移分量,例如在图 6-3 中,整体编码为 i 的结点的位移分量为 $\{\delta_i\} = [u_i, v_i]^T$, 整体编码为 j 的结点的位移分量为 $\{\delta_j\} = [u_j, v_j]^T$ 等等,因而所有结点的连接型式都取为铰接。对于已知位移的边界条件,用给定该边界上的结点位移值来代替,例如在结点位移或其某一分量可以不计之处,就在结点上安置一个铰支座或相应的连杆支座。对于已知面力的边界条件,将每一单元所受的面力按静力等效的原则移置到该单元的结点上。每一单元所受的体力也同样地移置。于是,离散化了的弹性体所受的荷载全是作用在结点上的结点荷载,例如在 i 点为 $\{R_i\} = [X_i, Y_i]^T$, 在 j 点为 $\{R_j\} = [X_j, Y_j]^T$ 等等。这样就得出用有限单元法解平面问题时的计算简图:有限多个有限大小的单元在结点处用铰联系起来的集合体,在结点上具有已知的结点位移或结点荷载。

采用的计算方法, 是结构力学中的位移法。取为基本未知量的是结点位移, 它们可以用整体结点位移列阵 $\{\delta\}$ 来表示:

$$\{\delta\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \cdots u_i \quad v_i \cdots u_j \quad v_j \cdots]^T,$$

当 $\{\delta\}$ 求出后, 任一单元(它的三个结点的整体编码为 i, j, m) 上结点位移的列阵

$$\{\delta\}^e = [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m]^T$$

也完全确定了。

为了能由式(6-11)求出单元的应变 $\{e\}$, 进而由式(6-13)求出单元的应力 $\{\sigma\}$, 必须知道单元内任一点的位移 $\{f\} = [u \quad v]^T$, 其中 u, v 均是坐标的函数。这就需要建立由单元的结点位移求单元内任一点位移的转换式, 即

$$\{f\}_{2 \times 1} = [N]_{2 \times 6} \{\delta\}_{6 \times 1}, \quad (6-16)$$

其中矩阵 $[N]$ 是一个 2×6 的转换矩阵, 它的每一个元素都是坐标的已知函数。上式表示了单元内位移的变化规律, 因而称为单元的位移模式。由于单元比较小, 位移在单元内的变化规律可以用比较简单的函数来表示。

有了式(6-16), 就不难由式(6-11)求出单元中的应变用结点位移来表示的表达式

$$\{e\}_{3 \times 1} = [B]_{3 \times 6} \{\delta\}_{6 \times 1}, \quad (6-17)$$

其中 $[B]$ 是一个 3×6 的矩阵, 称为应变转换矩阵。再由式(6-13)可求出单元中的应力用结点位移来表示的表达式

$$\{\sigma\}_{3 \times 1} = [S]_{3 \times 6} \{\delta\}_{6 \times 1}, \quad (6-18)$$

其中 $[S]$ 也是一个 3×6 的矩阵, 称为应力转换矩阵。

现在剩下的问题, 只是如何求得作为基本未知量的整体结点位移列阵 $\{\delta\}$ 。与结构力学中的位移法一样, 用来求解基本未知量的方程, 是结点的平衡方程。由于计算简图中的每个单元, 例如图 6-4a 所示的单元 ijm , 仅在 i, j, m 三个结点与周围的单元相联

系,而且体力和面力已经移置到结点上,因此,该单元所受的力只是经过结点传过来的所谓结点力,可用列阵表示为:

$$\{F\}^e = [U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j \quad U_m \quad V_m]^T.$$

显然,结点 i, j, m 也将受有该单元所施的力,与这些结点力大小相等而方向相反。例如图 6-4b 所示的结点 i ,就受有上述单元 ijm 所施的、沿负标向的 U_i 及 V_i 。同样,环绕结点 i 的其他单元也对结点 i 施有这样的力。此外,结点 i 一般还受有由环绕该结点的那些单元上移置而来的结点荷载 X_i 及 Y_i 。根据结点 i 的平衡条件,有平衡方程

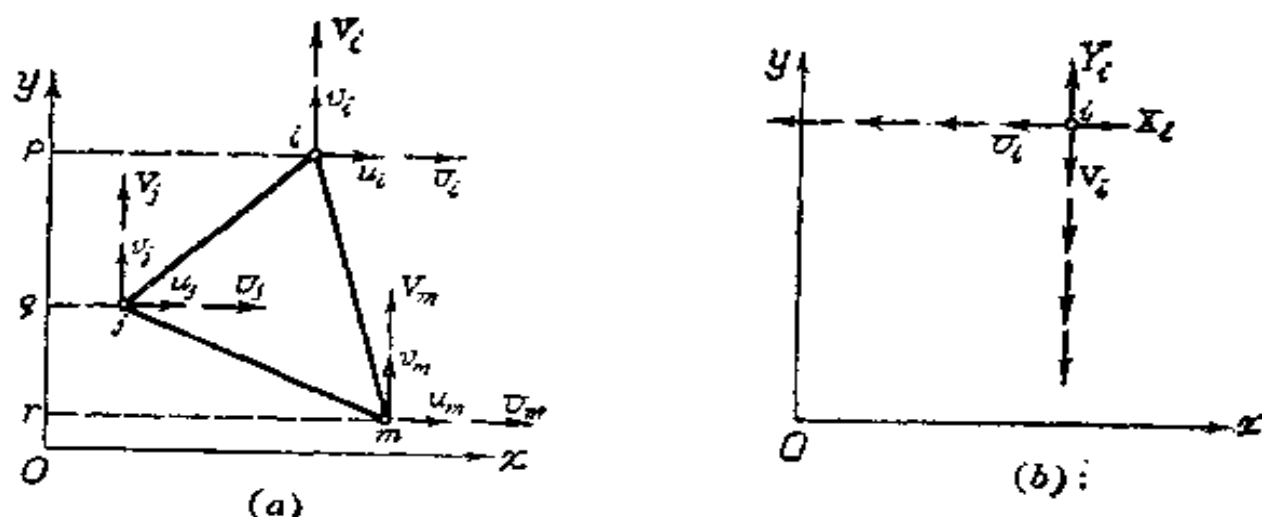


图 6-4

$$\sum_e U_i = X_i,$$

$$\sum_e V_i = Y_i,$$

其中 \sum_e 表示对那些环绕结点 i 的所有单元求和。上列平衡方程也可以用矩阵表示为

$$\sum_e \{F_i\} = \{R_i\}, \quad (6-19)$$

其中 $\{F_i\} = [U_i \quad V_i]^T$ 是作用在 i 结点上的结点力。

在每一个单元上,都可以把结点力 $\{F\}^e$ 用结点位移 $\{\delta\}^e$ 来表示,也就是建立关系式

$$\{F\}_{6 \times 1}^e = [k]_{6 \times 6} \{\delta\}_{6 \times 1}^e, \quad (6-20)$$

其中 $[k]$ 是一个 6×6 的矩阵,是单元的结点位移与单元的结点力之间的转换矩阵,称为单元的劲度矩阵。这样,结点力 U_i, V_i, \dots 就能用结点位移 u_i, v_i, \dots 来表示。将这些表达式代入平衡方程(6-19),就得到以结点位移为未知量的方程。由于对每个结点都可以建立一个平衡方程(6-19),因此,方程的总数与未知量的总数相等。将每个结点平衡方程按照结点的序号依次排列起来,并用矩阵形式来表示该方程组,得结构的整体平衡方程组

$$[K]\{\delta\} = \{R\}, \quad (6-21)$$

其中 $[K]$ 称为结构的整体劲度矩阵, $\{\delta\}$ 是结构的整体结点位移列阵, $\{R\}$ 则是结构的整体结点荷载列阵,即

$$\{R\} = [X_1 \quad Y_1 \quad X_2 \quad Y_2 \cdots X_i \quad Y_i \cdots X_j \quad Y_j \cdots]^T.$$

求解方程组(6-21),即可得出结点位移。

求出结点位移以后,就可以用(6-18)求得各单元中的应力。

综上所述,有限单元法主要包括两方面的内容。第一方面的内容是对单个单元的研究,即建立单元的位移模式、荷载列阵、应力转换矩阵 $[S]$ 、劲度矩阵 $[k]$ 等等;第二方面的内容是将各个单元集成离散的结构物,以代替原来的连续弹性体,即整体劲度矩阵 $[K]$ 与整体结点荷载列阵 $\{R\}$ 的建立,以及方程组(6-21)的求解。

§ 6-3 位移模式与解答的收敛性

从本节开始,我们从离散的结构物中任意取出一个三角形单元进行弹性力学分析。由于各个单元的结点整体编码是不一样

的,为了讨论的一般性起见,本节以及下面两节进行单元分析时,对于所取出的单元均不用其结点的整体编码,而一律均用 i, j, m 表示其三个结点号,称为单元结点的局部编码。在分析中,每一单元被当做是一个连续的、均匀的、各向同性的完全弹性体。

现在来讨论三角形单元的位移模式。假定单元中的位移分量是坐标的线性函数,即

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \quad v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \quad (a)$$

在 i, j, m 三点,图 6-4a, 应当有

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, & v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i, \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j, & v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j, \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m, & v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

按照克来姆法则,由式(b)的左边三个方程可以解得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(x_j y_m - x_m y_j) u_i + (x_m y_i - x_i y_m) u_j + (x_i y_j - x_j y_i) u_m}{x_j y_m - x_m y_j + x_m y_i - x_i y_m + x_i y_j - x_j y_i} \\ \alpha_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(y_j - y_m) u_i + (y_m - y_i) u_j + (y_i - y_j) u_m}{x_j y_m - x_m y_j + x_m y_i - x_i y_m + x_i y_j - x_j y_i} \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}} = \frac{(x_m - x_j)u_i + (x_i - x_m)u_j + (x_j - x_i)u_m}{x_j y_m - x_m y_j + x_m y_i - x_i y_m + x_i y_j - x_j y_i}$$

由图 6-4a 可见, 三角形 ijm 的面积 A 等于梯形 $mipr$ 的面积减去梯形 $ijqp$ 的面积, 再减去梯形 $jmrq$ 的面积, 即

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_i + x_m}{2} (y_i - y_m) - \frac{x_i + x_j}{2} (y_i - y_j) \\ &\quad - \frac{x_j + x_m}{2} (y_j - y_m) = \frac{1}{2} (x_j y_m - x_m y_j + x_m y_i \\ &\quad - x_i y_m + x_i y_j - x_j y_i). \end{aligned} \quad (d)$$

由此可见, (c) 中三式右边的分母就是三角形面积的二倍即 $2A$ 。同时也显然可见, 为了得出的面积 A 不致成为负值, 结点 i, j, m 的次序必须是逆时针转向, 如图 6-4a 所示。再引用记号

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j, \quad (6-22)$$

(i, j, m)¹⁾

则式(c)可以写成

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m}{2A}, \quad \alpha_2 = \frac{b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m}{2A}, \\ \alpha_3 &= \frac{c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m}{2A} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

1) 公式后面附有记号 (i, j, m) 表示每个公式实际上代表三个公式, 其余两个公式系由其中的下标 i, j, m 轮换得来。这就是说, 这里还有另外六个公式如下:

$$\begin{aligned} a_j &= x_m y_i - x_i y_m, \quad b_j = y_m - y_i, \quad c_j = x_i - x_m, \\ a_m &= x_i y_j - x_j y_i, \quad b_m = y_i - y_j, \quad c_m = x_j - x_i. \end{aligned}$$

以后将经常采用这种表示方法, 以节省篇幅。

同样由式(b)右边的三个方程可以解得

$$\left. \begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{a_i v_i}{2A} - \frac{a_j v_j + a_m v_m}{2A}, & \alpha_5 &= \frac{b_i v_i + b_j v_j}{2A} - b_m v_m, \\ \alpha_6 &= \frac{c_i v_i}{2A} - \frac{c_j v_j + c_m v_m}{2A} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

将式(e)、(f)代回(a), 整理以后, 得

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m, \quad v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m, \quad (6-23)$$

其中

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A, \quad (i, j, m) \quad (6-24)$$

式(6-23)可以改写为(6-16)所示的矩阵形式

$$\begin{aligned} \{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \\ &= [IN_i \quad IN_j \quad IN_m] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e, \end{aligned} \quad (6-25)$$

其中 $I = [I]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是二阶单位阵。这里的 N_i 、 N_j 、 N_m 如式(6-24)所示, 是坐标的线性函数, 它们反映单元的位移形态, 因而称为位移的形态函数, 或简称为形函数。矩阵 $[N]$ 则称为形函数矩阵。

由(6-22)及式(d)不难看出

$$a_i + a_j + a_m = 2A, \quad b_i + b_j + b_m = 0, \quad c_i + c_j + c_m = 0,$$

于是由式(6-24)可见有

$$N_i + N_j + N_m = 1. \quad (6-26)$$

将(6-22)及式(d)代入(6-24),得

$$N_i = \frac{(x_j y_m - x_m y_j) + (y_j - y_m)x + (x_m - x_j)y}{x_j y_m - x_m y_j + x_m y_i - x_i y_m + x_i y_j - x_j y_i} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}}.$$

于是由行列式的性质可知

$$(N_i)_i = 1, \quad (N_i)_{j,m} = 0. \quad (6-27)$$

也就是说, N_i 在 i 点的函数值为 1, 在 j 点及 m 点的函数值为 0。又由于 N_i 是坐标的线性函数, 因而极易将 N_i 用图形表示如图 6-5a。在三角形 ijm 的形心 $N_i = 1/3$, 在 ij 及 im 两边的中点, $N_i = \frac{1}{2}$, 并且有下式成立:

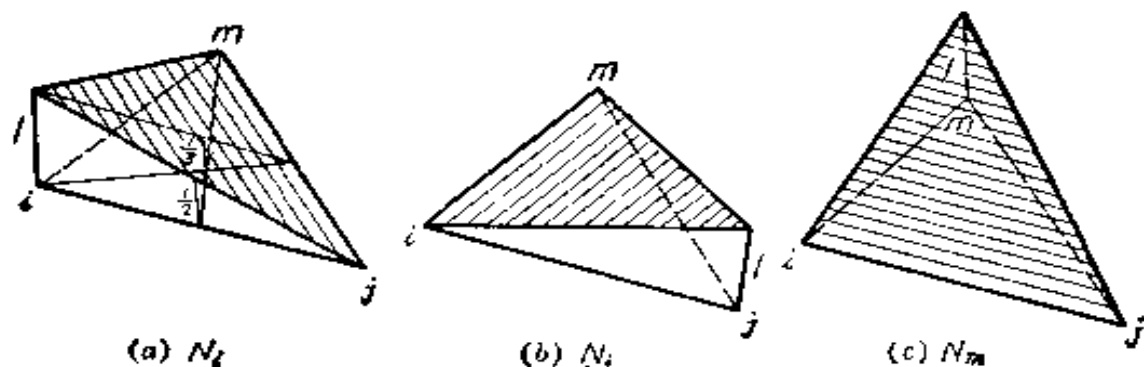


图 6-5

$$\iint_A N_i dx dy = A/3, \quad \int_{ij} N_i ds = \frac{1}{2} \overline{ij}. \quad (6-28)$$

其中 \overline{ij} 是 ij 边的长度。 N_j 和 N_m 类似地可用图形示于图 6-5b 和图 6-5c, 并且也具有类似于已导出的(6-27)和(6-28)两式所示

的性质。

在有限单元法中, 荷载的移置以及应力转换矩阵和劲度矩阵的建立等等, 都依赖于位移模式。因此, 为了能从有限单元法得出正确的解答, 首先必须使位移模式能够正确反应弹性体中的真实位移形态, 具体说来, 就是要满足下列三方面的条件。

(1) 位移模式必须能反映单元的刚体位移。每个单元的位移一般总是包含着两部分: 一部分是由本单元的形变引起的, 另一部分是与本单元的形变无关的, 即刚体位移, 它是由于其它单元发生了形变而连带引起的。甚至, 在弹性体的某些部位, 例如在靠近悬臂梁的自由端处, 单元的形变很小, 单元的位移主要是由于其他单元发生形变而引起的刚体位移。因此, 为了正确反映单元的位移形态, 位移模式必须能反映该单元的刚体位移。

(2) 位移模式必须能反应单元的常量应变。每个单元的应变一般总是包含着两个部分: 一个部分是与该单元中各点的位置坐标有关的, 是各点不同的, 即所谓变量应变; 另一部分是与位置坐标无关的, 是各点相同的, 即所谓常量应变。而且, 当单元的尺寸较小时, 单元中各点的应变趋于相等, 也就是单元的形变趋于均匀, 因而常量应变就成为应变的主要部分。因此, 为了正确反映单元的形变状态, 位移模式必须能反映该单元的常量应变。

(3) 位移模式应当尽可能反映位移的连续性。在连续弹性体中, 位移是连续的, 不会发生两相邻部分互相脱离或互相侵入的现象。为了使得单元内部的位移保持连续, 必须把位移模式取为坐标的单值连续函数。为了使得相邻单元的位移保持连续, 就要使它们在公共结点处具有相同的位移时, 也能在整个公共边界上具有相同的位移。这样就能使得相邻单元在受力以后既不互相脱离, 也不互相侵入, 而代替原为连续弹性体的那个离散结构物仍然保持为连续弹性体。不难想象, 如果单元很小很小, 而且相邻单元

在公共结点处具有相同的位移，也就能保证它们在整个公共边界上大致具有相同的位移。但是，在实际计算时，不大可能把单元取得如此之小，因此，我们在选取位移模式时，还是应当尽可能使它反映出位移的连续性。

理论和实践都已证明：为了有限单元法的解答在单元的尺寸逐步取小时能够收敛于正确解答，反映刚体位移和常量应变是必要条件，加上反映相邻单元的位移连续性，就是充分条件。

现在来说明，式(a)所示的位移是反映了三角形单元的刚体位移和常量应变的。为此，把(a)改写成为

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x - \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} y + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_6 y - \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2} x + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} x. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

与式(2-4)对比，可见

$$u_0 = \alpha_1, \quad v_0 = \alpha_4, \quad \omega = \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2},$$

它们反映了刚体平移和刚体转动。另一方面，将式(g)代入几何方程(2-3)，可见

$$\epsilon_x = \alpha_2, \quad \epsilon_y = \alpha_6, \quad \gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5,$$

它们反映了常量的正应变和剪应变。总之，6个参数 α_1 到 α_6 ，反映了三个刚体位移和三个常量应变。

现在来说明，式(a)所示的位移模式也反映了相邻单元之间位移的连续性。任意两个相邻的单元，如图6-6中的 ijm 和 ipj ，它们在 i 点的位移相同（都是 u_i 和 v_i ），在 j 点的位移也相同（都是 u_j 和 v_j ）。由于式(a)所示的位移分量在每个单元中都是坐标的线性函数，在公共边界 ij 上当然也是线性变化，所以上述两个相邻

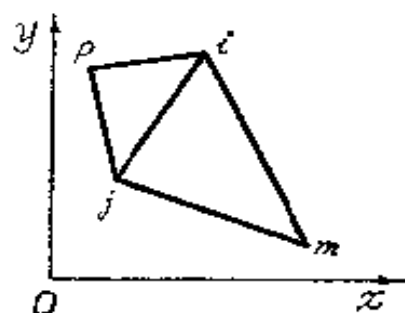


图 6-6

单元在 ij 上的任意一点都具有相同的位移, 这就保证了相邻单元之间位移的连续性。附带指出, 在每一单元的内部, 位移也是连续的, 因为式(a)是多项式, 而多项式都是单值连续函数。

§ 6-4 荷载向结点的移置。荷载列阵

为了简化每个单元的受力情况, 便于分析, 须将该单元所受的每一个荷载都向结点移置(分解)而成为结点荷载。这种移置必须按照静力等效的原则来进行, 因为这样才能使得由于移置而引起的应力误差是局部的, 不影响整体的应力(圣维南原理)。对于变形体, 包括弹性体在内, 所谓静力等效, 是指原荷载与结点荷载在任何虚位移上的虚功都相等。在一定的位移模式之下, 这样移置(分解)的结果是唯一的, 而且总能符合通常所理解的、对刚体而言的静力等效原则, 即, 原荷载与结点荷载在任一轴上的投影之和相等, 对任一轴的力矩之和也相等, 也就是, 在向任一点简化时, 它们将具有相同的主矢量及主矩。

设单元 ijm 在坐标为 (x, y) 的任意一点 M 受有集中荷载 P , 其坐标方向的分量为 P_x 及 P_y , 图 6-7, 用矩阵表示为 $\{P\} = [P_x \ P_y]^T$ 。移置到该单元上各结点处的结点荷载, 用荷载列阵表示为

$$\{R\}^e = [X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j \ X_m \ Y_m]^T,$$

现在, 假想该单元发生了虚位移, 其中, M 点的相应虚位移为

$$\{f^*\} = [u^* \ v^*]^T,$$

而该单元上各结点的相应虚位移为

$$\{\delta^*\}^e = [u_i^* \ v_i^* \ u_j^* \ v_j^* \ u_m^* \ v_m^*]^T.$$

按照静力等效的原则, 即, 结点荷载与原荷载在上述虚位移上的虚

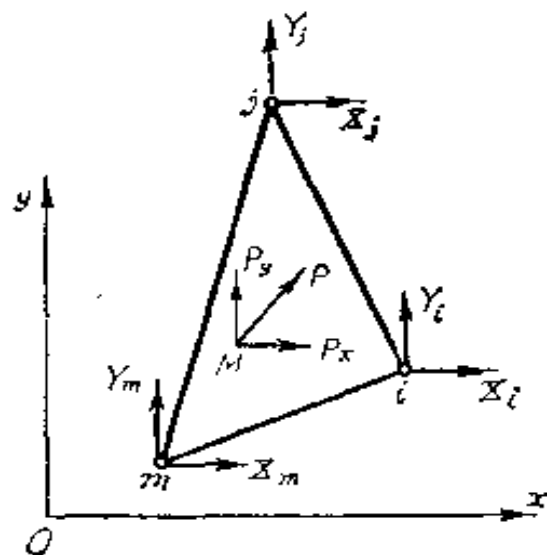


图 6-7

功相等, 我们有

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{R\}^e = \{f^*\}^T \{P\}.$$

将由表达式(6-25)得来的 $\{f^*\} = [N]\{\delta^*\}^e$ 代入, 得

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{R\}^e = ([N]\{\delta^*\}^e)^T \{P\}.$$

根据矩阵乘积的逆序法则, 上式可以化为

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{R\}^e = (\{\delta^*\}^e)^T [N]^T \{P\}.$$

由于虚位移可以是任意的, 从而矩阵 $(\{\delta^*\}^e)^T$ 也是任意的, 等式两边与它相乘的矩阵应当相等, 于是得

$$\{R\}^e = [N]^T \{P\}. \quad (6-29)$$

利用表达式(6-25), 可将它改写为

$$\begin{aligned} \{R\}^e &= [X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j \ X_m \ Y_m]^T \\ &= [N_i P_x \ N_i P_y \ N_j P_x \ N_j P_y \ N_m P_x \ N_m P_y]^T, \end{aligned}$$

其中 N_i , N_j 和 N_m 应是它们在 M 点的函数值。

设上述单元受有分布的体力, 其分量为 X 及 Y , 即, 体力列阵为 $\{p\} = [X \ Y]^T$, 可将微分体积 $t \, dx \, dy$ 上的体力 $\{p\} t dx dy$ 当做集中荷载 P , 利用(6-29)的积分得到

$$\{R\}^e = \iint [N]^T \{p\} t dx dy. \quad (6-30)$$

设上述单元的 ij 边是在弹性体的边界上, 受有分布的面力 \bar{p} , 其分量为 \bar{X} 及 \bar{Y} , 即面力列阵为 $\{\bar{p}\} = [\bar{X} \ \bar{Y}]^T$, 可将微分面积 $t ds$ 上的面力 $\{\bar{p}\} t ds$ 当做集中荷载 P , 利用式(6-29)的积分得到

$$\{R\}^e = \int [N]^T \{\bar{p}\} t ds. \quad (6-31)$$

利用这些公式推求荷载列阵, 当荷载是分布的体力或面力时, 就要进行积分运算, 那是比较繁的。在线性位移模式的情况下, 对于常见的一些荷载, 可以通过很简单的虚功计算, 就得出所需的荷载列阵。

例如, 设有均质、等厚度的三角形单元 ijm , 图6-8, 它受有重力

荷载 W , 作用在单元的重心 c 。根据理论力学有 $\overline{mb} = \overline{bj}$ 及 $\overline{bc} = \frac{1}{3}\overline{bi}$ 。现在来求出应当移置到各结点的荷载。

首先来求出应当移置到结点 i 的铅直荷载 Y_i 。为了计算虚功时最简单, 假想该单元发生这样的虚位移: 结点 i 只沿 Y_i 的方向移动一个单位, 而且其余两个结点都不移动。这就相当于在 j 点和 m 点安置了铰支座, 并在 i 点安置了水平连杆支座, 而容许 i 点有铅直向上的单位位移, 如图 6-8 所示。假定采用 § 6-3 中所述的线性位移模式。由于 mj 边上各点的位移按线性变化, 而 m 点和 j 点的位移都等于零, 可见这边界上任一点的位移都等于零。又由于 bi 线上各点的铅直位移也按线性变化, 在 b 点等于零而在 i 点等于 1, 所以 c 点的铅直位移将为 $\frac{\overline{bc}}{\overline{bi}} = \frac{1}{3}$ 。按静力等效原则, 荷载 W 的虚功应当等于 Y_i 的虚功 (其余的结点荷载都没有沿其作用方向的位移, 因而不做功)。于是有 $-W \times \frac{1}{3} = Y_i \times 1$, 从而得出 $Y_i = -\frac{W}{3}$ 。用同样的方法, 可以得出 $Y_j = -\frac{W}{3}$ 和 $Y_m = -\frac{W}{3}$ 。

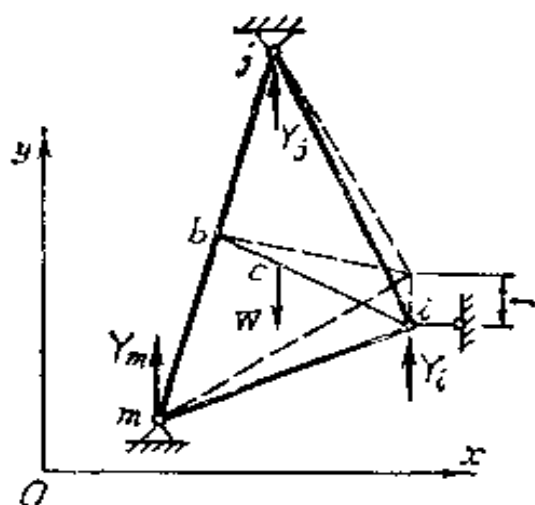


图 6-8

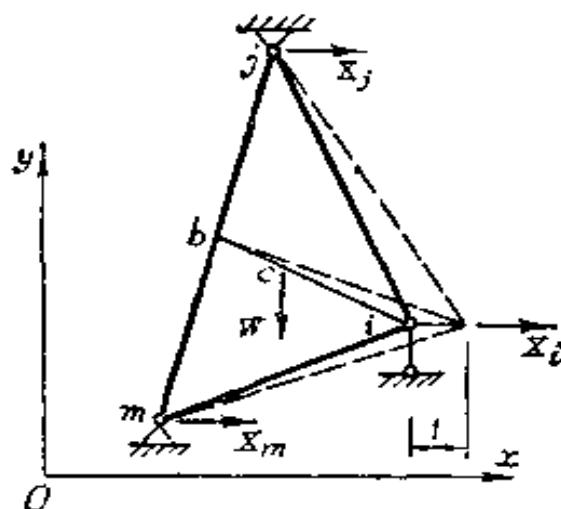


图 6-9

现在来求出移置到结点 i 的水平荷载 X_i 。假想该单元发生这样的虚位移: 结点 i 只沿 X_i 的方向移动一个单位, 而其余两个结点不移动, 如图 6-9 所示。通过与上述类似的分析, 极易看出, c 点的铅直位移等于零 (水平位移则为 $\frac{1}{3}$, 向右)。于是由静力等效原则有 $-W \times 0 = X_i \times 1$, 从而得出 $X_i = 0$ 。同样可以得出 $X_j = 0$ 和 $X_m = 0$ 。

最后的结论是: 对于匀质等厚度的三角形单元所受的重力, 只须把 $\frac{1}{3}$ 的重力移到每个结点上。这完全符合对刚体的静力等效原则, 也符合一般工程上最简单的处理结果。

这样, 由于单元 ijm 所受的重力 W , 应当移置到三个结点的荷载可用荷载列阵表示为

$$\begin{aligned}\{R\}^e &= [X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j \ X_m \ Y_m]^T \\ &= -\frac{W}{3} [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T.\end{aligned}$$

又例如, 设单元 ijm 在 ij 边上受有沿 x 方向的荷载 P , 其作用点距 i 及 j 的距离分别为 l_i 及 l_j , 图 6-10。通过与上述相似的分析, 可见移置到各结点的荷载应为

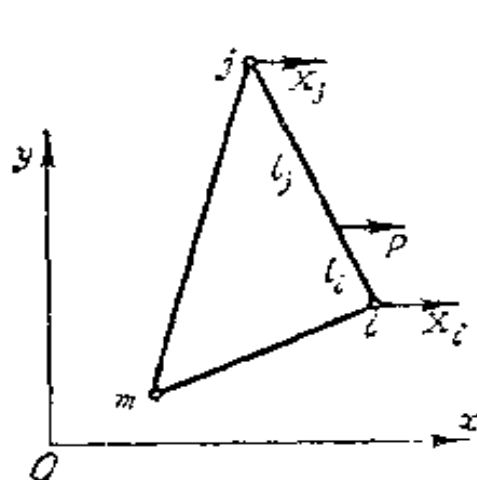


图 6-10

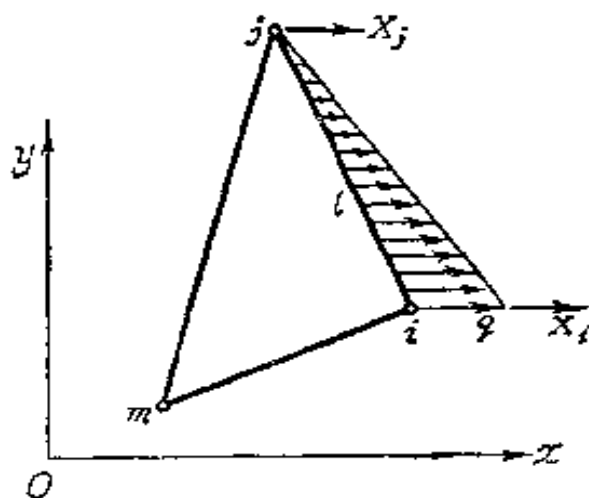


图 6-11

$$X_i = \frac{l_j}{l} P, \quad X_j = \frac{l_i}{l} P,$$

$$X_m = Y_i = Y_j = Y_m = 0,$$

其中 $l = l_i + l_j = \overline{ij}$ 。相应的荷载列阵为

$$\{R\}^e = P \begin{bmatrix} \frac{l_j}{l} & 0 & \frac{l_i}{l} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

如果 ij 边上受有沿 x 方向的按三角形分布的荷载, 它在 i 点的集度为 q , 图 6-11, 则有

$$P = \frac{q}{2} l, \quad \frac{l_j}{l} = \frac{2}{3}, \quad \frac{l_i}{l} = \frac{1}{3}.$$

代入上式, 得荷载列阵为

$$\{R\}^e = \frac{ql}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

这就是说, 应当把总荷载的三分之二移置到结点 i , 三分之一移置到结点 j , 结点荷载与原荷载在同一方向。据此, 可以用叠加法求得边界上受任意线性分布荷载时的荷载列阵。

§ 6-5 应力转换矩阵与劲度矩阵

本节中将利用几何方程、物理方程、虚功方程做到用结点位移表示单元的形变, 从而表示单元的应力, 再从而表示结点力, 也就是, 建立应力转换矩阵与劲度矩阵。

利用几何方程(6-11), 可由式(6-23)及(6-24)得出用结点位移表示单元的形变的表达式:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix},$$

或者简写为式(6-17), 亦即

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}^e,$$

其中的矩阵 $[B]$ 可写为分块形式

$$[B] := [B_i \ B_j \ B_m], \quad (6-32)$$

$$\text{而其子矩阵为 } [B_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \quad (i, j, m) \quad (a)$$

由于单元的面积 A 以及各个 b 和 c 都是常量, 所以矩阵 $[B]$ 的元素都是常量, 可见形变 $\{\epsilon\}$ 的元素也是常量, 就是说, 在每一个单元中, 应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 都是常量。因此, 这里所采用的简单三角形单元, 也称为平面问题的常应变单元。

将表达式(6-17)代入物理方程(6-13), 就得到用结点位移表示单元中应力的表达式

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{\delta\}^e. \quad (6-33)$$

可见, 在每一个单元中, 应力分量也是常量。当然, 相邻单元一般将具有不同的应力, 因而在它们的公共边上, 应力将有突变。但是, 随着单元的逐步取小, 这种突变将急剧减小, 并不妨碍有限单元法的解答收敛于正确解答。

将表达式(6-33)与(6-18)对比, 可见

$$[S] = [D][B]. \quad (6-34)$$

将平面应力问题中弹性矩阵的表达式(6-14)及本节中的表达式(6-32)代入, 即得平面应力问题中的应力转换矩阵, 写成分块形式

$$[S] := [S_i \ S_j \ S_m], \quad (6-35)$$

其中的子矩阵为

$$[S_i] = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i \end{bmatrix}, \quad (i, j, m) \quad (6-36)$$

对于平面应变问题, 要把 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, 于是上式成为

$$[S_i] = \frac{E(1-\mu)}{2(1+\mu)(1-2\mu)A} \begin{bmatrix} b_i & \frac{\mu}{1-\mu}c_i \\ \frac{\mu}{1-\mu}b_i & c_i \\ \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}c_i & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}b_i \end{bmatrix} \quad (6-37)$$

(i, j, m)

现在来导出用结点位移表示结点力的表达式。假想在单元 ijm 中发生了虚位移, 相应的结点虚位移为 $\{\delta^*\}^e$, 引起的虚应变为 $\{e^*\}$ 。因为每一个单元所受的荷载都已经移置到结点上, 所以该单元所受的外力只是结点力 $\{F\}^e$, 而虚功方程(6-15)成为

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint \{e^*\}^T \{\sigma\} dxdydt.$$

将式(6-33)以及由式(6-17)得来的 $\{e^*\} = [B]\{\delta^*\}^e$ 代入, 得

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint ([B]\{\delta^*\}^e)^T [D][B]\{\delta^*\}^e dxdydt.$$

根据矩阵乘积的逆序法则, 上式可以化为

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint (\{\delta^*\}^e)^T [B]^T [D][B]\{\delta^*\}^e dxdydt.$$

由于 $\{\delta^*\}^e$ 中的元素是常量, 上式右边的 $(\{\delta^*\}^e)^T$ 可以提到积分号的前面去。又由于虚位移可以是任意的, 从而矩阵 $(\{\delta^*\}^e)^T$ 也是任意的, 所以等式两边与它相乘的矩阵应当相等, 于是得

$$\{F\}^e = \iiint [B]^T [D][B] dxdydt \{\delta\}^e. \quad (6-38)$$

$$[k] = \iiint [B]^T [D][B] dxdydt. \quad (6-39)$$

则式(6-38)成为(6-20)的形式, 即

$$\{F\}^e = [k] \{\delta\}^e.$$

这就建立了该单元上的结点力与结点位移之间的关系。由于 $[D]$ 中的元素是常量,而且在线性位移模式的情况下, $[B]$ 中的元素也是常量,再注意到 $\iint dxdy = A$,式(6-38)及(6-39)就简化为

$$\{F\}^e = [B]^T [D] [B] tA \{\delta\}^e, \quad (6-40)$$

$$[k] = [B]^T [D] [B] tA. \quad (6-41)$$

矩阵 $[k]$ 就是该单元的劲度矩阵,它的元素表明该单元的各结点沿坐标方向发生单位位移时引起的结点力,它决定于该单元的形状、大小、方位和弹性常数,而与单元的位置无关,即,不随单元或坐标轴的平行移动而改变。

将式(6-32)及(6-14)代入(6-41),即得平面应力问题中简单三角形单元的劲度矩阵,写成分块形式如下:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}, \quad (6-42)$$

其中

$$[k_{rs}] = \frac{Et}{4(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ \mu c_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{bmatrix},$$

$$(r = i, j, m; \quad s = i, j, m) \quad (6-43)$$

注意到 $[k_{rs}] = [k_{sr}]^T$,可见 $[k]$ 是对称矩阵。对于平面应变问题,上式中的 E 应当换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 应当换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$,于是得

$$[k_{rs}] = \frac{E(1-\mu)t}{4(1+\mu)(1-2\mu)A}$$

$$\times \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r c_s & -\frac{\mu}{1-\mu} b_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r b_s \\ -\frac{\mu}{1-\mu} c_r b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r b_s \end{bmatrix} \quad (6-44)$$

($r=i, j, m; s=i, j, m$)

作为简列, 设有平面应力情况下的等腰直角三角形单元 ijm , 图 6-12。在所选的坐标系中,

$$x_i = a, \quad x_j = 0, \quad x_m = 0,$$

$$y_i = 0, \quad y_j = a, \quad y_m = 0.$$

应用 § 6-3 中的公式 (d) 及式 (6-22), 得

$$A = \frac{a^2}{2},$$

$$b_i = a, \quad b_j = 0, \quad b_m = -a,$$

$$c_i = 0, \quad c_j = a, \quad c_m = -a.$$

应用公式 (6-20), (6-42) 及 (6-43), 得

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} = \frac{Et}{2(1-\mu^2)}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} & & & & \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} & \frac{1-\mu}{2} & & & \\ \mu & 0 & 0 & 1 & & \\ -1 & -\frac{1-\mu}{2} & -\frac{1-\mu}{2} & -\mu & \frac{3-\mu}{2} & \\ -\mu & -\frac{1-\mu}{2} & -\frac{1-\mu}{2} & -1 & \frac{1-\mu}{2} & \frac{3-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (b)$$

对 称

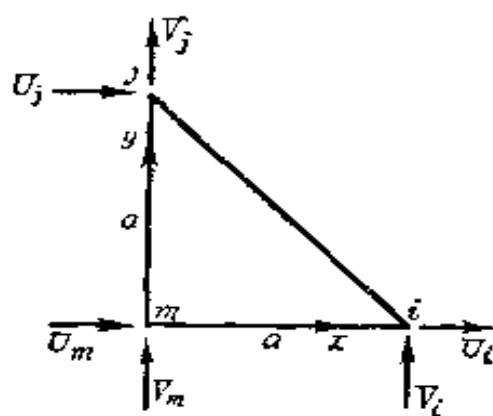


图 6-12

应用公式(6-18)、(6-35)及(6-36), 得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\mu^2)\alpha} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu & -1 & -\mu \\ \mu & 0 & 0 & 1 & -\mu & -1 \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} & \frac{1-\mu}{2} & 0 & -\frac{1-\mu}{2} & -\frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (c)$$

现在, 通过这个简例, 试考察一下结点力与单元中应力两者之间的关系。为简单明了起见, 假定只有结点 i 发生位移 u_i , 图6-13。由式(b)得相应的结点力为

$$\begin{aligned} & [U_i \ V_i \ U_j \ V_j \ U_m \ V_m]^T \\ &= \frac{Et}{2(1-\mu^2)} [1 \ 0 \ 0 \ \mu \ -1 \ -\mu]^T u_i \\ &= P [1 \ 0 \ 0 \ \mu \ -1 \ -\mu]^T, \end{aligned}$$

其中 $P = \frac{Et u_i}{2(1-\mu^2)}$ 。相应的结点位移及结点力如图 6-13 所示。

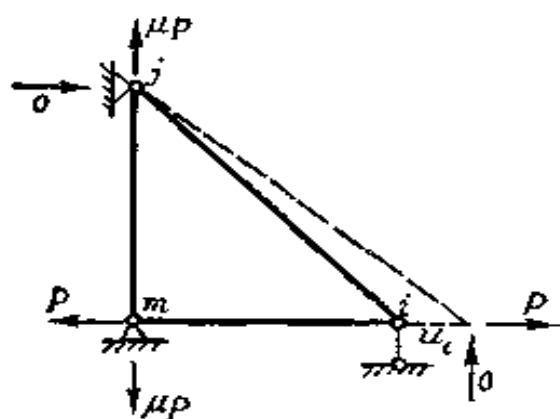


图 6-13

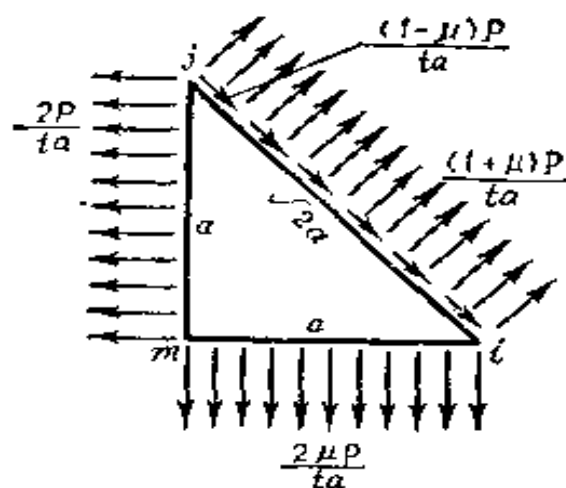


图 6-14

另一方面, 由于这个位移 u_i , 由式(c)得相应的应力为

$$[\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T = -\frac{Eu_i}{(1-\mu^2)a} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \end{bmatrix}^T = -\frac{2P}{ta} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \end{bmatrix}^T,$$

如图 6-14 中 jm 及 mi 二面上所示。根据该单元的平衡条件, 还可得出斜面 ij 上的应力, 如图中所示。对于该单元说来, 这些力也就是作用于三个边界上的面力。现在, 将这三个边界上的面力分别按静力等效原则移置到结点上, 可见将得出与图 6-13 中相同的结点力。例如, 在 mi 边上, 移置到结点 m 的力是向下的

$$\frac{2\mu P}{ta} \cdot at \cdot \frac{1}{2} = \mu P,$$

等等。

由这个简例可见: 在有限单元法中, 各单元上的面力按静力等效原则被移置到结点上而成为结点力, 同时, 各单元上的荷载也按静力等效原则被移置到结点上而成为结点荷载。在“移置”以前, 本来是单元在面力与荷载作用下成平衡的, 在“移置”以后, 就成为结点在结点力与结点荷载作用下成平衡。

§ 6-6 结点平衡方程的建立与集合

这一节中将说明, 如何建立结点的平衡方程, 并将它们集合成为(6-21)所示的平衡方程组。

将式(6-42) 代入式(6-20), 即得单元的结点力用结点位移来表示的表达式

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \quad (a)$$

其中 $\{F_i\}$ 、 $\{\delta_i\}$ 等均是 2×1 的列阵, 而 $[k_{ii}]$ 等均是 2×2 的矩阵, 因此(a)可以进一步写成

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{xx} & k_{ii}^{xy} & k_{ij}^{xx} & k_{ij}^{xy} & k_{im}^{xx} & k_{im}^{xy} \\ k_{ii}^{yx} & k_{ii}^{yy} & k_{ij}^{yx} & k_{ij}^{yy} & k_{im}^{yx} & k_{im}^{yy} \\ \hline k_{ji}^{xx} & k_{ji}^{xy} & k_{jj}^{xx} & k_{jj}^{xy} & k_{jm}^{xx} & k_{jm}^{xy} \\ k_{ji}^{yx} & k_{ji}^{yy} & k_{jj}^{yx} & k_{jj}^{yy} & k_{jm}^{yx} & k_{jm}^{yy} \\ \hline k_{mi}^{xx} & k_{mi}^{xy} & k_{mj}^{xx} & k_{mj}^{xy} & k_{mm}^{xx} & k_{mm}^{xy} \\ k_{mi}^{yx} & k_{mi}^{yy} & k_{mj}^{yx} & k_{mj}^{yy} & k_{mm}^{yx} & k_{mm}^{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}, \quad (b)$$

其中的元素 k 表示单元上由单位位移引起的结点力, 例如 k_{ij}^{xy} 表示当 j 结点沿 x 方向有单位位移时, 在 i 结点 y 方向产生的结点力。余类推。

在式(b)中, $U_i, V_i, U_j, V_j, U_m, V_m$ 是单元的结点用局部编码时的结点力, 然而在建立结点的平衡方程时, 是按照结构的整体结点编码的次序逐点建立的, 并且在平衡方程(6-19)中, 需要的也是各个单元的结点在整体编码下的结点力。为了解决这个问题, 需要确定每个单元的结点局部编码与整体编码之间的关系。为此只须对结构上的每个结点编上整体编码, 然后对各个单元分别确定结点的局部编码 i, j, m , 这就可以确定各个单元的结点局部编码 i, j, m 与三个结点整体编码的对应关系。于是, 对于每个具体的单元, 式(b) 中的 i, j, m 应为结点整体编码中的某个具体点号, 下面我们就这样来理解(a)、(b)二式中的 i, j, m 。

由式(a)可得

$$\{F_i\} = [k_{ii}]\{\delta_i\} + [k_{ij}]\{\delta_j\} + [k_{im}]\{\delta_m\} = \sum_{n=i, j, m} [k_{in}]\{\delta_n\}, \quad (c)$$

将式(c)代入结点平衡方程(6-19), 得到用结点位移表示的结点平衡方程

$$\sum_i \sum_{n=i, j, m} [k_{in}]\{\delta_n\} = \{R_i\}. \quad (6-45)$$

对于每个结点, 都可以写出这样的平衡方程, 实际上它代表两个线

性代数方程。由于式(6-45)中的 \sum 仅是对那些环绕结点 i 的所有单元求和, 因此在该式中只包括环绕着结点 i 的那些结点以及结点 i 本身, 而不包括所有的其它结点。

下面举例说明, 如何建立结点平衡方程(6-45), 并将它们集成方程组(6-21)。

设有如图 6-15a 所示的对角受压的正方形薄板, 荷载沿厚度均匀分布, 为 2 牛顿/米。由于 xz 面及 yz 面均为该薄板的对称

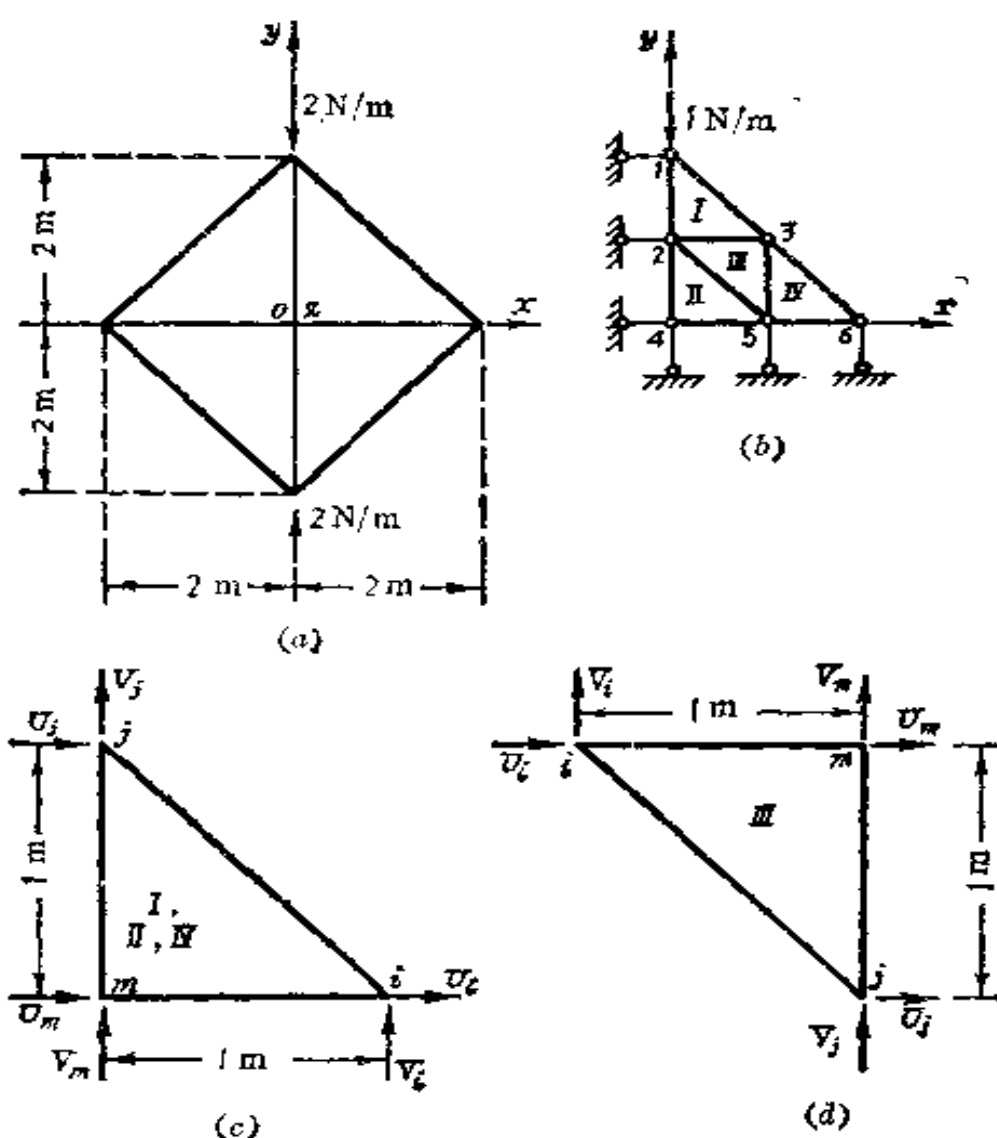


图 6-15

面, 所以只须取四分之一部分作为计算对象, 图 6-15b。将该对象划分为四个单元, 共有六个结点。单元与结点均编上号码, 其中结点的整体编码为 1 到 6, 如图所示。

这里只有两种不同的单元, 一种是单元 I、II、IV, 另一种是单元 III。为两种单元分别编出结点局部编码 i, j, m , 如图 6-15c 及图 6-15d 所示。

由图 6-15b 及图 6-15c、d, 可确定四个单元的结点局部编码与整体编码的对应关系如下:

局 部 编 码	整 体 编 码			
单 元 号	I	II	III	IV
i	3	5	2	6
j	1	2	5	3
m	2	1	3	5

对于单元 I、II、IV, 可求得

$$A = \frac{1}{2} m^2,$$

$$b_i = 1m, \quad b_j = 0, \quad b_m = -1m,$$

$$c_i = 0, \quad c_j = 1m, \quad c_m = -1m;$$

对于单元 III, 可求得

$$A = \frac{1}{2} m^2,$$

$$b_i = -1m, \quad b_j = 0, \quad b_m = 1m,$$

$$c_i = 0, \quad c_j = -1m, \quad c_m = 1m.$$

根据上列数值, 并为简单起见取 $\mu = 0, t = 1$ 米, 应用公式 (6-43) 及 (6-42), 可见两种单元的劲度矩阵都是

$$[k] = \frac{E}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 0 & 1/2 & & & & \\ & 0 & 1/2 & 1/2 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ -1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 3/2 & & \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1 & 1/2 & 3/2 & \end{bmatrix}, \quad (d)$$

即, 结点力与结点位移之间的关系都是

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 0.5 & & & & & \\ & 0 & 0.25 & & & \\ & 0 & 0.25 & 0.25 & & \\ & 0 & 0 & 0 & 0.5 & \\ -0.5 & -0.25 & -0.25 & 0 & 0.75 & \\ 0 & -0.25 & -0.25 & -0.5 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (e)$$

将各单元的结点局部编码与整体编码的对应关系代入, 对于单元 I, 式(e)就成为

$$\begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix},$$

对于单元 II, 式(e)就成为

$$\begin{Bmatrix} U_5 \\ V_5 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix},$$

对于单元Ⅲ、Ⅳ可写出类似的式子, 其中 $[k]$ 如式(d)所示。

由于对称性, 即, 对称面上的各结点没有垂直于对称面的位移, 可见计算简图如图 6-15b 所示, 从而有

$$u_1 = u_2 = u_4 = v_4 = v_5 = v_6 = 0.$$

不等于零的位移, 只有 $v_1, v_2, u_3, v_3, u_5, u_6$ 六个, 因此只须建立六个平衡方程

$$\begin{aligned} \sum_e V_1 &= Y_1, \quad \sum_e V_2 = Y_2, \quad \sum_e U_3 = X_3 \\ \sum_e V_3 &= Y_3, \quad \sum_e U_5 = X_5, \quad \sum_e U_6 = X_6, \end{aligned}$$

其中 $Y_1 = -1$ 牛顿/米、 $Y_2 = X_3 = Y_3 = X_5 = X_6 = 0$ 。各平衡方程的左边是各结点处结点力的总和, 下面举例说明, 如何把它们用结点位移来表示。

例如, $\sum_e V_2$ 表示结点 2 处 y 方向结点力的总和。因为只有环绕结点 2 的各单元的结点位移才会在结点 2 处引起 y 方向的结点力, 所以只须考虑环绕结点 2 的单元 I、II、III。当这三个单元上的各结点位移分别等于一个单位时, 在结点 2 处引起的 y 方向的结点力, 如表 6-1 所示。

表 6 1

结点位移		v_1	v_2	u_3	v_3	u_5
单元	相应的 i, j, m					
I	相应的 i, j, m $V_1 = V_m$	v_2 $E(-0.5)$	v_m $E(0.75)$	u_1 $E(0)$	v_4 $E(-0.25)$	——
II	相应的 i, j, m $V_2 = V_j$	——	v_j $E(0.5)$	——	——	u_4 $E-(0)$
III	相应的 i, j, m $V_3 = V_i$	——	v_j $E(0.25)$	u_m $E(-0.25)$	v_m $E(-0.25)$	u_i $E(0.25)$
\sum_e		$E(-0.5)$	$E(1.5)$	$E(-0.25)$	$E(-0.5)$	$E(0.25)$

在表 6-1 中, 对于单元 I, 只有 v_1, v_2, u_3, v_4 四个不等于零的位移会在结点 2 处引起结点力。根据这四个位移所在的位置, 可知它们分别相应于单元 I 的 v_j, v_m, u_i, v_i 。所求的结点力相应于单元 I 上的 V_m , 所以将单元 I 的劲度矩阵中第六行的第四列、第六列、第一列、第二列各元素填入。对于单元 II 及单元 III, 也同样处理。最后将三个单元上的 V_2 逐列叠加, 得平衡方程 $\sum V_2 = Y_2$ 为

$$E(-0.5v_1 + 1.5v_2 - 0.25u_3 - 0.5v_3 + 0.25u_5) = 0.$$

又如, 对于结点 3 的两个平衡方程, 亦可列表计算, 如表 6-2 所示, 由此得

$$\sum_e V_3 = Y_3 \text{ 为 } E(-0.5v_2 + 0.25u_3 + 1.5v_3 - 0.25u_5) = 0,$$

$$\sum_e U_3 = X_3 \text{ 为 } E(-0.25v_2 + 1.5u_3 + 0.25v_3 - 0.5u_5) = 0.$$

表 6-2

单元 \ 结点位移		v_1	v_2	u_3	v_3	u_5	u_6
I	相应的 i, j, m	v_j	v_m	u_i	v_i	—	—
	$U_3 = U_i$	$E(0)$	$E(0)$	$E(0.5)$	$E(0)$	—	—
	$V_3 = V_i$	$E(0)$	$E(-0.25)$	$E(0)$	$E(0.25)$	—	—
II	相应的 i, j, m	—	v_i	u_m	v_m	u_j	—
	$U_3 = U_m$	—	$E(-0.25)$	$E(0.75)$	$E(0.25)$	$E(-0.25)$	—
	$V_3 = V_m$	—	$E(-0.25)$	$E(0.25)$	$E(0.75)$	$E(-0.25)$	—
IV	相应的 i, j, m	—	—	u_j	v_j	u_m	u_i
	$U_3 = U_j$	—	—	$E(0.25)$	$E(0)$	$E(-0.25)$	$E(0)$
	$V_3 = V_j$	—	—	$E(0)$	$E(0.5)$	$E(0)$	$E(0)$
	$\sum_e U_3$	0	$E(-0.25)$	$E(1.5)$	$E(0.25)$	$E(-0.5)$	0
	$\sum_e V_3$	0	$E(-0.5)$	$E(0.25)$	$E(1.5)$	$E(-0.25)$	0

同样可以立出其余三个结点平衡方程。总共得出六个平衡方程, 用矩阵表示为

$$E \begin{bmatrix} 0.5 & & & & & \\ -0.5 & 1.5 & & & & \\ 0 & -0.25 & 1.5 & & & \\ 0 & -0.5 & 0.25 & 1.5 & & \\ 0 & 0.25 & -0.5 & -0.25 & 1.5 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{对} \\ \\ \\ \text{称} \\ \\ \end{matrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

上式实际上就是对于图 6-15 所示具体问题的结构的整体平衡方程组(6-21), 并且凡是位移为零处均没有建立平衡方程, 这些零位移也不引起任何结点力。

用上述步骤建立结点平衡方程进而集成结构的整体平衡方程组, 在力学意义上是比较清晰明了的, 然而在电子计算机上实现这些步骤时, 将要花费较多的计算时间。下面介绍的方法, 用来建立整体劲度矩阵时, 它所花费的计算时间较少, 因而是经常采用的。

根据各个单元的结点局部编码与整体编码的对应关系, 不难确定任意一个单元劲度矩阵 $[k]$ 中的各个子块在整体劲度矩阵 $[K]$ 中的具体位置。仍以图 6-15 所示结构为例, 它的结构整体平衡方程组(6-21)可以写成

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix}, \quad (g)$$

其中整体劲度矩阵 $[K]$ 按子块形式书写是 6×6 的矩阵, 而它的每一个子块是 2×2 的矩阵, 因此 $[K]$ 实际上是 12×12 的矩阵。 $[K]$ 中的任意一个子块, 例如 $[K_{23}]$ 可以写成

$$[K_{23}] = \begin{bmatrix} K_{23}^{xx} & K_{23}^{xy} \\ K_{23}^{yx} & K_{23}^{yy} \end{bmatrix},$$

其中任一元素,例如 K_{23} ,表示由结构的结点 3 沿 x 方向有单位位移,而在结构的结点 2 的 y 方向上产生的结点力。由于结点 3 与结点 2 在结构中是通过单元 I 与单元 III 两个单元联系起来的,因而 $[K_{23}]$ 应该是单元 I 的 $[k_{23}]$ 与单元 III 的 $[k_{23}]$ 之和。又由结点局部编码与整体编码的关系,可知单元 I 的 $[k_{23}]$ 就是它的 $[k_{m1}]$,单元 III 的 $[k_{23}]$ 就是它的 $[k_{im}]$,因而整体劲度矩阵中的子块 $[K_{23}]$ 应该是单元 I 的劲度矩阵中的子块 $[k_{m1}]$ 与单元 III 的劲度矩阵中的子块 $[k_{im}]$ 之和。换句话说,单元 I 的劲度矩阵中的子块 $[k_{m1}]$ 与单元 III 的劲度矩阵中的子块 $[k_{im}]$ 都应该叠加到整体劲度矩阵中 $[K_{23}]$ 的位置上去。同样,不难找到各个单元劲度矩阵中的所有子块在整体劲度矩阵中的具体位置。于是建立整体劲度矩阵的步骤就成为:将整体劲度矩阵全部充零,逐个单元地建立单元的劲度矩阵;根据单元结点的局部编码与整体编码的关系,将单元劲度矩阵中的每一个子块叠加到整体劲度矩阵的相应位置上。对所有单元全部做完上述步骤,就形成了整体劲度矩阵。

运用上述步骤,图 6-15 所示结构的整体劲度矩阵是

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{jj}^I & k_{jm}^I & k_{ji}^I & & & \\ k_{mj}^I & k_{mm}^I + k_{jj}^{II} + k_{ii}^{III} & k_{mi}^I + k_{im}^{III} & k_{jm}^{IV} & k_{ji}^{II} + k_{ij}^{III} & \\ k_{ij}^I & k_{im}^I + k_{mi}^{III} & k_{ii}^I + k_{mm}^{III} + k_{jj}^{IV} & & k_{mj}^{IV} + k_{jm}^{IV} & k_{ji}^{IV} \\ & k_{mj}^{II} & & k_{mm}^{II} & k_{mi}^{II} & \\ & k_{ij}^{II} + k_{ji}^{III} & k_{jm}^{III} + k_{mj}^{IV} & k_{im}^{IV} & k_{ii}^{II} + k_{jj}^{III} + k_{mm}^{IV} & k_{mi}^{IV} \\ & & k_{ji}^{IV} & & k_{im}^{IV} & k_{ii}^{IV} \end{bmatrix} \quad (h)$$

式中 k 的上角码 I、II、III、IV 表示 k 是哪一个单元劲度矩阵中的子块,空白处是 2×2 的零矩阵。

将(d)中各个子块的具体数值代入(h),相加后得

$$[K] = E \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 & 0 & 0.25 & & \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & & \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc|cc} -0.25 & 0 & 1.5 & 0.25 & -1 & -0.25 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & -0.5 & 0.25 & 1.5 & -0.25 & -0.5 & 0 & -0.5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & -1 & -0.25 & 1.5 & 0.25 & -0.5 & -0.25 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & -0.5 & 0.25 & 1.5 & -0.25 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc|cc} -0.25 & 0 & -0.25 & 0 & & & 0.75 & 0.25 \\ -0.25 & -0.5 & & & & & 0.25 & 0.75 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0.25 & -0.5 & -0.25 & -0.5 & 0 & 1.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & -1 & -0.25 & -0.25 & 0.25 & 1.5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc|cc|cc|cc} & & & & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ & & & & 0.25 & 0 & -0.25 & -0.25 \end{array} \end{bmatrix} \quad (i)$$

由于 $u_1 = u_2 = u_4$, $v_1 = v_3 = v_5 = 0$, 与它们相应的六个平衡方程不必建立, 因此须将式(i)中的第一、三、七、八、十、十二各行以及同样各列划去不要, 式(i)简化为

$$[K] = E \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & -0.25 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & 0.25 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.5 & -0.25 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (j)$$

显然, 式(j)与式(f)中的系数矩阵完全一样。

顺便可以指出, 由于单元劲度矩阵的对称性, 由式(h)可见, 整体劲度矩阵也是对称的。

当结构的整体平衡方程组(f)建立起来后, 求解这一组方程, 得结点位移如下:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_1 \\ v_3 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.252/E \\ -1.252/E \\ 0.088/E \\ -0.372/E \\ 0.176/E \\ 0.176/E \end{Bmatrix}.$$

根据 $\mu = 0$ 以及已求出的 A 值、 b 值和 c 值, 可由公式(6-35)及(6-36)得出两种单元的应力转换矩阵如下: 单元 I、II、IV

$$[S] = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix},$$

单元 III

$$[S] = E \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

于是可用公式(6-18)求得各单元中的应力如下:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_I = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ v_1 \\ 0 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.088 \\ -2.000 \\ 0.440 \end{Bmatrix} (\text{N/m}^2),$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{II} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ 0 \\ 0 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.176 \\ -1.252 \\ 0 \end{Bmatrix} (\text{N/m}^2),$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{III} = E \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_2 \\ u_5 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.088 \\ -0.372 \\ 0.308 \end{Bmatrix} (\text{N/m}^2),$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{IV} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_6 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.372 \\ -0.132 \end{Bmatrix} (\text{N/m}^2).$$

§ 6-7 解题的具体步骤。单元的划分

在应用有限单元法求解平面问题时,计算工作量是很大的,因此,一般只能利用事先编好的计算程序,在电子计算机上进行计算。具体的计算步骤大致如下。

(1) 将计算对象划分成许多三角形单元,也就是画成三角形网格,并按照一定的规律将所有结点与单元分别编上号码。

(2) 任选一个直角坐标系(通常取 x 轴向右而 y 轴向上)。按照计算程序的要求,填写各种输入信息。主要的信息有:每个结点的坐标值,即 x_i, y_i, x_j, y_j 等等;每个单元的单元信息,即单元 i, j, m 三个结点的整体编码;各种材料的弹性常数值;各种荷载信息,即荷载点的点号及荷载大小等等;约束信息,即那些结点哪个方向上的位移为零或为某已知值。将这些信息按照计算程序规定的格式穿成纸带或卡片。

(3) 使用已经编好的计算程序上机计算。计算程序中对输入的各种信息进行加工,运算,一般均有如下几步:形成整体劲度矩阵 $[K]$;形成荷载列阵 $\{R\}$;求解线性代数方程组,解得结构的整体结点位移列阵 $\{\delta\}$;计算各单元的应力分量及主应力、主向;打印

计算成果。

(4) 对计算成果进行整理、分析,用表格或图线示出所需的位移及应力。

在以上的步骤中,大量的运算工作是在第(3)步,都由计算机来完成。但是,其它三步工作仍须用人工进行,而且这三步工作的好坏,对于计算结果的好坏起着决定性的作用。填写信息的工作,必须做到准确无误。下面来说明单元划分中的一些问题。关于计算成果的整理分析,另在下一节中加以详细讨论。

在划分单元时,就整体来说,单元的大小(即网格的疏密)要根据精度的要求和计算机的速度及容量来确定。根据误差分析,应力的误差与单元的尺寸成正比,位移的误差与单元的尺寸的平方成正比,可见单元分的越小,计算结果越精确。但在另一方面,单元越多,计算时间越长,要求的计算机容量也越大。因此,必须在计算机容量的范围以内,根据合理的计算时间,考虑工程上对精度的要求,来决定单元的大小。

在单元划分图上,对于不同部位的单元,可以采用不同的大小,也应当采用不同的大小。例如,在边界比较曲折的部位,单元必须小一些;在边界比较平滑的部位,单元可以大一些。又例如,对于应力和位移情况需要了解得比较详细的重要部位以及应力和位移变化得比较剧烈的部位,单元必须小一些;对于次要的部位,以及应力和位移变化得比较平缓的部位,单元可以大一些。如果应力和位移的变化情况不易事先预估,有时不得不先用比较均匀的单元,进行一次计算,然后根据结果重新划分单元,进行第二次计算。

根据误差分析,应力及位移的误差都和单元的最小内角的正弦成反比。据此,采用等边三角形单元与采用等腰直角三角形单元,误差之比为 $\sin 45^\circ : \sin 60^\circ$, 即 1:1.23, 显然是前者较好。但

是,在通常的情况下,为了适应弹性体的边界以及单元由大到小的过渡,是不大可能使所有的单元都接近于等边三角形的,而且,为了便于整理和分析应力成果,我们往往宁愿采用直角三角形的单元。

当结构具有对称面而荷载对称于该面或反对称于该面时,为了利用对称性或反对称性,从而减少计算工作量,应当使单元的划分也对称于该面。例如,对于前一节中的例题,由于该薄板以及所受荷载都具有两个对称面,我们就使单元的划分也对称于这两个面,于是就只须计算四分之一薄板,而且对称面上的结点没有垂直于对称面的位移,这就大大减少了计算工作量。与此相似,当结构具有对称面而所受的荷载又反对称于该面时,也应当使单元的划分对称于该面,这样就只须计算结构的一半,而且对称面上的各结点将没有沿着该面的位移,于是大大减少计算工作量。对于具有对称面的结构,即使荷载并不对称于该面,也不反对称于该面,我们也宁愿把荷载分解成为对称的和反对称的两组,分别计算,然后将计算结果进行叠加。

如果计算对象的厚度有突变之处,图 6-16a,或者它的弹性有突变之处,图 6-16b,除了应当把这种部位的单元取得较小些以外,还应当把突变线作为单元的界线(不要使突变线穿过单元)。这是因为:(1)我们对每个单元进行弹性力学分析时,曾假定该单元的厚度 t 是常量,弹性常数 E 和 μ 也是常量。(2)厚度或弹性的突变,必然伴随着应力的突变,而应力的这种突变不可能在一个单元中得到反映,只可能在不同的单元中得到一定程度的反映(当然不可能得到完全的反映)。

如果计算对象受有集度突变的分布荷载,图 6-16c,或受有集中荷载,图 6-16d,也应当把这种部位的单元取得小一些,并在荷载突变或集中之处布置结点,以使应力的突变得得到一定程度的

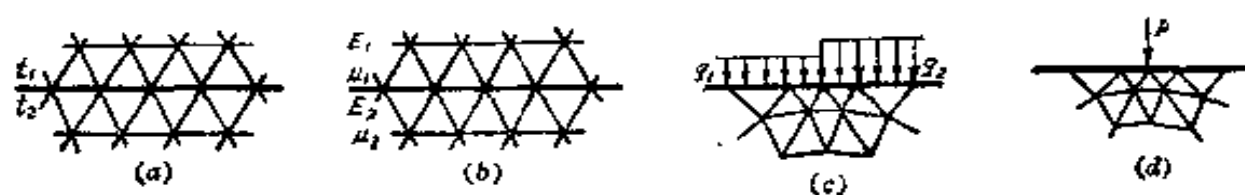


图 6-16

反映。

在计算闸坝等结构物时，为了使得地基弹性对结构物中应力的影响能反映出来，必须把和结构物相连的一部分地基取为弹性体，和结构物一起作为计算对象。按照弹性力学中关于接触应力的理论，所取地基范围的大小，应视结构物底部的宽度如何而定（与结构物的高度完全无关）。在早期的文献中，一般都建议，在结构物的两边和下方，把地基范围取为大致等于结构物底部的宽度，即 $L=b$ ，图 6-17a。但在后来的一些文献中，大都把所取的范围扩大为 $L=2b$ ，在个别的文献中还把它扩大为 $L=4b$ ，此外，还有一些文献作者认为，应当把地基范围取为矩形区域，图 6-17b，以便将铰支座改为连杆支座，以减少对地基的人为约束。最近的大量分析指出：在地基比较均匀的情况下，并没有必要使 L 超过 $2b$ ；用连杆支座还不如用铰支座更接近实际情况；地基范围的形状，影响也并不大。

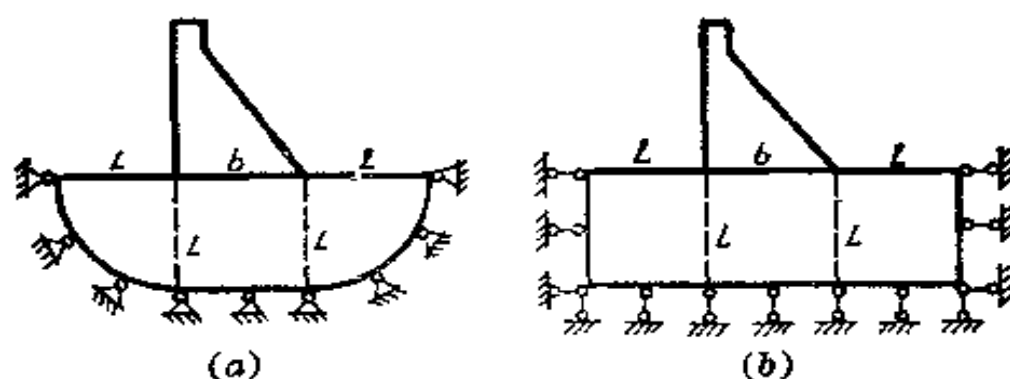


图 6-17

如果地基很不均匀，需要在地基中布置很多的单元，而机器的容量又不允许，则可将计算分两次进行。在第一次计算时，考虑较

大范围地基的弹性,并尽量在这范围内多布置单元,而在结构物内则仅布置较少的单元,如图 6-18a 所示。这时,主要的目的在于算出地基内靠近结构物处 $ABCD$ 一线上各结点的位移。在第二次计算时,把结构物内的网格加密,如图 6-18b 所示,放弃 $ABCD$ 以下的地基,而将第一次计算所得的 $ABCD$ 一线上各结点的位移作为已知量输入,算出坝体中的应力及位移,作为最后成果。在两次计算中,最好是使 $ABCD$ 一线上结点的布置相同,而且使邻近 $ABCD$ 的一排单元的布置也相同,如图所示,这样就避免输入位移时的插值计算,从而避免引进误差,而且,上述邻近 $ABCD$ 那一排单元的应力在两次计算中的差距,可以指示出最后计算成果的精度如何。

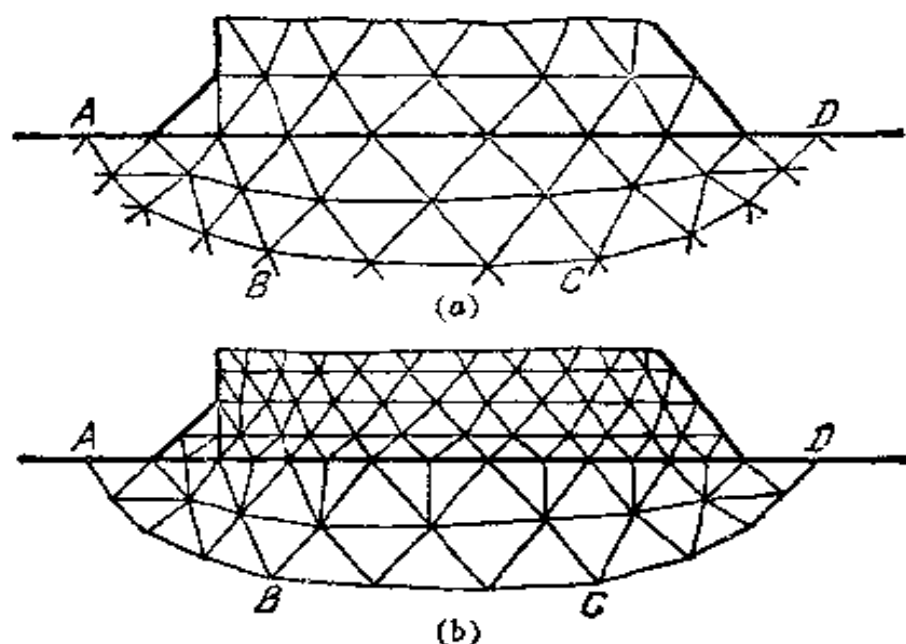


图 6-18

当结构物具有凹槽或孔洞时,在凹槽或孔洞附近将发生应力集中,即,该处的应力很大而且变化剧烈。为了正确反映此项应力,必须把该处的网格画得很密,但这样就可能超出机器的容量,而且单元的尺寸相差悬殊,可能还会引起很大的计算误差。在这种情况下,也可以把计算分两次进行。第一次计算时,把凹槽或孔洞附近的网格画得比别处仅仅稍为密一些,以约略反映凹槽或孔

洞对应力分布的影响,如图 6-19a 所示半圆凹槽附近的 $ABCD$ 部分,甚至可以根本不管凹槽或孔洞的存在,而把 $ABCD$ 部分的网格画得和别处大致同样疏密。这时,主要的目的在于算出别处的应力,并算出 $ABCD$ 一线上各结点的位移。第二次计算时,把凹槽或孔洞附近的网格画得充分细密,图 6-19b,就以 $ABCD$ 部分为计算对象,而将前一次计算所得的 $ABCD$ 一线上各结点的位移作为已知量输入,即可将凹槽或孔洞附近的局部应力算得充分精确。

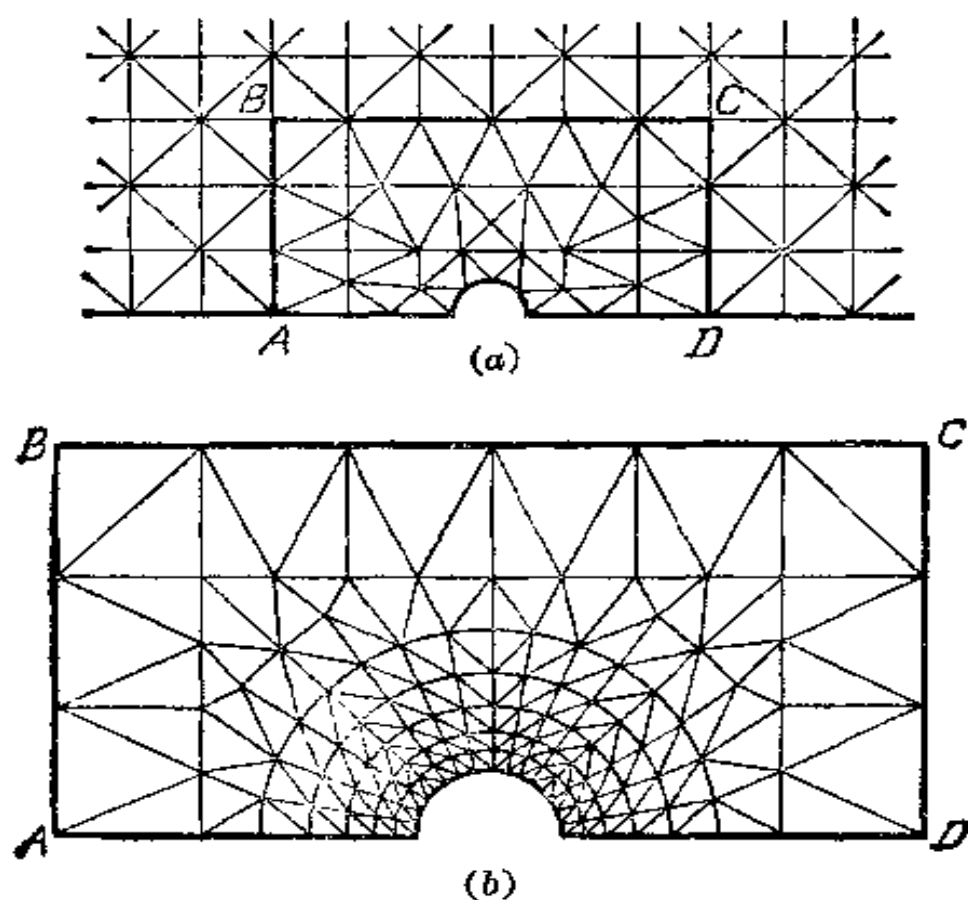


图 6-19

§ 6-8 计算成果的整理

计算成果包括两个方面,即位移方面和应力方面。在位移方面,一般都无须进行什么整理工作。利用计算成果中的结点位移分量,就可以画出结构物的位移图线。下面仅针对应力方面的计

算成果进行讨论。

在 § 6-5 中已经指出,简单的三角形单元是常应变单元,因而也是常应力单元。算出的这个常量应力,曾经被当作是三角形单元形心处的应力。据此就得出一个图示应力的通用办法:在每个单元的形心,沿着应力主向,以一定的比例尺标出主应力的大小,拉应力用箭头表示,压应力用平头表示,如图 6-20。就整个结构物的应力概况说来,这是一个很好的图示方法,因为应力的方向和大小在整个结构物中的变化规律都可以约略地表示出来。

关于为什么把计算出来的常量应力作为单元形心处的应力,有的文献曾经这样解释:这个常量应力是单元中的平均应力,当单元较小因而应力变化比较平缓时,单元中的实际应力可以认为是线性变化,而三角形中线性变量的平均值就等于该变量在三角形形心处的值。应当指出,这个解释是从错误的前提出发的,实际上计算出来的常量应力远不是单元内的平均应力,即使单元很小,它也常常会大于或小于单元内所有各点的实际应力。把它标在单元的形心处,不过是人们这样规定,而此外也没有更好的规定了。

为了由计算成果推出结构物内某一点的接近实际的应力,必须通过某种平均计算,通常可采用绕结点平均法或二单元平均法。

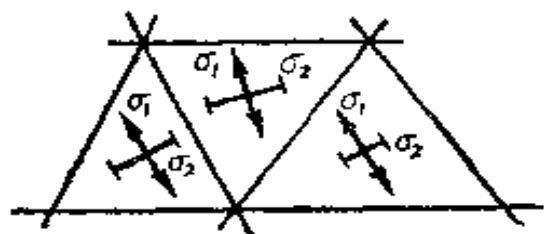


图 6-20

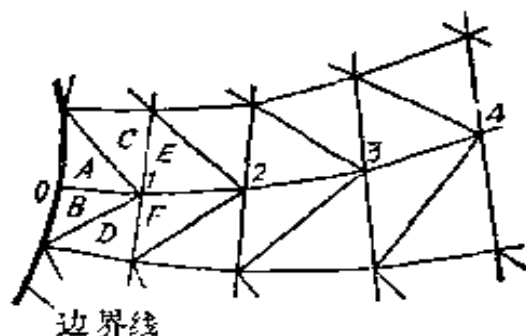


图 6-21

所谓绕结点平均法,就是把环绕某一结点的各单元中的常量应力加以平均,用来表征该结点处的应力。以图 6-21 中结点 0 及结点 1 处的 σ_x 为例,就是取

$$(\sigma_x)_0 = \frac{1}{2}[(\sigma_x)_A + (\sigma_x)_B],$$

$$(\sigma_x)_1 = \frac{1}{6}[(\sigma_x)_A + (\sigma_x)_B + (\sigma_x)_C + (\sigma_x)_D + (\sigma_x)_E + (\sigma_x)_F].$$

为了这样平均得来的应力能够较好地表征结点处的实际应力，环绕该结点的各个单元，它们的面积不能相差太大，它们在该结点所张的角度也不能相差太大。有人建议按照单元的面积进行加权平均，也有人建议按照单元在结点所张角度的正弦进行加权平均。但是，在绝大多数情况下，这样加权平均并不能改进平均应力的表征性（使其更接近于该结点处的实际应力），有时反而使得表征性更差些。

用绕结点平均法计算出来的结点应力，在内结点处具有较好的表征性，但在边界结点处则可能表征性很差。因此，边界结点处的应力不宜直接由单元应力的平均得来，而要由内结点处的应力推算得来。以图 6-21 中边界结点 0 处的应力为例，就是要由内结点 1、2、3 处的应力用抛物线插值公式推算得来，这样可以大大改进它的表征性。据此，为了整理某一截面上的应力，在这个截面上至少要布置五个结点。

所谓二单元平均法，就是把两个相邻单元中的常量应力加以平均，用来表征公共边中点处的应力。以图 6-22 所示的情况为例，就是取

$$(\sigma_x)_1 = \frac{1}{2}[(\sigma_x)_A + (\sigma_x)_B],$$

$$(\sigma_x)_2 = \frac{1}{2}[(\sigma_x)_C + (\sigma_x)_D],$$

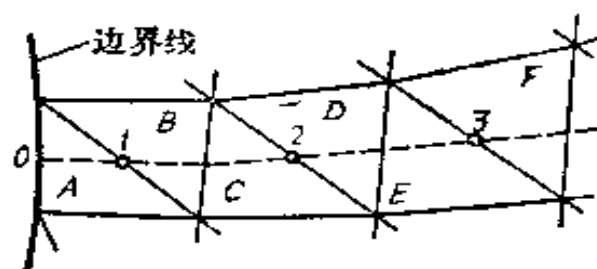


图 6-22

等等，为了这样平均得来的应力具有较好的表征性，两个相邻单元

的面积不能相差太大。有人建议,在两个相邻单元的面积相差较大的情况下,把应力按照单元的面积进行加权平均,以表征两单元形心处的应力。但是,这样得来的应力,其表征性一般仍然是很差的,而为了计算形心的位置,却要花费一定的工作量。

如果内点 1、2、3 等的光滑连线与边界相交在 0 点,图 6-22,则 0 点处的应力可由上述几个内点处的应力用插值公式推算得来,其表征性一般也是很好的。

在应力变化并不剧烈的部位,由绕结点平均法和二单元平均法得来的应力,表征性不相上下。在应力变化比较剧烈的部位,特别是在应力集中之处,由绕结点平均法得来的应力,其表征性就比较差了。但是,绕结点平均法也有它的优点:为了得出弹性体内某一截面上的应力图线,只须在划分单元时布置若干个结点在这一截面上(至少 5 个),而采用二单元平均法时就没有这样方便。至于绕结点平均法中较多的计算工作量,包括应力的平均以及边界结点处应力的推算,都不难归入计算程序来实现。

注意:如果相邻的单元具有不同的厚度或不同的弹性常数,则在理论上应力应当有突变。因此,只容许对厚度及弹性常数都相同的单元进行平均计算,以免完全失去这种应有的突变。在编写计算程序时,务必要考虑到这一点。

在推算边界点或边界结点处的应力时,可以先推算应力分量再求主应力,也可以对主应力进行推算。在一般情况下,前者的精度比较高一些,但差异并不是很明显的。

在弹性体的凹槽附近,平行于边界的主应力往往是数值较大而且变化比较剧烈。在推求最大的主应力时,必须充分注意如何达到最高的精度,例如图 6-23a 所示的凹槽,设边界点或边界结点 1、2、3、4 等处平行于边界的主应力 $(\sigma)_1$ 、 $(\sigma)_2$ 、 $(\sigma)_3$ 、 $(\sigma)_4$ 等,已经用上述方法求得,可以把凹槽处的一段边界曲线展为直线轴 x ,图

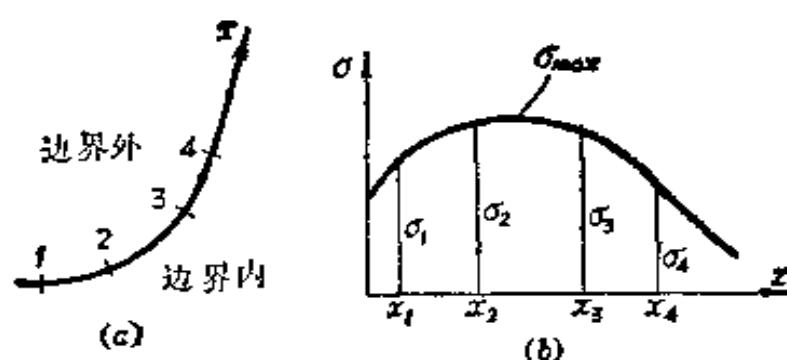


图 6-23

6-23b, 点绘 $(\sigma)_1$ 、 $(\sigma)_2$ 、 $(\sigma)_3$ 、 $(\sigma)_4$ 等, 画出平滑的图线。如果图线的坡度不太陡, 就可以由图线上量得最大主应力 $(\sigma)_{\max}$ 的数值。但是, 如果图线的坡度很陡, 则须按照 $(\sigma)_1$ 、 $(\sigma)_2$ 、 $(\sigma)_3$ 、 $(\sigma)_4$ 的数值, 为 σ 取插值函数 $\sigma = f(x)$, 然后令 $\frac{d}{dx}f(x) = 0$, 求出 x 在这一范围内的实根, 再代入 $f(x)$, 以求出 $(\sigma)_{\max}$ 。

当弹性体具有凹尖角时, 尖角处的应力是很大的(在完全弹性体的假定下, 它在理论上是无限大)。因此, 在用有限单元法进行计算时, 围绕尖角的一些单元中的应力就会很大, 而且, 尖角处的网格越密(即该处的单元越小), 这些单元中的应力就越大, 可能大到惊人的程度。实际上, 由于尖角处的材料已经发生局部的屈服、开裂或滑移, 在完全弹性体的假定之下算出的这些大应力是不存在的。为了正确估算尖角处的应力, 必须考虑局部屈服、开裂或滑移的影响。在没有条件考虑这些影响时, 可以这样较简单地处理: 把围绕尖角的单元取得充分小(例如在坝体中可取为十几厘米或几十厘米), 而在分析安全度时, 对这些单元中的大应力不予理会, 只要其它单元中的应力不超过材料的容许应力, 就认为该处是安全的。如果其它单元中的应力超过容许应力, 就要采取适当的措施。最有效的措施是把凹尖角改为凹圆角, 即, 对局部问题进行局部处理。不要企图用加大整体尺寸来降低局部应力, 因为那样做往往是徒劳的, 至少是在经济上完全不合理的。

用有限单元法计算弹性力学问题时,特别是采用常应变单元时,应当在计算之前精心划分网格,在计算之后精心整理成果。这样来提高所得应力的精度,不会增大所需的机器容量,而且往往比简单地加密网格更为有效。此外,加密网格将使机器计算量增大,从而导致计算误差的增大;在超过一定的限度以后,加密网格将完全不能提高精度,可能反而使精度有所降低。

§ 6-9 计 算 实 例

为了具体说明用简单三角形单元进行计算时如何整理应力成果,以及成果的精度如何,下面介绍几个计算实例,并将计算结果与函数解进行对比。

1. 楔形体受自重及齐顶水压

因为只有当楔形体为无限长时才有简单的函数解,而有限单元法只能以有限长的楔形体作为计算对象,所以我们截取无限长楔形体的 10 米长的部分,图 6-24,而把函数解中对 $y=0$ 处给出的位移作为已知,用有限单元法进行计算。为了便于说明问题,这里采用了均匀而且比较疏的网格,如图所示。楔形体的弹性模量取为

$E=2 \times 10^{10}$ 牛顿/米²,泊松系数取为 $\mu=0.167$,厚度取为 $t=1$ 米(作为平面应力问题),自重 $p=2.4 \times 10^4$ 牛顿/米³,水的容重取为 $\gamma=10^4$ 牛顿/米³。

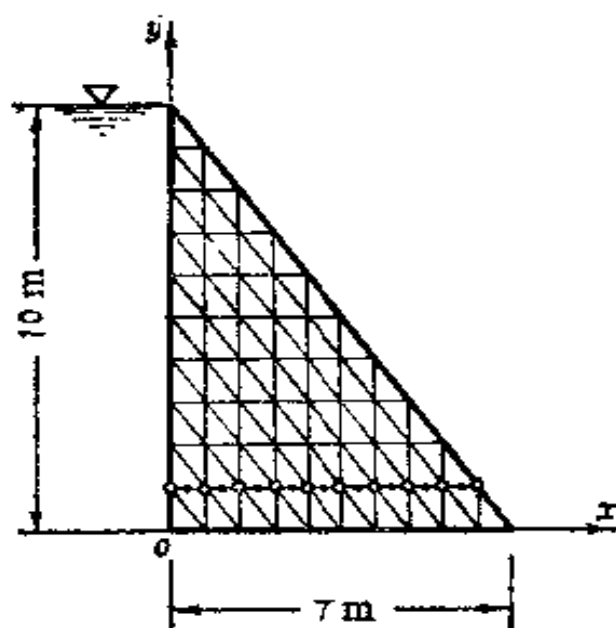


图 6-24

用二单元平均法整理 $y=1$ 米的截面上的 σ_y 时,结果如表 6-

3 所示, σ_y 的单位为 10^4 牛顿/米²。这里不用图线而用表格, 是因为在图线上很难把较小的误差表示出来。表中所列的考察点, 在图 6-24 上用圆点表示。表中所列有限单元解的应力数值, 是位于考察点上方及下方的两单元中 σ_y 的平均值。对于左边界上 $x=0$ 处的 σ_y , 我们根据表 6-3 中 $x=0.35$ 米、1.05 米、1.75 米三点处的

表 6-3

考察点的 $x(m)$	0.35	1.05	1.75	2.45	3.15	3.85	4.55	5.25	5.95
有限单元解	-4.52	-6.07	-7.62	-9.17	-10.75	-12.35	-13.99	-15.66	-17.36
函数解	-4.07	-5.75	-7.41	-9.12	-10.80	-12.48	-14.15	-15.82	-17.71
误差	-0.45	-0.32	-0.18	-0.05	0.05	0.13	0.16	0.17	0.35

σ_y 进行推算, 得出该处的 $\sigma_y = -3.75 \times 10^4$ 牛顿/米², 与函数解 -3.23×10^4 牛顿/米² 相比, 误差为 -0.52×10^4 牛顿/米²。对于右边界上 $x=6.3$ 米处的 σ_y , 我们根据表 6-3 中 $x=5.95$ 米、5.25 米、4.55 米三点处的 σ_y 进行推算, 得出该处的 $\sigma_y = -18.22 \times 10^4$ 牛顿/米², 与函数解 -18.35×10^4 牛顿/米² 相比, 误差为 0.13×10^4 牛顿/米²。

用绕结点平均法整理 $y=1$ 米的截面上 σ_y 时, 结果如表 6-4 所示, σ_y 的单位为 10^4 牛顿/米², 表中所列的结点在图 6-24 中用圆圈表示。可见在边界结点处, 结点平均应力的表征性是比较差的。但是, 根据表 6-4 中 $x=0.7$ 米、1.4 米、2.1 米三个结点处的平

表 6-4

结点的 $x(m)$	0	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	4.9	5.6	6.3
有限单元解	-4.35	-5.30	-6.84	-8.39	-9.96	-11.55	-13.17	-14.82	-16.51	-17.73
函数解	-3.23	-4.9	-6.59	-8.28	-9.96	-11.64	-13.32	-14.99	-16.67	-18.35
误差	-1.12	-0.39	-0.25	-0.11	0	0.09	0.15	0.17	0.16	0.62

均应力进行推算, 得出边界结点 $x=0$ 处的 $\sigma_y = -3.77 \times 10^4$ 牛顿/米², 则误差仅为 -0.54×10^4 牛顿/米²; 根据 $x=5.6$ 米、4.9 米、4.2 米三结点处的平均应力进行推算, 得出边界结点 $x=6.3$ 米处的 $\sigma_y = -18.24 \times 10^4$ 牛顿/米², 误差只有 0.11×10^4 牛顿/米²。这样, 用绕结点平均法和用二单元平均法整理出来的成果, 它们的表征性就不相上下了。

2. 简支梁受均布荷载

图 6-25a 示一简支梁, 高 3 米, 长 18 米, 承受均布荷载 10 牛顿/米², $E=2 \times 10^{10}$ 牛顿/米², $\mu=0.167$, 取 $t=1$ 米, 作为平面应力问题。由于对称, 只对右边一半进行有限单元计算, 图 6-25b, 而在 y 轴上的各结点布置水平连杆支座。

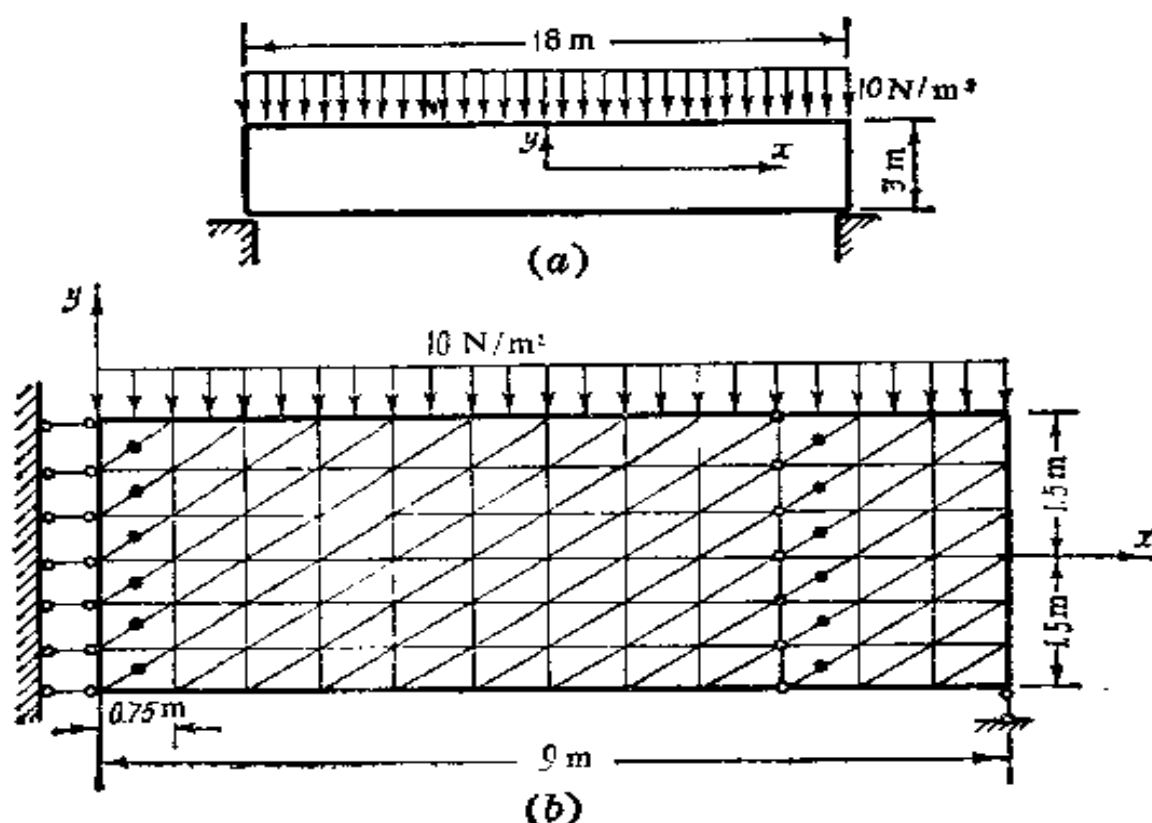


图 6-25

用二单元平均法整理 $x=0.375$ 米的截面上的弯应力 σ_x 时 (考察点在图上用圆点表示), 整理结果如表 6-5 所示, σ_x 的单位

表 6-5

考察点的 y (m)	1.50	1.25	0.75	0.25	-0.25	-0.75	-1.25	-1.50
有 限 单 元 解	-235	-196	-119	-11	38	137	201	245
函 数 解	-272	-225	-134	-44	44	134	225	272
误 差	37	29	15	3	-6	-17	-24	-27

为牛顿/米²。之所以选取这个截面, 是因为其上的 σ_x 接近最大。表中 $y=1.50$ 米(梁顶)及 $y=-1.50$ 米(梁底)处的有限单元解, 是由三个考察点处的 σ_x 用插值公式推算得来的。表中的函数解, 是指按弹性力学平面问题计算的结果, 但和材料力学中按浅梁计算的结果很相近, 基本上是随着 y 按直线变化的。

用绕结点平均法整理 $x=0$ 的截面上的 σ_x 时, 整理结果如表 6-6 所示, σ_x 的单位为牛顿/米²。表中 $y=1.50$ 米及 $y=-1.50$ 米处的有限单元解是由三个内结点处的 σ_x 推算得来的。即使如此, 表征性还是不如二单元平均法给出的结果。

表 6-6

结点的 y (m)	1.50	1.00	0.50	0	-0.50	-1.00	-1.50
有 限 单 元 解	-252	-184	-106	-28	51	131	212
函 数 解	-272	-180	-89	0	89	180	272
误 差	10	-4	-17	-28	-38	-49	-60

对于剪应力 τ_{xy} , 弹性力学函数解给出的数值和材料力学中关于浅梁的解答相同, 在横截面上是按抛物线变化的。我们用二单元平均法整理 $x=7.125$ 米的截面上的 τ_{xy} 时(考察点在图上用圆点表示), 得出来该截面上 $y=0$ 处的最大剪应力为 35.3 牛顿/米², 与函数解 35.6 牛顿/米² 相比, 误差只有 -0.3 吨/米²。用绕结点平均法整理 $x=6.75$ 米的截面上的剪应力时(考察结点在图上用圆

图表示), 得出该截面上 $y=0$ 处的最大剪应力为 31.9 牛顿/米², 与函数解 33.8 牛顿/米² 相比, 误差也只有 -1.9 牛顿/米²。但是, 对于靠近梁顶及梁底处, 用两种方法整理出来的剪应力都是具有较大的误差。因此, 如果要使边界附近的剪应力 τ_{xy} 具有与弯应力 σ_x 相同的精度, 就要把这里的网格画得密一些。但一般并不必这样做, 因为边界附近的剪应力是次要的。

整理挤压应力 σ_y 时, 不论用二单元平均法或是用绕结点平均法, 所得的结果都和函数解相差很大。这是符合下述一般规律的一个实例: 如果弹性体在某一方向具有特别小的尺寸, 则这一方向的正应力的有限单元解将具有特别大的误差。但是, 这个正应力一般都是最次要的应力, 因而完全没有必要为这个应力而特别加密网格。

3. 圆孔附近的应力集中

图 6-26 表示一块带圆孔的方板的四分之一, 它在 x 方向受有均布压力 25 牛顿/米²。方板边长之半为 24 米, 圆孔的半径为 3 米, 板的厚度取为 1 米, 作为平面应力问题。由于对称, 在 x 轴上的各结点处安置 y 方向的连杆支座, 在 y 轴上的各结点处安置 x 方向的连杆支座。在计算中取 $E=2 \times 10^{10}$ 牛顿/米², $\mu=0.20$ 。由于孔边附近有应力集中, 所以在孔边附近采用了较密的网格。

最大拉应力 σ_{\max} 是 x 轴与孔边相交之处的 σ_y 。用二单元平均法推求这个最大拉应力时, 我们取靠近孔边的四排单元, 如圆点所示, 根据每一排上三对单元的三个平均 σ_y 值沿环向推算, 得出 x 轴上一点处的 σ_y 值, 再根据这样得来的四个 σ_y 值沿径向推算, 得出 $\sigma_{\max}=24.2$ 牛顿/米², 与函数解给出的 25.0 牛顿/米² 相比, 误差 -0.8 牛顿/米²。用绕结点平均法推算时, 我们取图中用圆圈表示的四排结点, 根据每一排上三个结点处的平均 σ_y 值沿环向推算, 得出 x 轴上一个结点处的 σ_y 值, 再根据这样得来的四个 σ_y 值

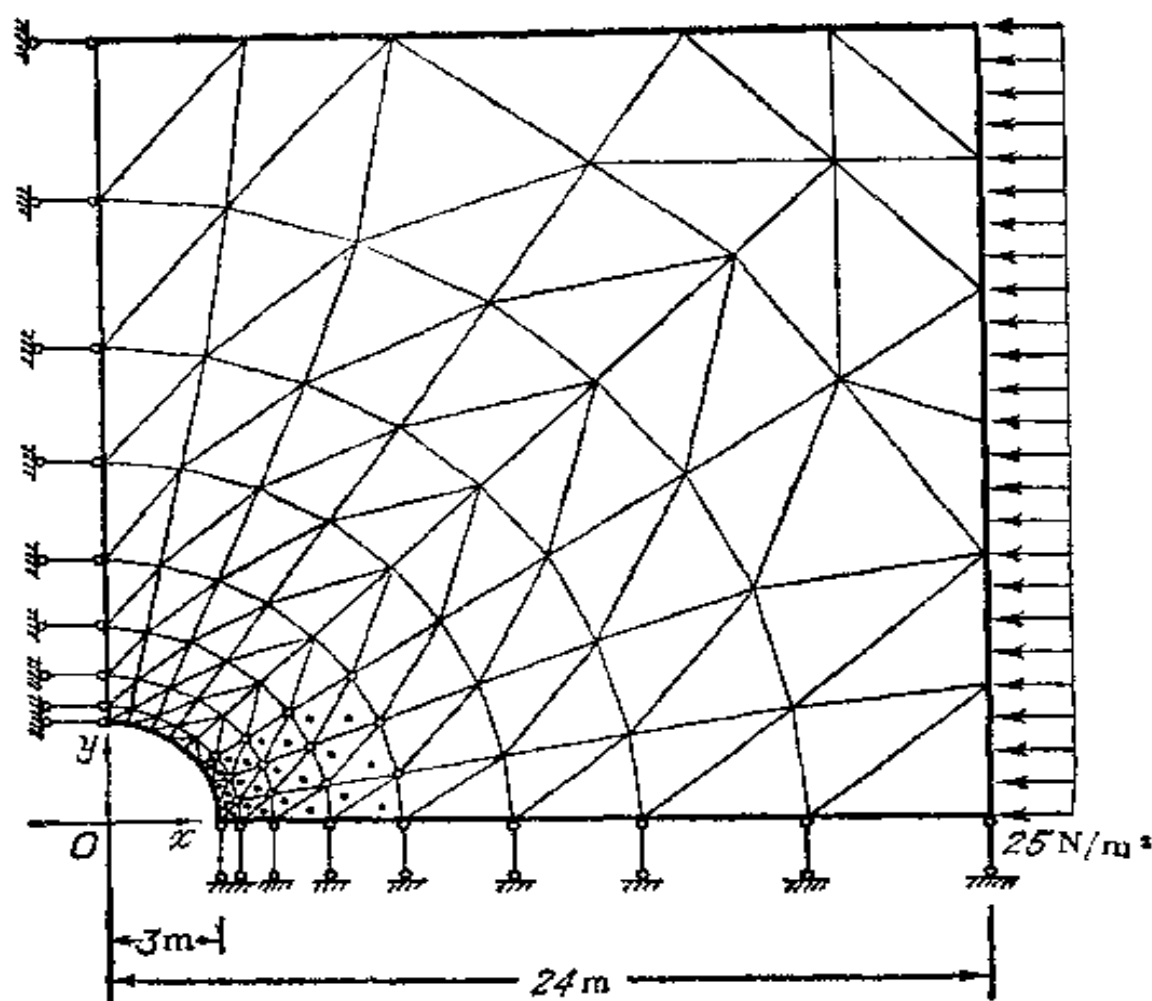


图 6-26

沿径向推算, 得出边界结点处的 $\sigma_{\max} = 17.7$ 牛顿/米², 与函数解给出的 25.0 牛顿/米² 相比, 误差为 -7.3 牛顿/米², 表征性仍然远远不如二单元平均法。

最大压应力 σ_{\min} 是 y 轴与孔边相交之处的 σ_x 。与上相似地用二单元平均法进行整理时, 得出 $\sigma_{\min} = -76.4$ 牛顿/米², 与函数解给出的 -75.0 牛顿/米² 相比, 误差为 -1.4 牛顿/米²。与上相似地用绕结点平均法进行整理时, 得出 $\sigma_{\min} = -63.1$ 牛顿/米², 与函数解 -75.0 牛顿/米² 相比, 误差为 11.9 牛顿/米², 表征性也远远不如二单元平均法。

4. 深梁问题

对于图 5-4 所示的深梁, 仍用 6×6 的网格, 每个正方形再分

为两个三角形单元。用二单元平均法整理中间截面上的 σ_x 时, 结果如图 6-27 所示, 与 § 5-3 中差分解的结果很相近。

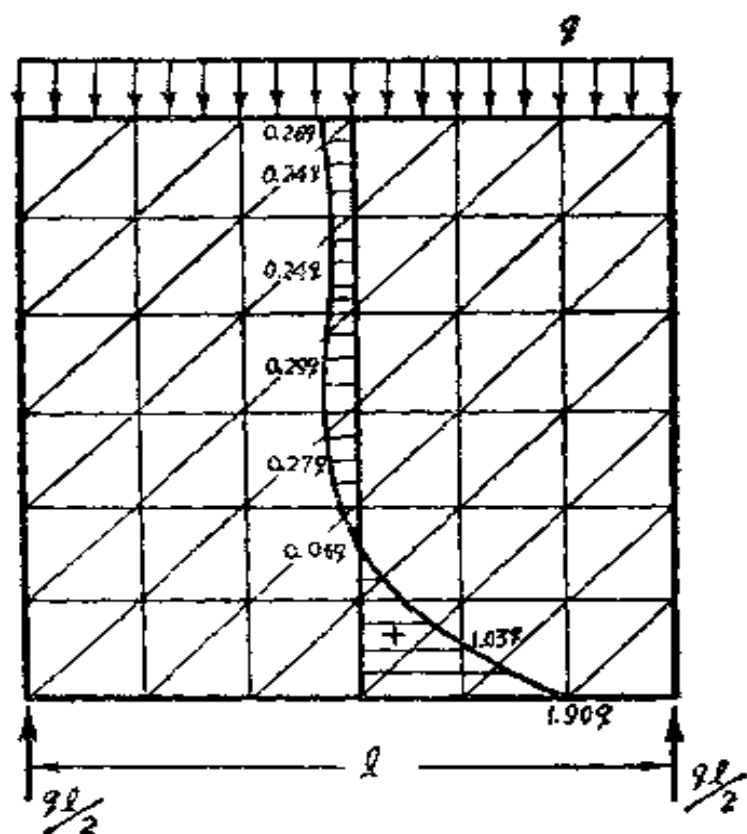


图 6-27

§ 6-10 温度应力的计算

本节中将说明, 如何用有限单元法由弹性体的变温计算温度应力。在平面温度应力问题中, 变温 T 只是 x 和 y 的函数, 其物理方程已在 § 2-10 中导出如式(2-22)所示, 即

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} + \alpha T, \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} + \alpha T, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

将式(a)进行移项, 得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha T + \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \alpha T + \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= 0 = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

与平面应力问题的物理方程(2-7)对比,可见在这里,代替 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 的是 $\varepsilon_x = \alpha T, \varepsilon_y = \alpha T, \gamma_{xy} = 0$, 也就是说,代替列阵 $\{\varepsilon\}$ 的是 $\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}$, 其中

$$\{\varepsilon_0\} = [\alpha T \quad \alpha T \quad 0]^T = \alpha T [1 \quad 1 \quad 0]^T. \quad (6-46)$$

于是可见,代替公式 $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ 的,应当是

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) = [D][B]\{\delta\}^e - [D]\{\varepsilon_0\}. \quad (6-47)$$

由此可见,代替表达式 $[B]\{\delta\}^e$ 的,应当是 $[B]\{\delta\}^e - \{\varepsilon_0\}$, 并从而看出,代替式(6-38)的应当是

$$\begin{aligned} \{F\}^e &= \iint [B]^T [D] [B] dx dy t \{\delta\}^e \\ &\quad - \iint [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dx dy t, \end{aligned}$$

也就是

$$\{F\}^e = [k] \{\delta\}^e - \iint [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dx dy t. \quad (c)$$

式(c)中右边的第二项,是以前所没有的,是由于考虑变温而多出来的结点力。把这个结点力改变符号,成为

$$\iint [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dx dy t,$$

就是考虑变温影响而应当施于结点的荷载,

$$\{R\}^e = \iint [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dx dy t. \quad (6-48)$$

对于平面应力问题, 将(6-46)代入(6-48), 得

$$\{R\}^e = \iiint [B]^T [D] \alpha T [1 \ 1 \ 0]^T dx dy t. \quad (6-49)$$

在简单三角形单元中, $[B]$ 的元素都是常量, 因而上式可以改写为

$$\{R\}^e = [B]^T [D] [1 \ 1 \ 0]^T \alpha t \iint T dx dy, \quad (d)$$

当采用线性变温模式时, 由于线性函数在三角形面积上的平均数值就等于该函数在三顶点处的数值的平均, 我们有

$$\frac{1}{A} \iint T dx dy = \frac{1}{3} (T_i + T_j + T_m),$$

其中 T_i, T_j, T_m 是结点 i, j, m 处的变温。于是由式(d)得

$$\{R\}^e = \frac{\alpha}{3} [B]^T [D] [1 \ 1 \ 0]^T (T_i + T_j + T_m) t A,$$

将式(6-32)及式(6-14)代入, 即得结点荷载列阵

$$\begin{aligned} \{R\}^e &= [X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j \ X_m \ Y_m]^T \\ &= \frac{\alpha (T_i + T_j + T_m) E t}{6(1-\mu)} [b_i \ c_i \ b_j \ c_j \ b_m \ c_m]^T. \end{aligned} \quad (6-50)$$

注意, 这里的 X_i 及 Y_i 是由于单元 ijm 有变温而施于结点 i 的。

一般说来, 环绕结点 i 的所有各单元都有变温, 因此, 相应于每一个单元的变温影响, 都应在结点 i 施加结点荷载 X_i 及 Y_i 。对于结点 j 和结点 m , 以及所有的其他结点, 都应当这样处理。

用式(6-50)所示的结点荷载代替以前所用的实际结点荷载, 求出的结点位移就是变温引起的结点位移。但须注意, 在根据结点位移计算单元的温度应力时, 必须应用式(6-47), 也就是

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D] [B] \{\delta\} - [D] \{e_0\} \\ &= [D] [B] \{\delta\} - [D] \alpha T [1 \ 1 \ 0]^T. \end{aligned} \quad (e)$$

将(6-14)代入, 并和以前一样地用 $[S]$ 代替 $[D][B]$, 即得

$$\{\sigma\} = [S] \{\delta\}^e - \frac{E\alpha T}{1-\mu} [1 \ 1 \ 0]^T. \quad (6-51)$$

在每一单元中, 上式右边的第二项并不是常量, 因为变温 T 不是常量。为了便于把温度应力和实际荷载引起的应力相叠加或相比较, 通常就用三结点处的变温的平均值来代替式中的 T , 这样就有

$$\{\sigma\} = [S] \{\delta\}^e - \frac{E\alpha(T_i + T_j + T_m)}{3(1-\mu)} [1 \ 1 \ 0]^T. \quad (6-52)$$

由 § 2-10 已知, 对于平面应变问题, 须将 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 代替 E , $\frac{\mu}{1-\mu}$ 代替 μ 及 $(1+\mu)\alpha$ 代替 α , 于是, 在 (6-50) 中进行这样代换以后, 就得出结点荷载的公式

$$\begin{aligned} \{R\}^e &= \frac{(1+\mu)\alpha(T_i + T_j + T_m) \frac{E}{(1-\mu^2)} t}{6\left(1 - \frac{\mu}{1-\mu}\right)} [b_i \ c_i \ b_j \ c_j \ b_m \ c_m]^T \\ &= \frac{\alpha(T_i + T_j + T_m) Et}{6(1-2\mu)} [b_i \ c_i \ b_j \ c_j \ b_m \ c_m]^T. \end{aligned} \quad (6-53)$$

在式 (6-52) 中进行同样的代换以后, 得出应力的公式

$$\{\sigma\} = [S] \{\delta\}^e - \frac{E\alpha(T_i + T_j + T_m)}{3(1-2\mu)} [1 \ 1 \ 0]^T. \quad (6-54)$$

习 题

6-1. (a) 设有三角形单元 ijm 受自重作用, 容重为 ρg , 试用式 (6-30) 求出其等效结点荷载。

(b) 设有三角形单元 ijm 的 ij 边受线性分布的法向压力作用, i 和 j 两点的压力集度分别为 p_i 和 p_j , 试用式 (6-31) 求出其等效结点荷载。

6-2. 图 6-28 为一平面应力状态的直角三角形单元, 设 $\mu = \frac{1}{6}$, 试求:

(a) 形函数矩阵 $[N]$,

(b) 应力转换矩阵 $[S]$,

(c) 单元劲度矩阵 $[k]$ 。

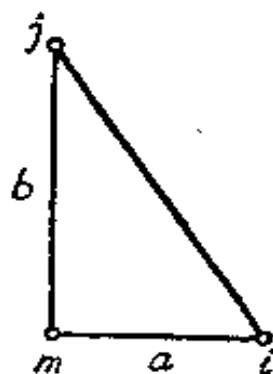


图 6-28

6-3. 对于图 6-15 所示简例, 试列出其余三个结点平衡方程, 并利用结点位移的解答求出各链杆反力。

答案: 各链杆反力为 $X_1 = 0.22$, $X_2 = -0.132$, $X_4 = -0.088$, $Y_4 = 0.626$, $Y_5 = 0.438$, $Y_6 = 0.066$, 单位为牛顿。

6-4. 设有边长为 a 的正方形薄板, 试按图 6-29 所示二种单元划分方式建立其劲度矩阵, 并比较之。

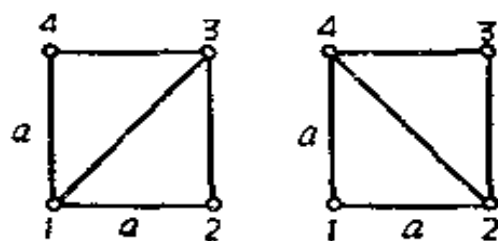


图 6-29

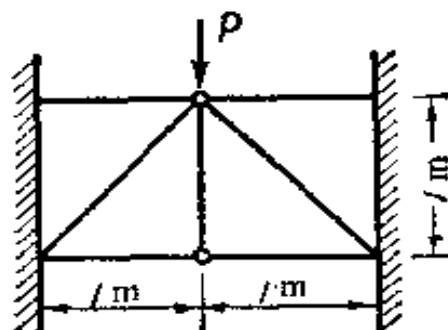


图 6-30

6-5. 图 6-30 为一固端梁受集中力 P 作用, 试用图示单元求出结点位移。(按平面应力问题计算, 取 $\mu = 1/6$)。

答案: $-1.368 \frac{P}{E}$, $-0.966 \frac{P}{E}$ 。

6-6. 图 6-31 为一刚性基础上的三角形坝, 受齐顶水压力作用, 试将它分成四个单元, 建立结构的整体平衡方程组。(按平面应变问题计算, 取 $\mu = 1/6$)。

6-7. 对于习题 5-4 所示混凝土柱的变温状态, 试取八分之一, 并用图 6-32 所示单元, 计算将变温作用化为荷载作用时的结点荷载值。

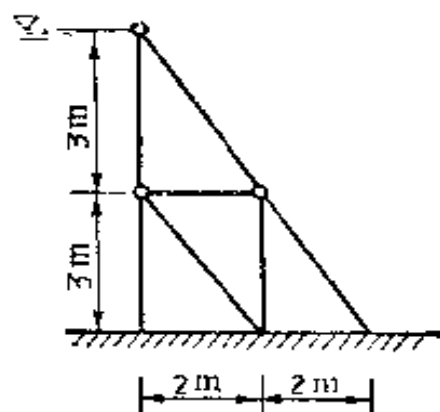


图 6-31

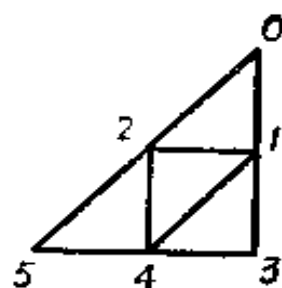


图 6-32

答案: 按平面应变问题, 取单位厚度计算, 得

$$\{R\}^T = \frac{E\alpha T_0 h}{96(1-2\mu)} [0 \ 37 \ 58 \ -28 \ -58 \ 30 \ 9 \ -9 \ 0 \ -30 \ -9 \ 0]^T,$$

第七章 空间问题的基本理论

§ 7-1 平衡微分方程

分析空间问题, 仍然要从三方面来考虑: 静力学方面、几何学方面和物理学方面。现在来考虑空间问题的静力学方面, 首先导出空间问题的平衡微分方程。

在物体内的任意一点 P , 割取一个微小的平行六面体, 它的六面垂直于坐标轴, 而棱边的长度为 $PA = dx$, $PB = dy$, $PC = dz$, 图 7-1。一般而论, 应力分量是位置坐标的函数。因此, 作用在这六

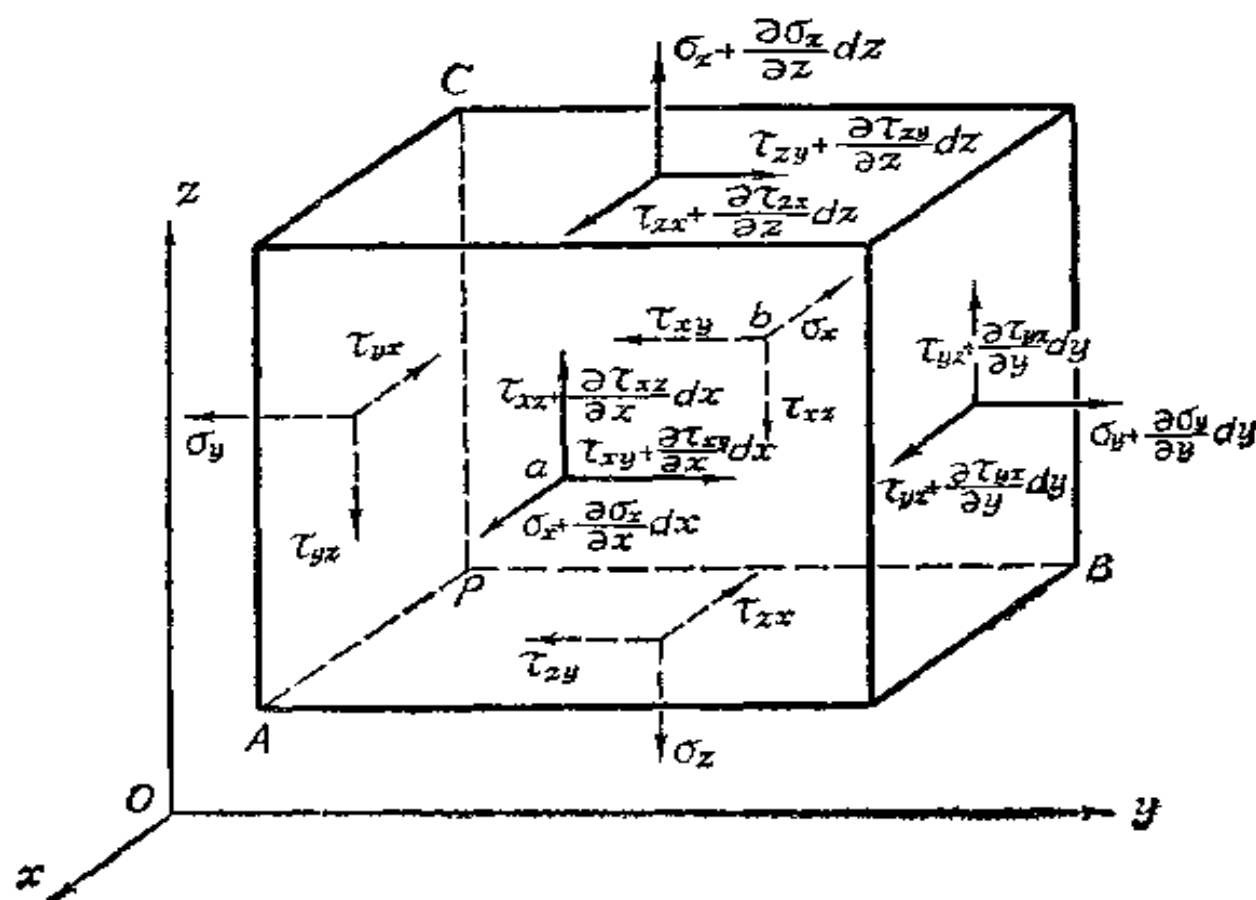


图 7-1

面体两对面上的应力分量不完全相同,而具有微小的差量。例如,作用在后面的正应力是 σ_x , 由于坐标 x 的改变, 作用在前面的正应力应当是 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, 余类推。由于所取的六面体是微小的, 因而可以认为体力是均布分布的。

首先, 以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴, 立出力矩的平衡方程 $\Sigma M_{ab} = 0$:

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} \\ & - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0. \end{aligned}$$

除以 $dx dy dz$, 合并相同的项, 得

$$\tau_{yz} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy - \tau_{zy} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz = 0.$$

略去微量以后, 得

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

同样可以得出

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

这些是以前已有的结果, 只是又一次证明了剪应力的互等性。

其次, 以 x 轴为投影轴, 立出投影的平衡方程 $\Sigma F_x = 0$, 得

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx \\ & - \tau_{yx} dz dx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy \\ & - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

由其余两个平衡方程, $\Sigma F_y = 0$ 和 $\Sigma F_z = 0$, 可以得出与此相似的两个方程。将这三个方程约简以后, 除以 $dx dy dz$, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

这就是空间问题的平衡微分方程, 即所谓纳维叶方程。

§ 7-2 物体内存任一点的应力状态

现在, 假定物体在任一点 P 的六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ 为已知, 试求经过 P 点的任一斜面上的应力。为此, 在 P 点附近取一个平面 ABC , 平行于这一斜面, 并与经过 P 点而平行于坐标面的三个平面形成一个微小的四面体 $PABC$, 图 7-2。当四面体 $PABC$ 趋于 P 点时, 平面 ABC 上的应力就成为该斜面上的应力。

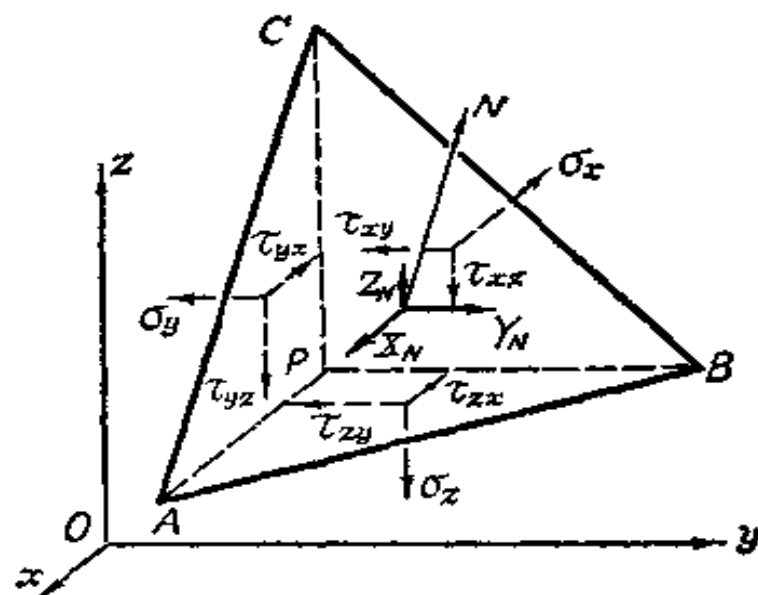


图 7-2

命平面 ABC 的外法线为 N , 其方向余弦为

$$\cos(N, x) = l, \quad \cos(N, y) = m, \quad \cos(N, z) = n.$$

设三角形 ABC 的面积为 ΔS , 则三角形 BPC 、 CPA 、 APB 的面积分

别为 $l\Delta S$ 、 $m\Delta S$ 、 $n\Delta S$ 。四面体 $PABC$ 的体积用 ΔV 代表。三角形 ABC 上的应力 s_N 在坐标轴上的投影用 X_N 、 Y_N 、 Z_N 代表。根据四面体的平衡条件 $\Sigma F_x = 0$, 得

$$X_N \Delta S - \sigma_x l \Delta S - \tau_{yx} m \Delta S - \tau_{zx} n \Delta S + X \Delta V = 0.$$

除以 ΔS , 并移项, 得

$$X_N + X \frac{\Delta V}{\Delta S} = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}.$$

当四面体 $PABC$ 趋于 P 点时, 由于 ΔV 是比 ΔS 更高一阶的微量, 所以 $\frac{\Delta V}{\Delta S}$ 趋近于零。于是得出下面(7-2)中的第一式。其余二式可分别由平衡条件 $\Sigma F_y = 0$ 及 $\Sigma F_z = 0$ 同样地得出。

$$\left. \begin{aligned} X_N &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}, \\ Y_N &= m\sigma_y + n\tau_{xy} + l\tau_{xz}, \\ Z_N &= n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (7-2)$$

设三角形 ABC 上的正应力为 σ_N , 则

$$\sigma_N = lX_N + mY_N + nZ_N.$$

将式(7-2)代入, 并分别用 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} 代替 τ_{zy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yx} , 即得

$$\sigma_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy}. \quad (7-3)$$

设三角形 ABC 上的剪应力为 τ_N , 则由于

$$s_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2$$

而有

$$\tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2. \quad (7-4)$$

由公式(7-3)及(7-4)可见, 在物体的任意一点, 如果已知六个应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} , 就可以求得任一斜面上的正应力和剪应力。因此, 可以说, 六个应力分量完全决定了一点的应力状态。

在特殊情况下, 如果 ABC 是物体的边界面, 则 X_N 、 Y_N 、 Z_N 成为面力分量 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} , 于是由公式(7-2)得出

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s + n(\tau_{zx})_s &= \bar{X}, \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s + n(\tau_{yz})_s &= \bar{Y}, \\ n(\sigma_z)_s + l(\tau_{xz})_s + m(\tau_{yz})_s &= \bar{Z}, \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

其中 $(\sigma_x)_s$ 、 \dots 、 $(\tau_{yz})_s$ 是应力分量的边界值。这就是弹性体的应力边界条件, 它表明应力分量的边界值与面力分量之间的关系。

§ 7-3 主应力、最大与最小的应力

设经过任一点 P 的某一斜面上的剪应力等于零, 则该斜面上的正应力称为在 P 点的一个主应力, 该斜面称为在 P 点的一个应力主面, 而该斜面的法线方向称为在 P 点的一个应力主向。

假设在 P 点有一个应力主面存在。这样, 由于该面上的剪应力等于零, 所以该面上的全应力就等于该面上的正应力, 也就等于主应力 σ 。于是该面上的全应力在坐标轴上的投影成为

$$X_A = l\sigma, \quad Y_A = m\sigma, \quad Z_A = n\sigma.$$

将公式(7-2)代入, 即得

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= l\sigma, \\ m\sigma_y + l\tau_{xy} + n\tau_{yz} &= m\sigma, \\ n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} &= n\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

此外还有关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (b)$$

如果将式(a)与(b)联立求解, 能够得出 σ 、 l 、 m 、 n 的一组解答, 就得到 P 点的一个主应力以及与之对应的应力主面和应力主向。用下述方法求解, 比较方便。

将式(a)改写为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

这是 l 、 m 、 n 的三个齐次线性方程。因为由式(b)可见 l 、 m 、 n 不能

全等于零, 所以这三个方程的系数的行列式应该等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

用 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{xy} 代替 τ_{zy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yx} , 将行列式展开, 得 σ 的三次方程

$$\begin{aligned} \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 \\ + (\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma \\ - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy}) \\ = 0. \end{aligned} \quad (7-6)$$

求解这个方程, 可以得出 σ 的三个实根 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 , 这些就是 P 点的三个主应力。为了求得与主应力 σ_1 相应的方向余弦 l_1 、 m_1 、 n_1 , 可以利用式(c)中的任意二式, 例如其中的前两式。由此得

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1 &= 0, \\ \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{zy}n_1 &= 0. \end{aligned}$$

将上列二式均除以 l_1 , 得

$$\begin{aligned} \tau_{yz}\frac{m_1}{l_1} + \tau_{zx}\frac{n_1}{l_1} + (\sigma_x - \sigma_1) &= 0, \\ (\sigma_y - \sigma_1)\frac{m_1}{l_1} + \tau_{zy}\frac{n_1}{l_1} + \tau_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

可以从而解出比值 $\frac{m_1}{l_1}$ 及 $\frac{n_1}{l_1}$ 。于是可由式(b)得出

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2}},$$

并由已知的比值 m_1/l_1 及 n_1/l_1 求得 m_1 及 n_1 。同样可以求得与主应力 σ_2 相应的 l_2 、 m_2 、 n_2 , 以及与 σ_3 相应的 l_3 、 m_3 、 n_3 。

因为主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 是方程(7-6)的三个根, 所以该方程可

写成

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0,$$

也就是

$$\sigma^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 + (\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2)\sigma - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0.$$

将这个方程与方程(7-6)对比,可见有关系式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 &= \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2, \\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

显然,在一定的应力状态下,物体任一点的主应力不会随坐标系的改变而有所改变(尽管应力分量随着坐标系改变),所以方程(7-7)右边的各个表达式的值不随坐标系改变,因而该方程左边的各个表达式的值也不会随坐标系改变,亦即不论坐标系如何改变,下列表达式的值保持不变:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ \Theta_2 &= \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2, \\ \Theta_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (7-8)$$

这三个表达式称为应力状态的不变量。应该特别指出,由其中第一式可见,在物体内的任意一点,三个互相垂直的面上的正应力之和是不变量,并且等于该点的三个主应力之和。

假定物体内某一点的三个应力主向以及与之对应的三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 已经求得,我们来求出这一点的最大与最小的应力。为了简便,将三个坐标轴放在三个应力主向上,称为应力主轴,于是有 $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$, $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$, $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$ 。

首先来求出最大与最小的正应力。根据公式(7-3),任一斜面上的正应力是

$$\sigma_N = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3, \quad (d)$$

其中的 l, m, n 应为斜面的法线 N 对于应力主轴的方向余弦。

用关系式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 消去式 (d) 中的三个方向余弦之一, 例如 l , 得

$$\sigma_N = (1 - m^2 - n^2)\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3.$$

为了求出 σ_N 的极值, 命 $\frac{\partial}{\partial m}\sigma_N = 0, \frac{\partial}{\partial n}\sigma_N = 0$, 由此得 $m = 0, n = 0$, 并从而有 $l = \pm 1$ 。代入式 (d), 得出 σ_N 的一个极值, 等于 σ_1 。再用关系式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 从式 (d) 中依次消去 m 和 n , 又可得出 σ_N 的另外两个极值, 分别等于 σ_2 和 σ_3 。这就是说, σ_N 的极值不外乎就是 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 。

由此可见, 在物体内的任意一点, 三个主应力中最大的一个就是该点的最大正应力, 而三个主应力中最小的一个就是该点的最小正应力。由此又可见, 在三个主应力相等的特殊情况下, 所有各斜面上的应力都相同, 也就等于主应力。

现在来求出最大与最小的剪应力。根据公式 (7-2), 斜面上的全应力在应力主轴上的投影是

$$X_N = l\sigma_1, \quad Y_N = m\sigma_2, \quad Z_N = n\sigma_3. \quad (e)$$

将式 (d) 和 (e) 代入公式 (7-4), 得

$$\tau_N^2 = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2. \quad (f)$$

用关系式 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 消去式 (f) 中的三个方向余弦之一, 例如 l , 得

$$\begin{aligned} \tau_N^2 &= (1 - m^2 - n^2)\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 \\ &\quad - [(1 - m^2 - n^2)\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3]^2. \end{aligned}$$

为了求出 τ_N^2 的极值, 命 $\frac{\partial}{\partial m}(\tau_N^2) = 0, \frac{\partial}{\partial n}(\tau_N^2) = 0$, 简化以后得 m 及 n 的联立方程,

$$\left. \begin{aligned} m[(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)] &= 0, \\ n[(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

由方程(g)求解 m 及 n , 将得出两种解答。第一种是 $m=0$, $n=0$ 。第二种解答是 $m=0$, $n=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, 或者是 $n=0$, $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。对于每一组解答, 都可以由关系式 $l^2+m^2+n^2=1$ 求出 l , 并由式(f)求出 τ_{N0}^2 。

再依次用关系式 $l^2+m^2+n^2=1$ 从式(f)中消去 m , 然后消去 n , 总共得出 τ_N^2 为极值时的六组解答, 列表如下:

$l =$	± 1	0	0	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
$m =$	0	± 1	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
$n =$	0	0	± 1	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\tau_N^2 =$	0	0	0	$\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$

表中的前三组解答对应于应力主面, 对应于 τ_N^2 的极小值。后三组解答对应于“经过应力主轴之一而平分其余二应力主轴的夹角”的三个平面; 对应的下列剪应力包含了最大与最小的剪应力:

$$\pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \pm\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2).$$

于是可见, 最大和最小的剪应力, 在数值上等于最大主应力与最小主应力之差的一半, 作用在通过中间主应力并且“平分最大主应力与最小主应力的夹角”的平面上。

§ 7-4 几何方程。刚体位移

在空间问题中, 形变分量与位移分量应当满足下列六个几何

方程,即所谓哥西方程:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (7-9)$$

其中的第一式,第二式和第六式已在 § 2-3 中导出,其余三式可用同样的方法导出。

在物体的已知位移的边界上,位移分量还应当满足下列三个位移边界条件:

$$u_s = \bar{u}, \quad v_s = \bar{v}, \quad w_s = \bar{w}. \quad (7-10)$$

这三式的等号左边是位移分量的边界值,等号右边是该边界上的位移分量已知值。

为了导出刚体位移的表达式,可进行与 § 2-3 中相似的分析,导出形变为零时的位移分量。这样就得出刚体位移为

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \omega_y z - \omega_z y, \\ v &= v_0 + \omega_z x - \omega_x z, \\ w &= w_0 + \omega_x y - \omega_y x, \end{aligned} \right\} \quad (7-11)$$

其中 u_0, v_0, w_0 分别为沿 x, y, z 三个坐标轴方向的刚体平移, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 分别为绕 x, y, z 三个坐标轴的刚体转动。

§ 7-5 物体任一点的形变状态。体积应变

设已知物体任一点 P 的六个形变分量为 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$, 则经过 P 点的、沿 PN 方向的线段的正应变,可以根据几何关系求得为

$$\varepsilon_N = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + mn \gamma_{yz} + nl \gamma_{zx} + lm \gamma_{xy}, \quad (7-12)$$

其中 l, m, n 为 PN 的方向余弦。同样,经过 P 点的、沿另一方向 PN_1 的线段的正应变将为

$$\varepsilon_{N_1} = l_1^2 \varepsilon_x + m_1^2 \varepsilon_y + n_1^2 \varepsilon_z + m_1 n_1 \gamma_{yz} + n_1 l_1 \gamma_{zx} + l_1 m_1 \gamma_{xy},$$

其中 l_1, m_1, n_1 为 PN_1 的方向余弦。设 PN 与 PN_1 在物体变形之前的夹角为 θ ，而在物体变形之后的夹角为 θ' ，则由几何关系可以得出

$$\begin{aligned} \cos \theta' - \cos \theta = & 2(l l_1 e_x + m m_1 e_y + n n_1 e_z) \\ & + (m n_1 + m_1 n) \gamma_{yz} + (n l_1 + n_1 l) \gamma_{zx} \\ & + (l m_1 + l_1 m) \gamma_{xy} - (e_N + e_{N_1}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (7-13)$$

由此求出 θ' 以后，即可求得 PN 与 PN_1 之间夹角的改变，即 $\theta' - \theta$ 。

由此可见，在物体内的任意一点，如果已知 $e_x, e_y, e_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ 这六个形变分量，就可以求得经过该点的任一线段的正应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的夹角的改变。因此，可以说，六个形变分量完全决定了一点的形变状态。

注意，求任意方向的正应变 e_N 的公式(7-12)是和求任意斜面上的正应力 σ_N 的公式(7-3)相似的：代替 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 的是 e_x, e_y, e_z ，代替 $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ 的是 $\frac{1}{2} \gamma_{yz}, \frac{1}{2} \gamma_{zx}, \frac{1}{2} \gamma_{xy}$ 。经过进一步的几何分析，也可以得出与 § 7-3 中相似的结论如下。

在物体内的任意一点，一定存在三个互相垂直的形变主轴(这三个形变主轴所成的三个直角，在变形之后仍然保持为直角，即剪应变等于零)。沿着三个形变主轴的三个正应变称为主应变。三个主应变中间最大的一个，就是该点的最大正应变，而三个主应变中间最小的一个，就是该点的最小正应变。三个主应变 e_1, e_2, e_3 是下列三次方程中 e 的三个根：

$$\begin{aligned} e^3 - (e_x + e_y + e_z) e^2 + \left(e_y e_z + e_z e_x + e_x e_y - \frac{\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2}{4} \right) e \\ - \left(e_x e_y e_z - \frac{e_x \gamma_{yz}^2}{4} - \frac{e_y \gamma_{zx}^2}{4} - \frac{e_z \gamma_{xy}^2}{4} + \frac{\gamma_{yz} \gamma_{zx} \gamma_{xy}}{4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7-14)$$

现在来说明体积应变的概念。设有微小的正平行六面体，其棱边的长度为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 。在变形之前，它的体积是 $\Delta x \Delta y \Delta z$ ；在变形之后，它的体积将成为

$$(\Delta x + \varepsilon_x \Delta x) (\Delta y + \varepsilon_y \Delta y) (\Delta z + \varepsilon_z \Delta z).$$

因此，它的每单位体积的体积改变，也就是所谓体积应变，是

$$\begin{aligned} e &= \frac{(\Delta x + \varepsilon_x \Delta x) (\Delta y + \varepsilon_y \Delta y) (\Delta z + \varepsilon_z \Delta z) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ &= (1 + \varepsilon_x) (1 + \varepsilon_y) (1 + \varepsilon_z) - 1 \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z. \end{aligned}$$

略去正应变的乘积项（更高阶的微量），则上式简化为

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (7-15)$$

将几何方程(7-9)中的前三式代入，得

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (7-16)$$

它表明体积应变与位移分量之间的简单微分关系。

§ 7-6 物理方程。小结

各向同性体中的形变分量与应力分量之间的关系已在 § 2-4 中给出如下：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (7-17)$$

这就是空间问题物理方程的基本形式。

由(7-17)中的后三式可见, 如果把坐标轴放在应力主轴的方向, 则由于 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$ 而有 $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0$ 。这就表明, 在各向同性体中, 应力主轴与形变主轴是重合的。这时的 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 就成为主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; 这时的 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 就成为主应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 而主应变与主应力之间有如下的关系:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (7-18)$$

因此, 如果已知三个主应力, 就可以很简单地算出三个主应变。

将式(7-17)中的前三式相加, 得

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

应用(7-15)式及(7-8)中第一式, 上式可以简写为

$$e = \frac{1-2\mu}{E} \Theta. \quad (7-19)$$

在前一节中已经说明, $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ 是体积应变。现在又看到, 体积应变 e 是和 Θ 成正比的。因此, $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ 也就称为体积应力, 而 Θ 与 e 之间的比例常数 $\frac{E}{1-2\mu}$ 也就称为体积弹性模量。

为了以后在某些情况下用起来方便, 下面来导出物理方程的另一种形式, 即将应力分量用形变分量表示。

由方程(7-17)中的第一式可得

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_x - \mu\Theta]. \end{aligned}$$

求解 σ_x , 得

$$\sigma_x = \frac{1}{1+\mu}(E\varepsilon_x + \mu\Theta).$$

将由公式(7-19)得来的 $\Theta = \frac{Ee}{1-2\mu}$ 代入, 得

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \left(-\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_x \right).$$

对于 σ_y 和 σ_z , 也可以导出与上相似的两个方程。此外, 再由(7-17)中的后三式求解剪应力分量, 总共得出如下的 6 个方程:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left(-\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_x \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left(-\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_y \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(-\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_z \right). \end{aligned} \right\} \quad (7-20)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (7-21)$$

这就是空间问题物理方程的第二种形式。

总结起来, 对于空间问题, 我们共有 15 个未知函数: 6 个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$; 6 个形变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}, \gamma_{xy}$; 3 个位移分量 u, v, w 。这 15 个未知函数应当满足 15 个基本方程: 3 个平衡微分方程(7-1); 6 个几何方程(7-9); 6 个物理方程(7-17), 或者(7-20)及(7-21)。此外, 在整个弹性体中, 应力分量和位移分量都应当是单值的。

在位移边界问题中, 位移分量在边界上还应当满足位移边界条件(7-10); 在应力边界问题中, 应力分量在边界上还应当满足应力边界条件(7-5); 在混合边界问题中, 某些边界上的位移分量应

当满足位移边界条件(7-10), 而另一些边界上的应力分量应当满足应力边界条件(7-5)。

§ 7-7 轴对称问题的基本方程

在空间问题中, 如果弹性体的几何形状、约束情况, 以及所受的外来因素, 都是对称于某一轴(通过这个轴的任一平面都是对称面), 则所有的应力、形变和位移也就对称于这一轴。这种问题称为空间轴对称问题。

在描述轴对称问题中的应力、形变及位移时, 用圆柱坐标 r, θ, z 比用直角坐标 x, y, z 方便得多。这首先是因为, 如果以弹性体的对称轴为 z 轴, 图 7-3, 则所有的应力分量、形变分量和位移分量都将只是 r 和 z 的函数, 不随 θ 而变。

首先来导出轴对称问题的平衡微分方程。

用相距 dr 的两个圆柱面, 互成 $d\theta$ 角的两个铅直面及相距 dz 的两个水平面, 从弹性体割取一个微小六面体 $PABC$, 图 7-3。沿 r 方向的正应力, 称为径向正应力, 用 σ_r 代表; 沿 θ 方向的正应力, 称为环向正应力, 用 σ_θ 代表; 沿 z 方向的正应力, 称为轴向正应力, 仍然用 σ_z 代表; 作用在圆柱面上而沿 z 方向作用的剪应力用 τ_{rz} 代表, 作用在水平面上而沿 r 方向作用的剪应力用 τ_{zr} 代表。根据剪应力的互等性, $\tau_{zr} = \tau_{rz}$ 。由于对称性, $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ 及 $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$ 都不存在。这样, 总共只有四个应力分量: $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{zr} = \tau_{rz}$, 一般都是 r 和 z 的函数。

如果六面体的内圆柱面上的正应力是 σ_r , 则外圆柱面上的正应力应当是 $\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr$ 。由于对称, σ_θ 在水平面之内没有增量。如果六面体下面的正应力是 σ_z , 则上面的正应力应当是 $\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$ 。

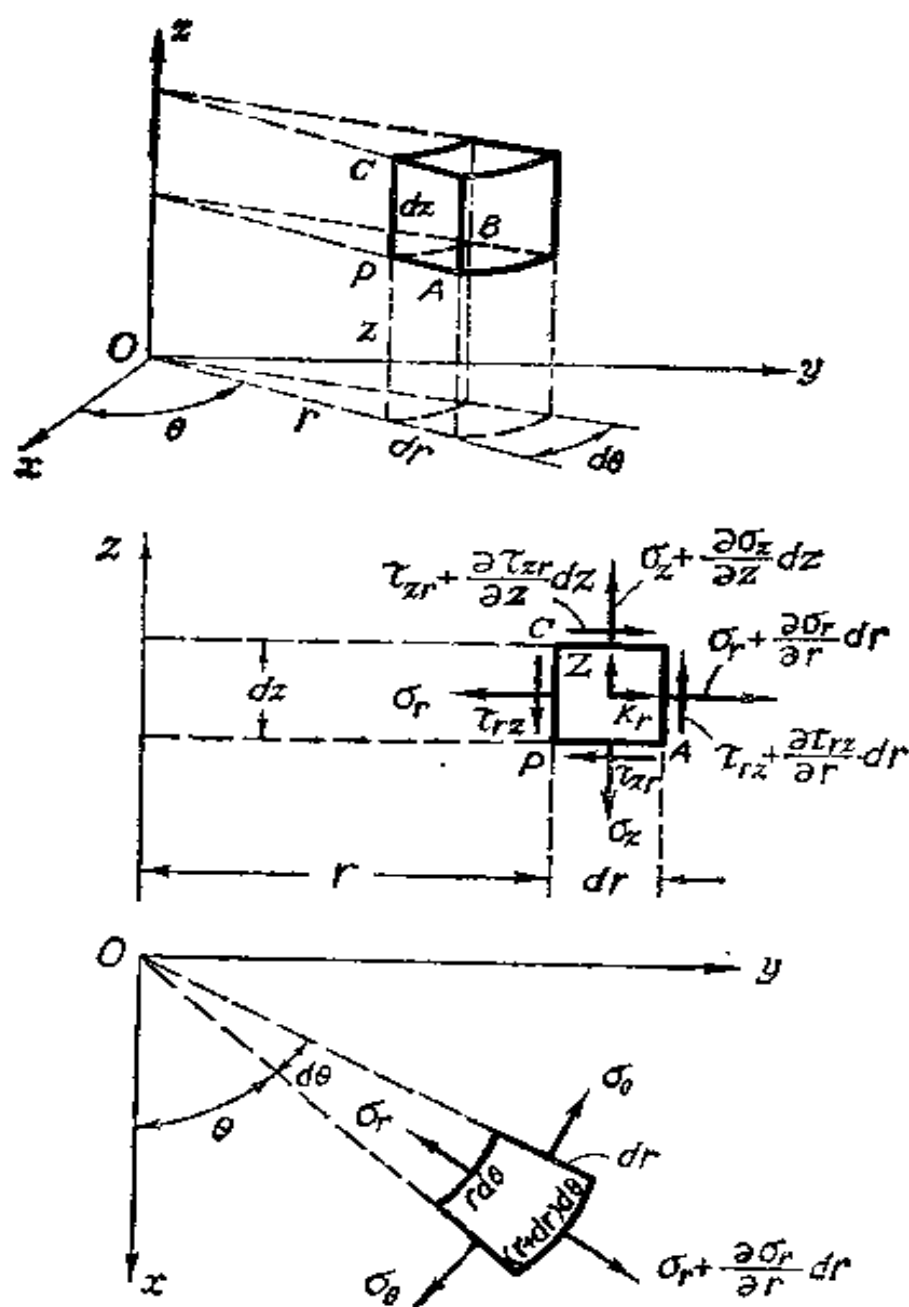


图 7-3

同样, 内面及外面的剪应力分别为 τ_{rz} 及 $\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr$, 下面及上面的剪应力分别为 τ_{zr} 及 $\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz$ 。径向的体力用 K_r 代表; 轴向的体力, 即 z 方向的体力, 仍然用 Z 代表。

将六面体所受的各力投影到六面体中心的径向轴上, 取 $\sin \frac{d\theta}{2}$

及 $\cos \frac{d\theta}{2}$ 分别近似地等于 $\frac{d\theta}{2}$ 及 1, 得平衡方程

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - 2\sigma_\theta dr dz \frac{d\theta}{2} \\ & + \left(\tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - \tau_{zr} r d\theta dr + K_r r d\theta dr dz = 0. \end{aligned}$$

归项以后, 除以 $r d\theta dr dz$, 然后略去微量, 得

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r = 0.$$

将六面体所受的各力投影到 z 轴上, 得平衡方程

$$\begin{aligned} & \left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \tau_{rz} r d\theta dz \\ & + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - \sigma_z r d\theta dr + Z r d\theta dr dz = 0. \end{aligned}$$

归项以后, 除以 $r d\theta dr dz$, 然后略去微量, 得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z = 0.$$

于是得空间轴对称问题的平衡微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7-22)$$

现在来导出轴对称问题的几何方程。

沿 r 方向正应变, 称为径向正应变, 用 ε_r 代表; 沿 θ 方向的正应变, 称为环向正应变, 用 ε_θ 代表; 沿 z 方向的正应变, 称为轴向正应变, 仍然用 ε_z 代表; r 方向与 z 方向之间的直角的改变用 γ_{rz} 代表。由于对称, $\gamma_{r\theta}$ 及 $\gamma_{\theta z}$ 都等于零。沿 r 方向的位移分量称为径向位移, 用 u_r 代表; 沿 z 方向的位移分量称为轴向位移, 仍然用

w 代表。由于对称, 环向位移 $u_\theta = 0$ 。

通过与 § 2-3 及 § 4-2 中同样的分析, 可见, 由于径向位移 u_r , 引起的形变是

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z};$$

由于轴向位移 w , 引起的形变是

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r}.$$

将以上两组形变相叠加, 得空间轴对称问题的几何方程

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (7-23)$$

由于柱坐标和直角坐标同样也是正交坐标, 所以物理方程可以直接根据虎克定律得来。在轴对称问题中, 物理方程是:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)], \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G} \tau_{zr} = \frac{2(1-\mu)}{E} \tau_{zr}. \end{aligned} \right\} \quad (7-24)$$

将(7-24)中的前三式相加, 仍然得到

$$e = \frac{1-2\mu}{E} \Theta, \quad (7-25)$$

其中的体积应变为

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (7-26)$$

而体积应力为

$$\Theta = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z, \quad (7-27)$$

它们都是不随坐标系而变的不变量。

通过与§7-6中同样的处理,也可以同样地把应力分量用形变分量来表示:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_r \right), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_\theta \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_z \right), \quad \tau_{zr} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zr}. \end{aligned} \right\} \quad (7-28)$$

习 题

7-1. 试证明: 在与三个主应力成相同角度的面上, 正应力及剪应力分别为

$$\sigma_N = \frac{1}{3} \Theta, \quad \tau_N = \frac{1}{3} \sqrt{2(\Theta^2 - 3\Theta_2)}.$$

7-2. 设某一物体发生如下的位移:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z,$$

$$v = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z,$$

$$w = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

试证明: 各个形变分量在物体内部为常量(即所谓均匀形变); 在变形以后, 物体内部的平面保持为平面, 直线保持为直线, 平行面保持平行, 平行线保持平行, 正平行六面体变成斜平行六面体, 圆球面变成椭球面。

第八章 空间问题的解答

§ 8-1 按位移求解空间问题

按位移求解问题, 是取位移分量为基本未知函数。对空间问题说来, 这就要从 15 个基本方程中消去应力分量和形变分量, 得出只包含三个位移分量的微分方程。推导如下。

将几何方程(7-9)代入物理方程(7-20)及(7-21), 得出用位移分量表示应力分量的弹性方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8-1)$$

其中

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

将(8-1)代入平衡微分方程(7-1), 并采用记号 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} +$

$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left(1 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial e}{\partial x} + \nabla^2 u \right) + X &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left(1 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial e}{\partial y} + \nabla^2 v \right) + Y &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left(1 - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial e}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

这是用位移分量表示的平衡微分方程，也就是按位移求解空间问题时所需用的基本微分方程，常被称为拉密方程。

如果将式(8-1)代入式(7-5)，就能把应力边界条件用位移分量来表示，但由于这样得出的方程太长，我们宁愿把应力边界条件保留为式(7-5)的形式，而理解其中的应力分量系通过式(8-1)用位移分量表示。位移边界条件则仍然如式(7-10)所示。

对于轴对称问题，也可以进行与上相同的推导，得出相应的微分方程。为此，首先将几何方程(7-23)代入物理方程(7-28)，得出弹性方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{rz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

其中 $e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 。再将(8-3)代入平衡微分方程(7-22)，简化以后，得出

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial r} + \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) + K_r &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

这就是按位移求解空间轴对称问题时的基本微分方程。

§ 8-2 半空间体受重力及均布压力

设有半空间体，容重为 $p = \rho g$ ，在水平边界上受均布压力 q ，

图 8-1. 以边界面为 xy 面, z 轴铅直向下。这样, 体力分量就是 $X=0, Y=0, Z=\rho g$.

由于对称 (任一铅直平面都是对称面), 试假设

$$u=0, v=0, w=w(z). \quad (a)$$

这样就得到

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw}{dz},$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{d^2 w}{dz^2}.$$

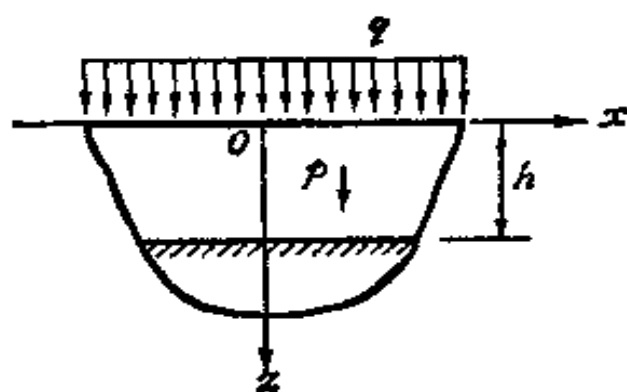


图 8-1

可见基本微分方程 (8-2) 中的前二式自然满足, 而第三式成为

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \left(-\frac{1}{1-2\mu} \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + \rho g = 0,$$

简化以后得

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)g\rho}{E(1-\mu)}, \quad (b)$$

积分以后得

$$e = \frac{dw}{dz} = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{E(1-\mu)}(z+A), \quad (c)$$

$$w = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{2E(1-\mu)}(z+A)^2 + B, \quad (d)$$

其中 A 和 B 是任意常数。

现在, 试根据边界条件来决定常数 A 和 B . 将以上的结果代入弹性方程 (8-1), 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = -\frac{\mu}{1-\mu}\rho g(z+A), \quad \sigma_z = -\rho g(z+A), \\ \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

在边界上, $l=m=0$ 而 $n=-1$. 因为 $\bar{X}=\bar{Y}=0$ 而 $\bar{Z}=g$, 所以应力边界条件 (7-5) 中的前二式自然满足, 而第三式要求

$$[-\sigma_z]_{z=0} = q,$$

将式(e)中 σ_z 的表达式代入, 得 $\rho g A = q$, 即 $A = q / \rho g$ 。再代回式(e), 即得应力分量的解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = -\frac{\mu}{1-\mu}(q + \rho g z), \quad \sigma_z = -(q + \rho g z), \\ \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

并由式(d)得出铅直位移

$$w = -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{2E(1-\mu)}\left(z + \frac{q}{\rho g}\right)^2 + B. \quad (g)$$

为了决定常数 B , 必须利用位移边界条件。假定半空间体在距边界为 h 处没有位移, 图 8-1, 则有位移边界条件

$$(w)_{z=h} = 0.$$

将式(g)代入, 得

$$B = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{2E(1-\mu)}\left(h + \frac{q}{\rho g}\right)^2.$$

再代回式(g), 简化以后, 得

$$w = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\left[q(h-z) + \frac{\rho g}{2}(h^2 - z^2)\right]. \quad (h)$$

现在应力分量和位移分量都已经完全确定, 并且所有一切条件都已经满足, 可见式(α)所示的假设完全正确, 而所得的应力和位移就是正确解答。

显然, 最大的位移发生在边界上, 由式(h)可得

$$w_{\max} = (w)_{z=0} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\left(qh + \frac{1}{2}\rho gh^2\right).$$

在式(f)中, σ_x 和 σ_y 是铅直截面上的水平正应力, σ_z 是水平截面上的铅直正应力, 而它们的比值是

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{\sigma_y}{\sigma_z} = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

这个比值在土力学中称为侧压力系数。

§ 8-3 半空间体在边界上受切向集中力

设有半空间体, 体力不计, 在水平边界上受有切向集中力 P , 图8-2。以 P 的作用点为坐标原点 O , 以 P 的作用线为 x 轴, z 轴铅直向下。

在这里, 由于不计体力, 位移分量的微分方程(8-2)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial x} + \nabla^2 u &= 0, \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial y} + \nabla^2 v &= 0, \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial z} + \nabla^2 w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

应力边界条件要求

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_z)_{z=0, r \neq 0} &= 0, (\tau_{zx})_{z=0, r \neq 0} = 0, \\ (\tau_{zy})_{z=0, r \neq 0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

其中 $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, 如图 8-2 中所示。注意, 此外还有这样的应力边界条件: 在 O 点附近的一小部分边界上, 有一组面力作用, 它的分布没有给出, 但已知它等效于 x 方向的集中力 P 。显然, 在半空间体的任何一个水平截面上的应力, 必须和这一组面力成平衡, 因

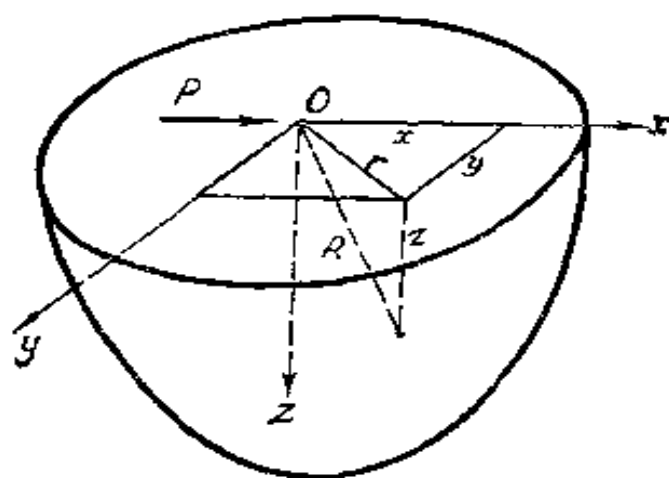


图 8-2

而也就必须和力 P 成平衡。于是得出由应力边界条件转换而来的下列平衡条件:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{zx} dx dy + P &= 0, & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y\sigma_z - z\tau_{zy}) dx dy &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{zy} dx dy &= 0, & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x\sigma_z - z\tau_{zx}) dx dy &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z dx dy &= 0, & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y\tau_{zx} - x\tau_{zy}) dx dy &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

其中左边三式分别表示 $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_z = 0$, 而右边三式分别表示 $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$ 。

赛如提引用位移函数, 得出满足上述一切条件的解答如下:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{(1+\mu)P}{2\pi ER} \left\{ 1 + \frac{x^2}{R^2} + (1-2\mu) \left[\frac{R}{R+z} - \frac{x^2}{(R+z)^2} \right] \right\}, \\ v &= \frac{(1+\mu)P}{2\pi ER} \left[\frac{xy}{R^2} - \frac{(1-2\mu)xy}{(R+z)^2} \right], \\ w &= \frac{(1+\mu)P}{2\pi ER} \left[\frac{xz}{R^2} + \frac{(1-2\mu)x}{R+z} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Px}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(R^2 - y^2 - \frac{2Ry^2}{R+z} \right) - \frac{3x^2}{R^2} \right], \\ \sigma_y &= \frac{Px}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(3R^2 - x^2 - \frac{2Rx^2}{R+z} \right) - \frac{3y^2}{R^2} \right], \\ \sigma_z &= -\frac{3Pxz^2}{2\pi R^5}, \\ \tau_{yz} &= -\frac{3Pxyz}{2\pi R^5}, \quad \tau_{zx} = -\frac{3Px^2z}{2\pi R^5}, \\ \tau_{xy} &= \frac{Py}{2\pi R^3} \left[\frac{1-2\mu}{(R+z)^2} \left(-R^2 + x^2 + \frac{2Rx^2}{R+z} \right) - \frac{3x^2}{R^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

其中 $R = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$, 如图 8-2 中所示。

读者试行验证: 位移分量(d)满足微分方程(a), 位移分量(d)及应力分量(e)满足弹性方程(8-1), 应力分量(e)满足边界条件

(b)和平衡条件(c),因而解答(d)及(e)是正确的。验证时,注意有
 导数公式

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{y}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{R}.$$

由(d)中的第三式可见,水平边界上任意一点的沉陷是

$$(w)_{z=0} = \frac{P(1-\mu)(1-2\mu)x}{2\pi E r^2}. \quad (8-5)$$

§ 8-4 半空间体在边界上受法向集中力

设有半空间体,体力不计,在水平边界上受有法向集中力 P ,
 图 8-3。这是一个轴对称的空间问题,而对称轴就是力 P 的作用
 线。因此,把 z 轴放在 P 的作用线上。坐标原点就放在 P 的作
 用点。

在这里,由于不计体力,所以位
 移分量应当满足基本微分方程(8-4)
 的简化式

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial r} + \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial e}{\partial z} + \nabla^2 w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中 $e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 。

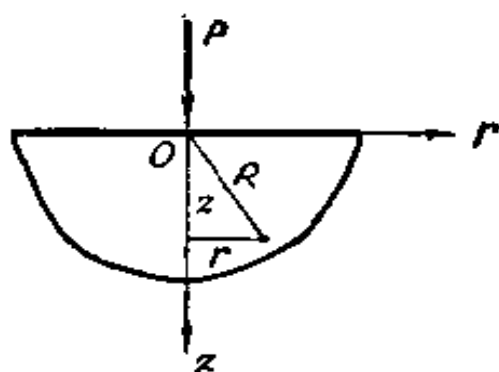


图 8-3

应力边界条件要求

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_z)_{z=0, r \neq 0} &= 0, \\ (\tau_{zr})_{z=0, r \neq 0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

此外,和§8-3中相似,还有由应力边界条件转换而来的平衡
 条件:

$$\int_0^\infty (2\pi r dr) \sigma_z + P = 0. \quad (c)$$

布希涅斯克引用位移函数, 得出满足上述一切条件的解答如下:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{(1+\mu)P}{2\pi ER} \left[\frac{rz}{R^2} - \frac{(1-2\mu)r}{R+z} \right], \\ w &= \frac{(1+\mu)P}{2\pi ER} \left[2(1-\mu) + \frac{z^2}{R^2} \right]; \end{aligned} \quad (8-6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3r^2z}{R^3} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{(1-2\mu)P}{2\pi R^2} \left(\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right), \\ \sigma_z &= -\frac{3Pz^3}{2\pi R^5}, \quad \tau_{rz} = \tau_{zr} = -\frac{3Prz^2}{2\pi R^5}, \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

其中 $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$, 如图 8-3 所示。

读者试行验证: 位移分量(8-6)满足基本微分方程(a), 位移分量(8-6)和应力分量(8-7)满足弹性方程(8-3), 应力分量满足边界条件(b)和平衡条件(c), 因而解答(8-6)和(8-7)是正确的。验证时, 注意有导数公式

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{R}.$$

由(8-6)中的第二式可见, 水平边界上任一点的沉陷是

$$\eta = (w)_{z=0} = \frac{P(1-\mu^2)}{\pi Er}, \quad (8-8)$$

它和距集中力作用点的距离 r 成反比。

本节及前节中解出的问题, 即半空间体在边界上受集中力的问题, 其应力分布都具有如下的特征:

(1) 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 各应力分量都趋于零; 当 $R \rightarrow 0$ 时, 各应力分量都趋于无限大。这就是说, 在离开集中力作用点非常远处, 应力非常小; 在靠近集中力作用点处, 应力非常大。

(2) 水平截面上的应力($\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{yz}$)都与弹性常数无关, 因而

在任何材料的弹性体中都是同样地分布。其他截面上的应力，一般都随泊松系数 μ 而变。

(3) 水平截面上的全应力，都指向集中力的作用点，因为由 $\sigma_z : \tau_{zy} : \tau_{zx} = z : y : x$ 或者有 $\sigma_z : \tau_{zy} = z : r$ 。

有了上述半空间体在边界上受法向集中力时的解答，就可以用叠加法求得由法向分布力引起的位移和应力。

设有单位力均匀分布在半空间体边界的矩形面积上，矩形面积的边长为 b 和 c ，图 8-4，现在来求出矩形的对称轴上距矩形中心为 x 的一点 K 的沉陷 η_{ki} 。为此，将这均布单位力分为微分力 $dP = \frac{1}{bc} d\xi dy$ ，代入半空间体的沉陷公式(8-8)，对 ξ 和 y 进行积分。在这里 $r = \sqrt{\xi^2 + y^2}$ 。

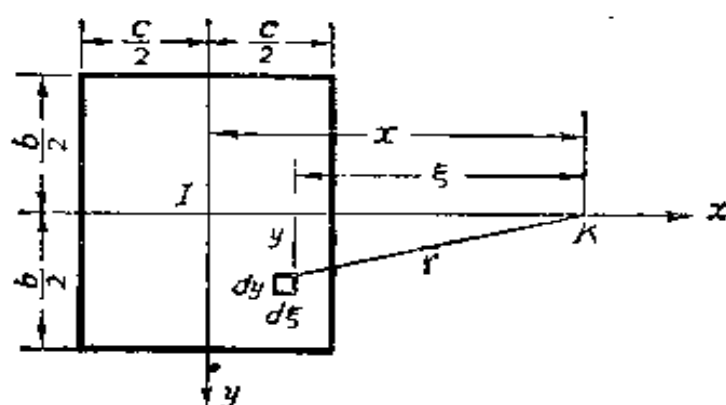


图 8-4

设 K 点在矩形之外，则沉陷为

$$\eta_{ki} = \frac{1-\mu^2}{\pi E c} \int_{x-c/2}^{x+c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} \frac{1}{bc} d\xi dy.$$

积分的结果可以写成

$$\eta_{ki} = \frac{1-\mu^2}{\pi E c} F_{ki}, \quad (8-9)$$

其中

$$F_{ki} = \left(\frac{2\frac{x}{c} + 1}{\frac{b}{c}} \operatorname{sh}^{-1} \frac{\frac{b}{c}}{2\frac{x}{c} + 1} + \operatorname{sh}^{-1} \frac{2\frac{x}{c} + 1}{\frac{b}{c}} \right) - \left(\frac{2\frac{x}{c} - 1}{\frac{b}{c}} \operatorname{sh}^{-1} \frac{\frac{b}{c}}{2\frac{x}{c} - 1} + \operatorname{sh}^{-1} \frac{2\frac{x}{c} - 1}{\frac{b}{c}} \right).$$

设 K 点恰在矩形的中心 I , 则沉陷为

$$\eta_{ki} = \frac{1-\mu^2}{\pi E} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} \frac{1}{bc} d\xi dy.$$

积分的结果仍然可以写成(8-9)的形式, 但

$$F_{ki} = 2 \left(\frac{c}{b} \operatorname{sh}^{-1} \frac{b}{c} + \operatorname{sh}^{-1} \frac{c}{b} \right).$$

当 $\frac{x}{c}$ 值为整数时 (包括 $\frac{x}{c} = 0$ 在内), 对于比值 $\frac{b}{c}$ 的几个常用数值, 可以从下表中查得公式(8-9) 中的 F_{ki} 的数值。如果 $\frac{x}{c}$ 大于 10, 不论 $\frac{b}{c}$ 的数值如何, 都可以取 $F_{ki} = \frac{c}{x}$ 。

半空间体沉陷公式中的 F_{ki} 值

$\frac{x}{c}$	$\frac{c}{x}$	$\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$	$\frac{b}{c} = 1$	$\frac{b}{c} = 2$	$\frac{b}{c} = 3$	$\frac{b}{c} = 4$	$\frac{b}{c} = 5$
0	∞	4.265	3.525	2.106	1.867	1.543	1.322
1	1	1.069	1.033	0.929	0.829	0.746	0.673
2	0.500	0.508	0.505	0.190	0.469	0.446	0.246
3	0.333	0.336	0.335	0.330	0.323	0.314	0.305
4	0.250	0.251	0.251	0.249	0.246	0.242	0.237
5	0.200	0.200	0.200	0.199	0.197	0.196	0.193
6	0.167	0.167	0.167	0.166	0.165	0.164	0.163
7	0.143	0.143	0.143	0.143	0.142	0.141	0.140
8	0.125	0.125	0.125	0.125	0.124	0.124	0.123
9	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.110
10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.099

§8-5 按应力求解空间问题

按应力求解问题，是取应力分量为基本未知函数。对空间问题说来，这就要从 15 个基本方程中消去位移分量和形变分量，得出只包含 6 个应力分量的方程。因为平衡微分方程中本来就不包含位移分量和形变分量，所以只须从几何方程和物理方程中消去这些分量。

首先从几何方程中消去位移分量。为此，将 (7-9) 中第二式左边对 z 的二阶导数与第三式左边对 y 的二阶导数相加，得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (a)$$

由 (7-9) 中的第四式可见，式 (a) 右边括弧内的表达式就是 γ_{yz} ，于是从方程 (a) 及其余两个相似的方程得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (8-10)$$

这是表明形变协调条件的一组方程，也就是一组所谓相容方程。

如果有 6 个代数方程，在消去其中的三个未知数以后，就将只剩下三个方程。但是，现在所处理的不是代数方程而是微分方程，上述见解并不适用。由于我们是用微分步骤从式 (7-9) 导出式 (8-10) 的，而微分方程经过微分以后，阶次增高，将出现一些新的解答，它们可能并不满足原来的微分方程，即几何方程 (7-9)。因此，为了形变协调，形变分量除了满足 (8-10) 以外，还须满足另外一些方程。

将式 (7-9) 中的后三式分别对 x, y, z 求导，得

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x},$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},$$

并由此而得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (b)$$

由(7-9)中的第一式可见,式(b)右端括弧内的表达式就是 ϵ_x ,于是从方程(b)和其余两个相似的方程得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (8-11)$$

这是又一组相容方程。

通过与上相似的微分步骤,可以导出无数多的相容方程,都是形变分量所应当满足的。但是,可以证明,如果6个形变分量满足了式(8-10)和(8-11),就可以保证位移分量的存在,也就可以用几何方程(7-9)求得位移分量(当然,对于多连体说来,求得的位移分量可能是多值的,为了得出确定的位移分量,可能还须考虑位移单值条件)。

将物理方程(7-17)代入(8-10)及(8-11),整理以后,得出用应力分量表示的相容方程如下:

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) &= 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ (1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) &= 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial x}, \\ (1+\mu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) &= 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} [(1+\mu) \sigma_x - \mu \Theta], \\ (1+\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} [(1+\mu) \sigma_y - \mu \Theta], \\ (1+\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) \\ = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(1+\mu) \sigma_z - \mu \Theta]. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

利用平衡微分方程(7-1),可以简化上列各式,使每一式中只包含体积应力和一个应力分量。当然,体力分量将在所有各式中出现。这样就得出密切尔所导出的相容方程:

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[(2-\mu) \frac{\partial X}{\partial x} + \mu \frac{\partial Y}{\partial y} + \mu \frac{\partial Z}{\partial z} \right], \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[(2-\mu) \frac{\partial Y}{\partial y} + \mu \frac{\partial Z}{\partial z} + \mu \frac{\partial X}{\partial x} \right], \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[(2-\mu) \frac{\partial Z}{\partial z} + \mu \frac{\partial X}{\partial x} + \mu \frac{\partial Y}{\partial y} \right], \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -(1+\mu) \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right), \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= -(1+\mu) \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right), \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= -(1+\mu) \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8-12)$$

在体力为零或为常量的情况下,方程(8-12)简化为拜尔特拉密所导出相容方程:

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x} &= 0, \\ (1+\mu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-13)$$

按应力求解空间问题时, 须要使得 6 个应力分量满足平衡微分方程(8-1), 满足相容方程(8-12)或者(8-13), 并在边界上满足应力边界条件(7-5)。此外, 对于多连体, 与应力分量相应的位移还须满足位移单值条件。

如果应力分量的表达式是坐标 x, y, z 的线性函数, 则相容方程(8-13)总能满足。因此, 对于一个单连体的应力边界问题, 如果体力为零或者为常量, 则满足平衡微分方程和边界条件的、线性函数形式的应力分量表达式, 将给出完全精确的应力。

由于位移边界条件一般都无法用应力分量表示, 因此, 位移边界问题和混合边界问题一般都不能按应力求解。

§ 8-6 等截面直杆的扭转

设有等截面直杆, 体力可以不计, 在两端平面内受有转向相反的两个力偶, 每个力偶的矩为 M , 图 8-5a。取杆的上端平面为 xy 面, z 轴铅直向下。

用半逆解法。依照材料力学对于圆截面杆的解答, 这里也假设: 除了横截面上的剪应力以外, 其他的应力分量都等于零, 即

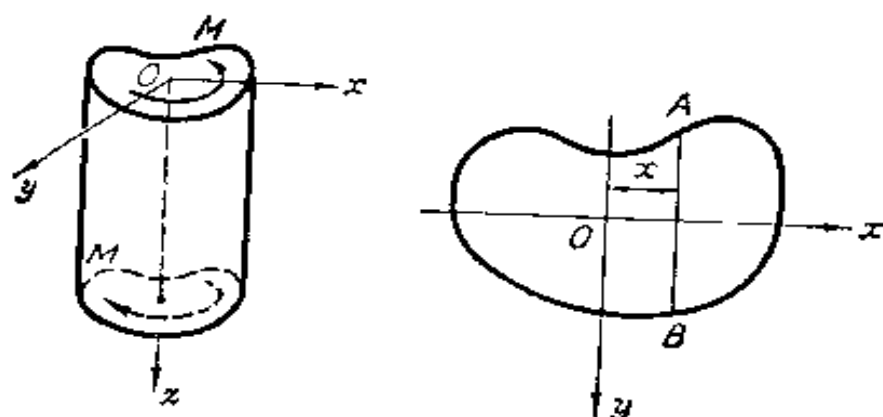


图 8-5

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \quad (8-14)$$

代入平衡微分方程(7-1), 并注意在这里 $X=Y=Z=0$, 即得

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (a)$$

由前两个方程可见, τ_{xz} 和 τ_{yz} 应当只是 x 和 y 的函数, 不随 z 而变。第三个方程可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) = \frac{\partial}{\partial y}(-\tau_{yz}).$$

根据微分方程理论, 一定存在一个函数 $\varphi(x, y)$, 使得

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\tau_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

由此得出用应力函数 φ 表明应力分量的表达式

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (8-15)$$

将式(8-14)代入相容方程(8-13), 可见其中的前三式及最后一式总能满足, 而其余二式成为

$$\nabla^2 \tau_{yz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{xz} = 0.$$

将式(8-15)代入, 得

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \varphi = 0.$$

这就是说, $\nabla^2 \varphi$ 应当是常量, 即

$$\nabla^2 \varphi = C. \quad (8-16)$$

现在来考虑边界条件。在杆的侧面上, 有 $n=0$ 及 $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$, 可见应力边界条件式(7-5)中的前二式总能满足, 而第三式成为

$$l(\tau_{xz})_s + m(\tau_{yz})_s = 0,$$

或将表达式(8-15)代入而得

$$l\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_s - m\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_s = 0.$$

因为在边界上有 $l = \frac{dy}{ds}$, $m = -\frac{dx}{ds}$, 所以由上式得出

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_s \frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_s \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

这就是说, 在杆的侧面上(在横截面的边界线上), 应力函数 φ 所取的边界值 φ_s 应当是常量。

由式(8-15)可见, 当应力函数 φ 增加或减小一个常数时, 应力分量并不受影响。因此, 在单连截面的情况下, 即实心杆的情况下, 为了简便, 应力函数 φ 的边界值可以取为零, 即

$$\varphi_s = 0. \quad (8-17)$$

在多连截面(空心杆)的情况下, 虽然应力函数 φ 在每一边界上都是常数, 但各个常数一般并不相同, 因此, 只能把其中一个边界上的 φ_s 取为零。

在杆的任一端, 例如上端, $l=m=0$, 而 $n=-1$, 应力边界条件(7-5)中的第三式总能满足, 而前二式成为

$$-\tau_{zx} = \bar{X}, \quad -\tau_{zy} = \bar{Y}. \quad (b)$$

因为面力 \bar{X} 及 \bar{Y} 必须合成为力偶, 而力偶的矩为 M , 所以要求

$$\iint \bar{X} dx dy = 0, \quad (c)$$

$$\iint \bar{Y} dx dy = 0, \quad (d)$$

$$\iint (y\bar{X} - x\bar{Y}) dx dy = M. \quad (e)$$

根据(b)中的第一式及式(8-15), 式(e)左边的积分式可以写成

$$\begin{aligned} \iint \bar{X} dx dy &= - \int \tau_{xz} dx dy = - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \\ &= - \int dx \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = - \int (\varphi_B - \varphi_A) dx, \end{aligned}$$

其中 φ_B 及 φ_A 是截面边界上 B 点及 A 点的 φ 值, 图 8-5b, 应当等于零, 可见式(c)是满足的。同样可见式(d)也是满足的。

根据式(b)及(8-15), 式(e)左边的积分式可以写成

$$\begin{aligned} \iint (y\bar{X} - x\bar{Y}) dx dy &= - \iint (y\tau_{xz} - x\tau_{zy}) dx dy \\ &= - \iint \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy = - \int dx \int y \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy - \int dy \int x \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

进行分部积分, 可见

$$\begin{aligned} - \int dx \int y \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy &= - \int dx [(y_B \varphi_B - y_A \varphi_A) - \int \varphi dy] \\ &= - \iint \varphi dx dy, \end{aligned}$$

因为 $\varphi_B = \varphi_A = 0$, 同样可见

$$- \int dy \int x \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \iint \varphi dx dy.$$

于是式(e)成为

$$2 \iint \varphi dx dy = M. \quad (8-18)$$

总结起来, 为了求得应力, 只须求出应力函数 φ , 使它能满足方程(8-16)至(8-18), 然后由式(8-15)求应力分量。

现在来导出有关位移的公式。将应力分量(8-14)及(8-15)代

入物理方程(7-17), 得

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = 0, \\ \gamma_{yz} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = 0.$$

再将这些表达式代入几何方程(7-9), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

通过积分运算, 可求得位移分量

$$u = u_0 + \omega_y z - \omega_z y - K y z, \\ v = v_0 + \omega_z x - \omega_x z + K x z,$$

其中的积分常数 $u_0, v_0, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ 和以前一样也代表刚体位移, K 也是积分常数。如果不计刚体位移, 只保留与形变有关的位移, 则

$$u = -K y z, \quad v = K x z. \quad (8-19)$$

用圆柱坐标表示, 就是

$$u_r = 0, \quad u_\theta = K r z.$$

可见每个横截面在 xy 面上的投影不改变形状, 而只是转动一个角度 $\alpha = K z$ 。由此又可见, 杆的单位长度内的扭角是 $\frac{d\alpha}{dz} = K$ 。

将式(8-19)代入(f)中第五式及第四式, 得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - K x, \quad (8-20)$$

可以用来求得位移分量 w 。将上列二式分别对 y 及 x 求导, 然后相减, 移项以后即得

$$\nabla^2 \varphi = -2GK. \quad (8-21)$$

由此可见, 方程(8-16)中常数 C 的数值是

$$C = -2GK. \quad (8-22)$$

§ 8-7 扭转问题的薄膜比拟

普朗都指出, 薄膜在均匀压力下的垂度, 与等截面直杆扭转问题中的应力函数, 在数学上是相似的。用薄膜来比拟扭杆, 可以帮助我们寻求扭转问题的解答。

设有一块均匀薄膜, 张在一个水平边界上, 图 8-6, 这水平边界的形状与某一扭杆的横截面边界形状相同。当薄膜承受微小的均匀压力时, 薄膜的各点将发生微小的垂度。以边界所在的水平面为 xy 面, 则垂度等于 z 。由于薄膜的柔顺性, 可以假定它不承受弯矩、扭矩、剪力和压力, 而只承受均匀的拉力 T (好象液膜的表面张力)。

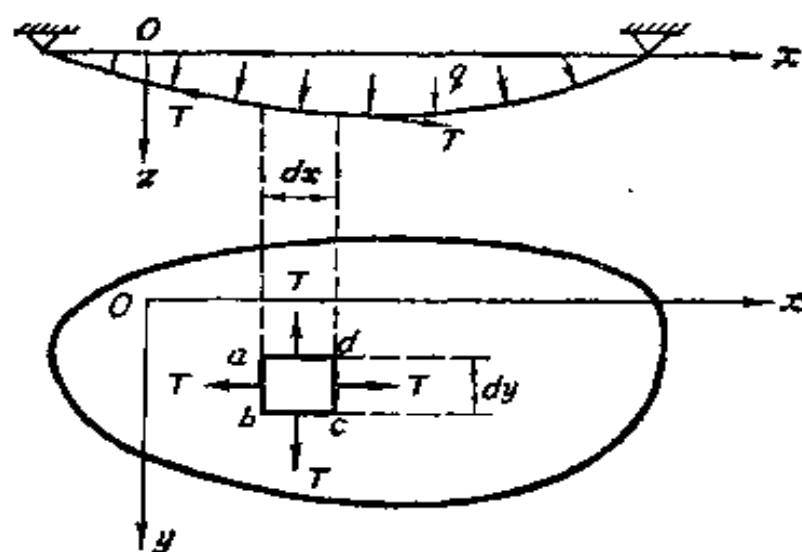


图 8-6

从薄膜取一个微小的单元 $abcd$, 它在 xy 面上的投影是一个矩形, 而矩形的边长是 dx 及 dy 。在 ab 边上的拉力是 Tdy (T 是薄膜每单位宽度上的拉力), 它在 z 轴上的投影是 $-Tdy \frac{\partial z}{\partial x}$; 在 cd 边上的拉力也是 Tdy , 但它在 z 轴上的投影是 $Tdy \frac{\partial}{\partial x} (z + \frac{\partial z}{\partial x} dx)$ 。在

ad 边上的拉力是 Tdx 、它在 z 轴上的投影是 $-Tdx\frac{\partial z}{\partial y}$ ；在 bc 边上的拉力也是 Tdx ，但它在 z 轴上的投影是 $Tdx\frac{\partial}{\partial y}(z + \frac{\partial z}{\partial x}dy)$ 。单元 $abcd$ 所受的压力是 $qdx dy$ (由于薄膜的垂度微小，不必区分这个压力是沿薄膜的法向还是沿铅直方向)。于是由平衡条件 $\sum F_z = 0$ 得

$$\begin{aligned} & -Tdy\frac{\partial z}{\partial x} + Tdy\frac{\partial}{\partial x}(z + \frac{\partial z}{\partial x}dx) - Tdx\frac{\partial z}{\partial y} \\ & + Tdx\frac{\partial}{\partial y}(z + \frac{\partial z}{\partial y}dy) + qdx dy = 0. \end{aligned}$$

简化以后，除以 $dx dy$ ，得

$$T\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + q = 0,$$

即

$$\nabla^2 z = -\frac{q}{T}. \quad (8-23)$$

此外，薄膜在边界上的垂度显然等于零，即

$$z_s = 0. \quad (8-24)$$

将薄膜垂度 z 的微分方程 (8-23) 与扭杆应力函数 φ 的微分方程 (8-21) 对比，并将 z 的边界条件 (8-24) 与扭杆应力函数 φ 的边界条件 (8-17) 对比，显然可见，如果使薄膜的 $\frac{q}{T}$ 相当于扭杆的 $2GK$ ，薄膜的垂度 z 就相当于扭杆的应力函数 φ 。

因为扭杆横截面上的扭矩是

$$M = 2 \iint \varphi dx dy,$$

而薄膜与边界平面 (xy 面) 之间的体积的两倍是

$$2V = 2 \iint z dx dy,$$

可见, 为了使得薄膜的垂度 z 相当于扭杆的应力函数 φ , 也可以使薄膜与边界平面之间的体积的两倍相当于扭矩。

在扭杆的横截面上, 沿 x 及 y 方向的剪应力的的大小为

$$|\tau_{zx}| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|, \quad |\tau_{zy}| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|.$$

另一方面, 薄膜沿 y 及 x 方向的斜率为

$$i_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad i_x = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

于是可见, 扭杆横截面上沿 x 及 y 方向的剪应力的的大小, 分别等于薄膜沿 y 及 x 方向的斜率。但是, x 轴和 y 轴可以取在任意两个互相垂直的方向, 所以又由此可见, 在扭杆横截面上某一点的、沿任一方向的剪应力的的大小, 就等于薄膜在对应点的、沿垂直方向的斜率。

为了决定扭杆横截面上的最大剪应力, 只须求出对应薄膜的最大斜率。但须注意, 虽然最大剪应力的所在点是和最大斜率的所在点相对应, 但是, 最大剪应力的方向是和最大斜率的方向互相垂直的。

§ 8-8 椭圆截面杆的扭转

设有等截面直杆, 它的横截面具有一个椭圆边界, 椭圆的半轴是 a 和 b , 图 8-7。

因为椭圆的方程可以写成

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a)$$

而应力函数 φ 在横截面的边界上应当等于零, 所以, 我们假设应力函数为

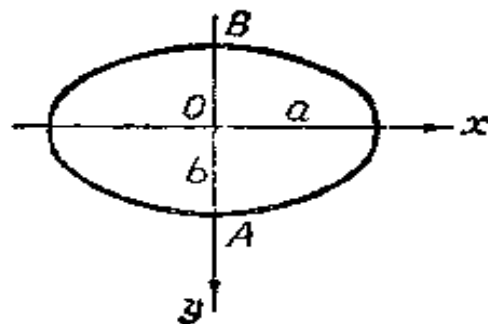


图 8-7

$$\varphi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (b)$$

其中 m 是一个常数, 然后来考察, 是否可以满足一切条件。

将式(b)代入微分方程(8-16), 得

$$\frac{2m}{a^2} + \frac{2m}{b^2} = C.$$

可见, 取

$$m = \frac{C}{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}} = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} C,$$

可以满足基本微分方程(8-16), 而式(b)应取为

$$\varphi = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (c)$$

现在由方程(8-18)来求出常数 C 。将式(c)代入(8-18), 得

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \left(\frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right) = M. \quad (d)$$

由材料力学已知

$$\iint x^2 dx dy = I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}, \quad \iint y^2 dx dy = I_x = \frac{\pi a b^3}{4},$$

$$\iint dx dy = \pi ab.$$

代入式(d), 即得

$$C = -\frac{2(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3}. \quad (e)$$

再代回式(c), 得确定的应力函数

$$\varphi = -\frac{M}{\pi ab} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (f)$$

这个应力函数已经满足了所有一切条件。

将应力函数的表达式(f)代入公式(8-15), 得应力分量

$$\tau_{zx} = -\frac{2M}{\pi a b^3} y, \quad \tau_{zy} = \frac{2M}{\pi a^3 b} x. \quad (8-25)$$

横截面上任意一点的合剪应力是

$$\tau = (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{1/2} = \frac{2M}{\pi a b} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{1/2}. \quad (8-26)$$

假想有一薄膜张在如图 8-7 所示的椭圆边界上, 并受有均匀压力, 则显然可见, 薄膜的最大斜率将发生在 A 点与 B 点, 而方向垂直于边界。根据薄膜比拟, 扭杆横截面上最大的剪应力也将发生在 A 点与 B 点, 而方向平行于边界。将 A 点或 B 点的坐标 $(0, \pm b)$ 代入 (8-26), 得出这个最大剪应力

$$\tau_{\max} = \tau_A = \tau_B = \frac{2M}{\pi a b^3}. \quad (8-27)$$

当 $a=b$ 时(圆截面杆), 应力的解答与材料力学中完全相同。

现在来求形变和位移。由公式(8-22)及式(e)得扭角

$$K = -\frac{C}{2G} = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G}. \quad (8-28)$$

于是由式(8-19)得

$$u = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} yz, \quad v = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xz. \quad (8-29)$$

再将式(f)及(8-28)代入公式(8-20), 得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} x.$$

进行积分, 得

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_1(y),$$

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_2(x).$$

由此可见 $f_1(y) = f_2(x) = w_0$, 而 w_0 就是 z 方向的刚体平移。不计这个刚体平移, 即由上式得

$$w = -\frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} Mxy. \quad (8-30)$$

这个公式表明：扭杆的横截面并不保持为平面，而将翘成曲面。曲面的等高线在 xy 面上的投影是双曲线，而这些双曲线的渐近线是 x 轴及 y 轴。只有当 $a=b$ 时（圆截面杆），才有 $w=0$ ，横截面才保持为平面。

§ 8-9 矩形截面杆的扭转

现在来分析矩形截面杆的扭转，矩形的边长为 a 及 b ，如图 8-8 所示。

首先，假定矩形是很狭的，即 $a \gg b$ 。在这一情况下，由薄膜比拟可以推断，应力函数 φ 在绝大部分横截面上几乎与 x 无关，因为对应的薄膜，几乎不受短边约束的影响，近似于柱面。于是可以近似地取 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ ， $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dy}$ ，而式 (8-16) 成为

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} = C.$$

进行积分，并注意边界条件 $(\varphi)_{y=\pm b/2} = 0$ ，即得

$$\varphi = \frac{C}{2} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right). \quad (a)$$

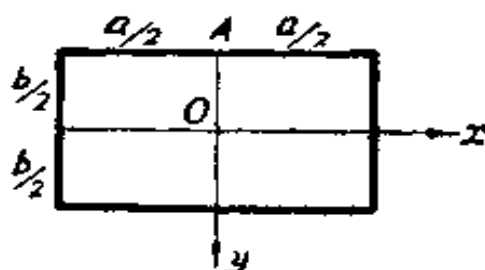


图 8-8

为了求出常数 C ，将式 (a) 代入 (8-18)，得

$$2 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{C}{2} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right) dx dy = M.$$

积分以后，得 $-\frac{ab^3}{6}C = M$ ，从而得

$$C = -\frac{6M}{ab^3}. \quad (b)$$

于是由式 (a) 得确定的应力函数

$$\varphi = \frac{3M}{ab^3} \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right). \quad (c)$$

将式(c)代入式(8-15), 得应力分量

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{6M}{ab^3} y, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (8-31)$$

由薄膜比拟可以推断, 最大剪应力发生在矩形截面的长边上, 例如

A点 $\left(y = -\frac{b}{2}\right)$, 其大小为

$$\tau_{\max} = (\tau_{xz})_{y=-b/2} = \frac{3M}{ab^2}. \quad (8-32)$$

将式(b)代入公式(8-22), 得扭角

$$K = -\frac{C}{2G} = \frac{3M}{ab^3G}. \quad (8-33)$$

因为由此可得 $\frac{3M}{ab^3} = GK$, 所以应力函数的表达式(c)也可以写成

$$\varphi = GK \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right). \quad (d)$$

现在来分析任意矩形杆(横截面的边长比值 a/b 为任意数值)。在这里, 应力函数 φ 应当满足微分方程(8-21), 即

$$\nabla^2 \varphi = -2GK, \quad (e)$$

并满足边界条件

$$(\varphi)_{x=\pm a/2} = 0, \quad (\varphi)_{y=\pm b/2} = 0. \quad (f)$$

此外, 根据对称条件(薄膜应当对称于 xz 面及 yz 面), 应力函数应当是 x 及 y 的偶函数。

试以狭矩形截面扭杆的应力函数(d)为基础, 加上一个修正函数 $F(x, y)$, 也就是, 取应力函数 φ 为

$$\varphi = GK \left(\frac{b^2}{4} - y^2 \right) + F. \quad (g)$$

代入式(e), 并注意边界条件(f), 可见 F 应当满足微分方程

$$\nabla^2 F = 0, \quad (h)$$

并满足边界条件

$$(F)_{x=\pm a/2} = GK\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right), \quad (F)_{y=\pm b/2} = 0. \quad (i)$$

此外, 根据对称条件, F 也应当是 x 和 y 的偶函数。

取 F 为如下的无穷级数:

$$F = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (j)$$

可见它能满足式(h), 能满足(i)中的第二式, 并能满足对称条件。为了它也能满足(i)中的第一式, 必须使系数 A_m 满足

$$\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi a}{2b} \cos \frac{m\pi y}{b} = GK\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right).$$

将两边同乘以 $\cos \frac{n\pi y}{b}$, 然后对 y 积分, 从 $-\frac{b}{2}$ 到 $\frac{b}{2}$, 并注意

$$\int_{-b/2}^{b/2} \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0, & (n \neq m) \\ \frac{b}{2}, & (n = m) \end{cases}$$

就得到

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{m\pi a}{2b} A_m &= \int_{-b/2}^{b/2} GK\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) \cos \frac{m\pi y}{b} dy \\ &= -\frac{4GKb^3}{\pi^3 m^3} (-1)^{\frac{m-1}{2}}. \end{aligned}$$

由此求出 A_m , 然后代入式(j), 得

$$F = -\frac{8GKb^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{m\pi y}{b}}{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi a}{2b}}.$$

于是由式(g)得确定的应力函数

$$\varphi = GK \left[\frac{b^2}{4} - y^2 - \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} \cos \frac{m\pi y}{b}}{m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi a}{2b}} \right]. \quad (k)$$

由薄膜比拟可以断定, 最大剪应力发生在矩形横截面长边的中点, 例如 A 点 $(x=0, y=-\frac{b}{2})$, 它的大小是

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= (\tau_{zx})_{x=0, y=-b/2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{x=0, y=-b/2} \\ &= GKb \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi a}{2b}} \right]. \end{aligned} \quad (l)$$

为了得出扭矩 M 与扭角 K 的关系, 应用公式(8-18)及式(k), 得

$$\begin{aligned} M &= 2 \iint \varphi dx dy = 2 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \varphi dx dy \\ &= GKab^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{m\pi a}{2b}}{m^5} \right]. \end{aligned}$$

由此得扭角的公式

$$K = \frac{M}{ab^3 G \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{m\pi a}{2b}}{m^5} \right]}. \quad (m)$$

代入式(l), 得最大剪应力的公式

$$\tau_{\max} = \frac{M \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \frac{m\pi a}{2b}} \right]}{ab^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \frac{m\pi a}{2b}}{m^5} \right]}. \quad (n)$$

将上列两个公式写成

$$K = \frac{M}{ab^3G\beta}, \quad (8-34)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M}{ab^2\beta_1}, \quad (8-35)$$

则因子 β 及 β_1 只与比值 a/b 有关,数值如下表所示。

a/b	β	β_1	a/b	β	β_1
1.0	0.141	0.208	3.0	0.263	0.267
1.2	0.166	0.219	4.0	0.281	0.282
1.5	0.196	0.230	5.0	0.291	0.291
2.0	0.229	0.246	10.0	0.312	0.312
2.5	0.249	0.258	很大	0.333	0.333

由上表可见,对于很狭的矩形横截面的扭杆(a/b 很大), β 及 β_1 趋于 $1/3$,公式(8-34)及(8-35)分别简化为式(8-33)及(8-32)。

§ 8-10 薄壁杆的扭转

通常使用的薄壁杆可以分为开口的和闭口的两种,前者的横截面具有单连边界,而后者的横截面具有多连边界。

开口薄壁杆的横截面大都是由等宽度的狭矩形组成的。这些狭矩形可能是直的或是弯的,图 8-9。

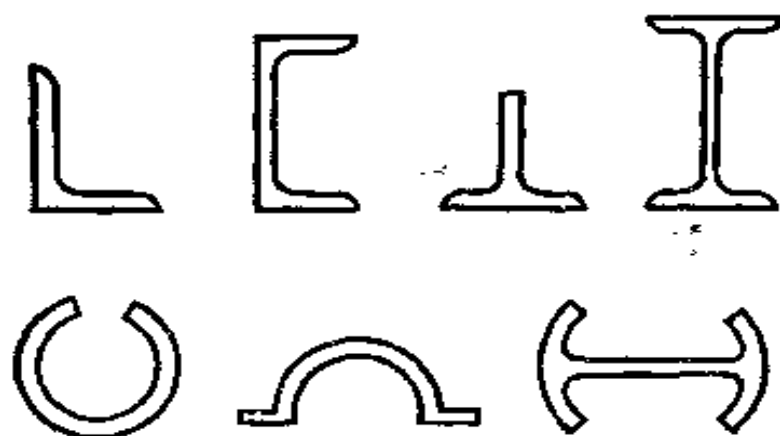


图 8-9

从薄膜可以想象, 如果一个直的狭矩形和一个弯的狭矩形具有相同的长度 a 和宽度 b , 则当这两个狭矩形上的薄膜具有相同的张力 T 并受相同的压力 q 时(这时它们的 q/T 相同), 两个薄膜的体积 V 和斜率 i 将没有多大的差别。由此可推断, 如果有两个狭矩形截面的扭杆, 它们的扭角 K 相同, 剪切弹性模量 G 也相同(因而它们的 $2GK$ 相同), 则两个扭杆的扭矩 M 及剪应力 τ 也就没有多大的差别。因此, 一个弯的狭矩形截面可以用一个同宽同长的直的狭矩形截面来代替, 而不致引起多大的误差。

用 a_i 及 b_i 分别代表扭杆横截面的第 i 个狭矩形的长度及宽度, M_i 代表该矩形上承受的扭矩(是整个横截面上的扭矩 M 的一部分), τ_i 代表该矩形长边中点附近的剪应力, K 代表该扭杆的扭角。根据公式(8-32)及(8-33), 我们有

$$\tau_i = \frac{3M_i}{a_i b_i^2}, \quad (a)$$

$$K = \frac{3M_i}{a_i b_i^3 G}, \quad (b)$$

由式(b)得

$$M_i = \frac{GK a_i b_i^3}{3}, \quad (c)$$

所以扭杆的整个横截面上扭矩

$$M = \sum M_i = \frac{GK}{3} \sum a_i b_i^3. \quad (d)$$

由式(c)及式(d)消去 K , 得 $M_i = \frac{a_i b_i^3}{\sum a_i b_i^3} M$ 。代回式(a)及式(b), 得

$$\tau_i = \frac{3M b_i}{\sum a_i b_i^3}, \quad (8-36)$$

$$K = \frac{3M}{G \sum a_i b_i^3}. \quad (8-37)$$

这些公式是近似的,因为我们应用了狭矩形的近似公式,而且没有考虑圆角的影响和两个矩形连接处的局部影响。

实验结果表明,为了得出较精确的扭角 K , 公式(8-37)的右边应当除以一个无因次的系数。对常用的几种钢料构件, 这种系数的范围如下: L 形截面, 0.86 至 1.03; U 形截面, 0.98 至 1.25; T 形截面, 0.92 至 1.25; I 形截面, 1.16 至 1.44。

对于狭矩形长边中点处的剪应力 τ_i , 公式(8-36)可以给出相当精确的数值。但是, 在两个狭矩形的连接处, 可能发生远大于此的局部剪应力。按照胡斯用差分法计算的结果, 比值 τ_{\max}/τ_i 与比值 ρ/b_i 的关系大致如图 8-10 所示。在这里, τ_{\max} 是内圆角处最大的剪应力, ρ 是内圆角处的曲率半径, b_i 是狭矩形的宽度。

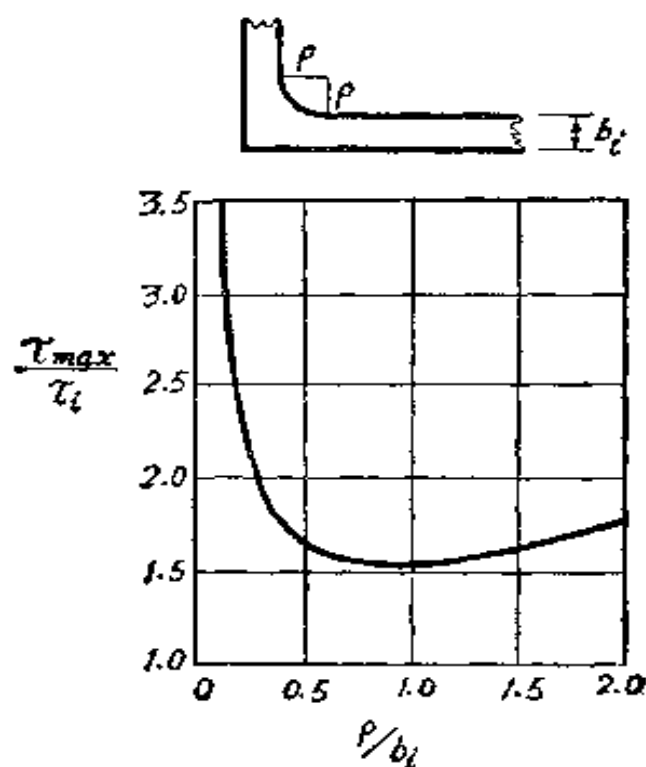


图 8-10

研究闭口薄壁杆的扭转问题时, 最好是应用薄膜比拟。假想在薄壁杆的横截面边界上张一块薄膜。图 8-11。薄膜在外边界 AB 处的垂度取为等于零。命内边界 CD 处的垂度为 h (为了使得薄

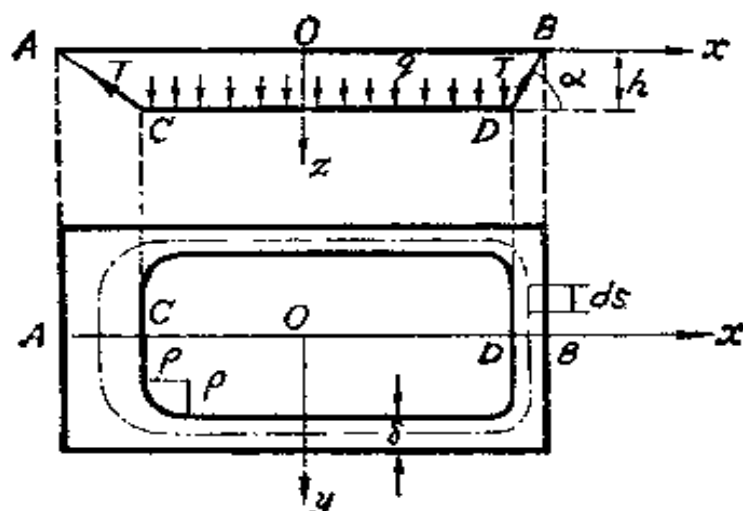


图 8-11

膜在内边界处的垂度等于常量, 可以假想 CD 是一块无重量、不变形的平板)。由于杆壁的厚度 δ 很小, 薄膜的斜率沿着杆壁厚度的变化可以不计。于是, 在杆壁厚度为 δ 之处, 剪应力的大小是

$$\tau = \frac{h}{\delta}. \quad (e)$$

扭矩 M 应该等于体积 $ABCD$ 的两倍, 于是有

$$M = 2Fh, \quad (f)$$

其中的 F 可以取为内外两边界所包围的面积的平均值, 也就可以取为杆壁中线所包围的面积。由式 (e) 和式 (f) 消去 h , 得

$$\tau = \frac{M}{2F\delta}, \quad (8-38)$$

可见最大剪应力发生在杆壁最薄的地方。

为了确定扭角 K , 可以考虑平板 CD 的平衡。在杆壁中线的微分长度 ds 上, 薄膜对平板所施的拉力是 Tds , 这个拉力在 z 轴上的投影是

$$-Tds \frac{h}{\sqrt{\delta^2 + h^2}} \approx -T \frac{h}{\delta} ds,$$

因为我们假定薄膜的垂度是微小的。注意平板所受的压力是 qF ,

可以由平板的平衡条件 $\sum F_z = 0$ 得

$$-\int T \frac{h}{\delta} ds + qF = 0.$$

其中的积分须要包括杆壁中线的全长。注意 T 和 h 都是常量，上式可以写成

$$\frac{h}{F} \int \frac{ds}{\delta} = \frac{q}{T}.$$

将由式(f)得来的 $h = \frac{M}{2F}$ 代入，并注意薄膜的 $\frac{q}{T}$ 就等于扭杆的 $2GK$ ，得

$$\frac{M}{2F^2} \int \frac{ds}{\delta} = 2GK,$$

从而得到计算扭角 K 的公式

$$K = \frac{M}{4F^2G} \int \frac{ds}{\delta}. \quad (8-39)$$

对于均匀厚度的薄壁杆， δ 是常量，上式成为

$$K = \frac{Ms}{4F^2G\delta}, \quad (8-40)$$

其中的 s 是杆壁中线的全长。

在截面有凹角之处，局部的最大剪应力 τ_{\max} 可能远大于公式 (8-38) 给出的 τ 值。根据胡斯用差分法计算的结果，比值 τ_{\max}/τ 与比值 ρ/δ 的关系大致如图 (8-12) 所示。

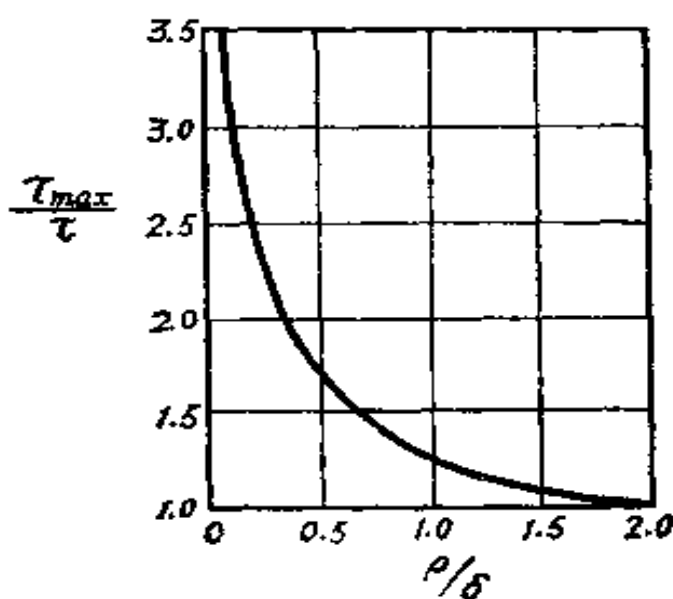


图 8-12

习 题

8-1. 设有任意形状的等截面杆, 密度为 γ , 上端悬挂, 下端自由, 如图 8-13 所示。试证明应力分量 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = \gamma g z$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{xy} = 0$ 能满足所有一切条件, 并试求位移分量。

答案:

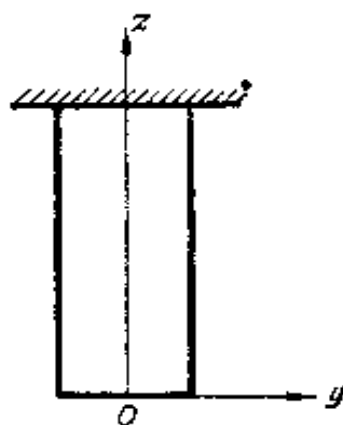


图 8-13

$$u = -\frac{\mu\gamma g}{E}xz + \omega_y z - \omega_z y + u_0,$$

$$v = -\frac{\mu\gamma g}{E}yz + \omega_z x - \omega_x z + v_0,$$

$$w = \frac{\gamma g}{2E}(\mu x^2 + \mu y^2 + z^2)$$

$$+ \omega_x y - \omega_y x + w_0.$$

8-2. 扭杆的横截面为等边三角形 OAB , 其高度为 a , 图 8-14, 取坐标轴如图所示, 则 AB 、 OA 、 OB 三边的方程分别为 $x - a = 0$, $x - \sqrt{3}y = 0$, $x + \sqrt{3}y = 0$ 。试证应力函数

$$\varphi = m(x - a)(x - \sqrt{3}y)(x + \sqrt{3}y)$$

能满足一切条件, 并求出最大剪应力及扭角。

答案: $|\tau_{\max}| = \frac{15\sqrt{3}M}{2a^2},$

$$K = \frac{15\sqrt{3}M}{Ga^4}.$$

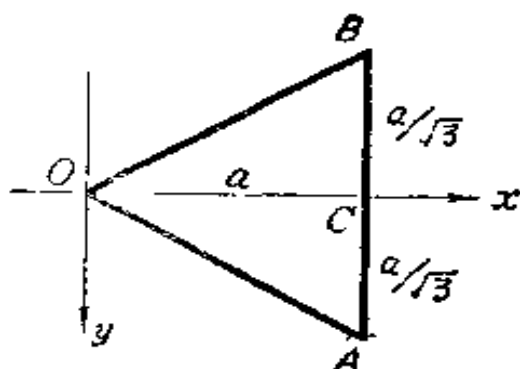


图 8-14

8-3. 半径为 a 的圆截面扭杆, 有半径为 b 的圆弧槽. 图 8-15. 取坐标轴如图所示. 则圆截面边界的方程为 $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, 圆弧槽的方程为 $x^2 + y^2 - b^2 = 0$. 试证应力函数

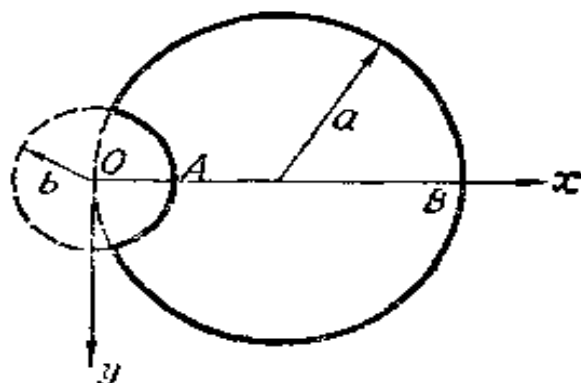


图 8-15

$$\begin{aligned}\varphi &= -GK \frac{(x^2 + y^2 - b^2)(x^2 + y^2 - 2ax)}{2(x^2 + y^2)} \\ &= -GK \left[x^2 + y^2 - b^2 - \frac{2ax(x^2 + y^2 - b^2)}{x^2 + y^2} \right]\end{aligned}$$

能满足(8-17)及(8-21). 试求最大剪应力和边界上离圆弧槽较远处(例如 B 点)的应力. 设圆弧槽很小(b 远小于 a), 试求槽边的应力集中因子 f .

答案: $|\tau_{\max}| = GK(2a - b)$, $\tau_B = GK\left(a - \frac{b^2}{4a}\right)$, $f = 2$.

8-4. 设有闭口薄壁杆, 杆壁具有均匀厚度 δ , 杆壁中线的长度为 s , 而中线所包围的面积为 F . 另有一开口薄壁杆, 系由上述薄壁杆沿纵向切开而成. 设两杆受有同样大小的扭矩, 试求两杆的最大剪应力之比, 并求两杆的扭角之比.

答案: $\frac{s\delta}{6F}$, $\frac{s^2\delta^2}{12F^2}$.

8-5. 闭口薄壁杆的横截面如图 8-16 所示, 均匀厚度为 δ , 受扭矩 M , 试求最大剪应力及扭角。

答案: $M/8a^2\delta$, $M/8Ga^3\delta$.

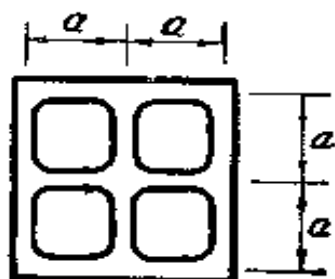


图 8-16

第九章 薄板弯曲问题

§ 9-1 有关概念及计算假定

在弹性力学里, 两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面或棱柱面所围成的物体, 称为平板, 或简称为板, 图 9-1。这两个平行面称为板面, 而这个柱面或棱柱面称为侧面或板边。两个板面之间的距离 t 称为板的厚度, 而平分厚度 t 的平面称为板的中间平面, 或简称为中面。如果板的厚度 t 远小于中面的最小尺寸 b , 这个板就称为薄板, 否则就称为厚板。

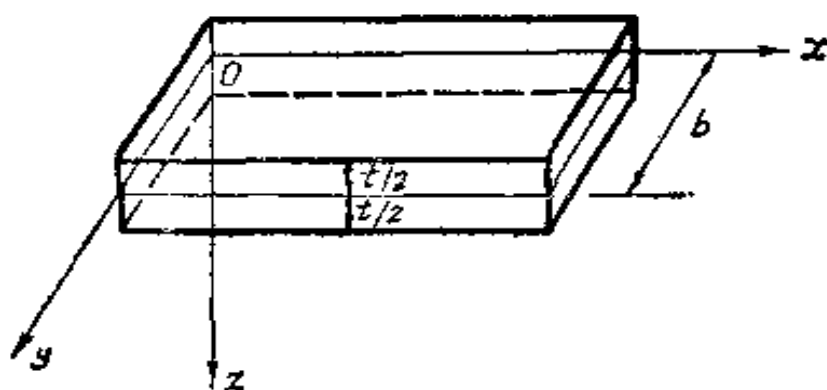


图 9-1

对于薄板, 已经引用一些计算假定而建立了一套完整的理论, 可以用来计算工程上的问题。对于厚板, 虽然也有这样或那样的计算方案被提出来, 但不便应用于工程实际问题。

当薄板受有一般荷载时, 总可以把每一个荷载分解为两个分荷载, 一个是作用在薄板的中面之内的所谓纵向荷载, 另一个是垂直于中面的所谓横向荷载。对于纵向荷载, 可以认为它们沿薄板厚度均匀分布, 因而它们所引起的应力、形变和位移, 可以按平面

应力问题进行计算, 如第二章至第六章所述。横向荷载将使薄板弯曲, 它们所引起的应力、形变和位移, 可以按薄板弯曲问题进行计算。

当薄板弯曲时, 中面所弯成的曲面, 称为薄板的弹性曲面, 而中面内各点在垂直于中面方向的位移, 称为挠度。

本章中只讲述薄板的小挠度弯曲理论, 也就是只讨论这样的薄板: 它虽然很薄, 但仍然具有相当的弯曲刚度, 因而它的挠度远小于它的厚度。如果薄板的弯曲刚度很小, 以致挠度与厚度属于同阶大小, 则须另行建立所谓大挠度弯曲理论。

薄板的小挠度弯曲理论, 是以三个计算假定为基础的(这些假定已被大量的实验所证实)。取薄板的中面为 xy 面, 图 9-1, 这些假定可以陈述如下:

(1) 形变分量 ε_z 极其微小, 可以不计。取 $\varepsilon_z = 0$, 则由几何方程(7-9)中的第三式得 $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 从而得

$$w = w(x, y). \quad (9-1)$$

这就是说, 在薄板中面的任一根法线上, 薄板全厚度内的所有各点都具有相同的位移 w , 也就等于挠度。

(2) 应力分量 τ_{zx} 、 τ_{zy} 和 σ_z 远小于其余三个应力分量, 因而是次要的, 它们所引起的形变可以不计(注意: 它们本身却是维持平衡所必需的, 不能不计)。

因为不计 τ_{zx} 及 τ_{zy} 所引起的形变, 所以有

$$\gamma_{zx} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0.$$

通过几何方程(7-9)改用位移表示, 即得

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (9-2)$$

由于 $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{xz} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$, 可见中面的法线在薄板弯曲时保持不伸缩, 并且成为弹性曲面的法线。

因为不计 σ_z 所引起的形变, 所以由物理方程有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

这就是说, 薄板弯曲问题的物理方程和薄板平面应力问题的物理方程是相同的。

(3) 薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移, 即

$$(u)_{z=0} = 0, \quad (v)_{z=0} = 0. \quad (9-4)$$

因为 $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$, 所以有

$$(\varepsilon_x)_{z=0} = 0, \quad (\varepsilon_y)_{z=0} = 0, \quad (\gamma_{xy})_{z=0} = 0.$$

这就是说, 中面的任意一部分弯曲成为弹性曲面的一部分, 但它在 xy 面上的投影形状却保持不变。

在材料力学里分析直梁的弯曲问题时, 也采用了与上相似的假定, 只是在这里, 薄板的中面代替了直梁的轴线, 薄板的弹性曲面代替了直梁的弹性曲线, 薄板的各向弯曲(实际是连弯带扭)代替了直梁的单向弯曲。

§ 9-2 弹性曲面的微分方程

薄板弯曲问题是按位移求解的, 取为基本未知函数的是薄板的挠度 w 。因此, 我们要把所有的其它物理量都用 w 来表示, 并建立求解 w 的微分方程, 即所谓弹性曲面微分方程。

首先, 将形变分量 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 用挠度 w 来表示。将方程(9-2)

对 z 进行积分, 积分时注意 w 只是 x 和 y 的函数, 不随 z 而变, 即得

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z + f_1(x, y), \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z + f_2(x, y).$$

应用方程 (9-4), 得 $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0$ 。可见

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z, \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z.$$

于是可将形变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 用 w 表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z, & \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z, \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}z. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

在这里, 由于挠度 w 是微小的, 弹性曲面在坐标方向的曲率及扭率可以近似地用挠度 w 表示为

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (9-5)$$

所以式 (a) 也可以改写为

$$\varepsilon_x = \kappa_x z, \quad \varepsilon_y = \kappa_y z, \quad \gamma_{xy} = 2\kappa_{xy}z. \quad (9-6)$$

由上面三式可知, 曲率 κ_x 和 κ_y 以及扭率 κ_{xy} 完全确定了薄板内所有各点的形变分量, 所以这三者就称为薄板的形变分量。式 (9-5) 表示薄板的形变与薄板的位移两者之间的关系, 因而就是薄板弯曲问题的几何方程。

其次, 将应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 用 w 来表示。由物理方程 (9-3) 求解应力分量, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将式 (a) 代入式 (b), 即得所需的表达式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (9-7)$$

再其次, 将应力分量 τ_{zx} 及 τ_{zy} 用 w 来表示。在这里, 因为不存在纵向荷载, 所以有 $X=Y=0$, 而平衡微分方程(7-1)中的前二式可以写成

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

将表达式(9-7)代入, 并注意 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned}$$

注意 w 不随 z 而变, 将上列二式对 z 进行积分, 得

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + F_1(x, y), \\ \tau_{zy} &= \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + F_2(x, y). \end{aligned}$$

但是, 在薄板的下面和上面, 有边界条件

$$(\tau_{zx})_{z=\pm \frac{t}{2}} = 0, \quad (\tau_{zy})_{z=\pm \frac{t}{2}} = 0.$$

应用这些条件求出 $F_1(x, y)$ 及 $F_2(x, y)$ 以后, 即得表达式

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \tau_{zy} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (9-8)$$

最后, 将应力分量 σ_z 也用 w 来表示。利用平衡微分方程(7-1)

中的第三式, 取体力分量 $Z=0$, 得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}. \quad (c)$$

如果体力分量 Z 并不等于零, 我们可以把薄板的每单位面积内的体力归入薄板上面的面力, 并用 q 表示, 即

$$q = \bar{Z} + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} Z dz. \quad (d)$$

这只会对最次要的应力分量 σ_z 引起误差, 对其他的应力分量则毫无影响。这样处理, 和材料力学中对梁的处理相同。

注意 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, 将表达式(9-8)代入式(c)得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right) \nabla^4 w.$$

对 z 进行积分, 并注意 w 不随 z 而变, 得

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{t^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 w + F_3(x, y). \quad (e)$$

但是, 在薄板的下面, 有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}} = 0.$$

将式(e)代入, 求出 $F_3(x, y)$, 再代回式(e), 即得表达式

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[\frac{t^2}{4} \left(z - \frac{t}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(z^3 - \frac{t^3}{8} \right) \right] \nabla^4 w \\ &= -\frac{Et^3}{6(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{t} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{t} \right) \nabla^4 w. \end{aligned} \quad (9-9)$$

现在来导出求解 w 的微分方程。在薄板的上面, 有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=\frac{t}{2}} = -q.$$

其中 q 是薄板单位面积内的横向荷载, 包括横向面力及横向体力, 如式(d)所示。将表达式(9-9)代入, 即得

$$\frac{Et^2}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w = q, \quad (9-10)$$

或

$$D\nabla^4 w = q, \quad (9-11)$$

其中的

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (9-12)$$

称为薄板的弯曲刚度, 它的因次是[力][长度]。

方程(9-11)称为薄板的弹性曲面微分方程或挠曲微分方程, 它是薄板弯曲问题的基本微分方程。求解问题时, 须按照薄板侧面上(即板边上)的边界条件, 由这个微分方程求出挠度 w , 然后就可以按公式(9-7)至(9-9)求得应力分量。

§ 9-3 薄板横截面上的内力

在绝大多数的情况下, 都很难使得应力分量在薄板的侧面上(板边上)精确地满足应力边界条件, 而只能应用圣维南原理, 使这些应力分量所组成的内力整体地满足边界条件。因此, 在讨论薄板弯曲问题的边界条件以前, 先来考察这些应力分量所组成的内力。

从薄板内取出一个微小的平行六面体, 它的三边的长度分别为 dx 、 dy 和 t , 图 9-2。

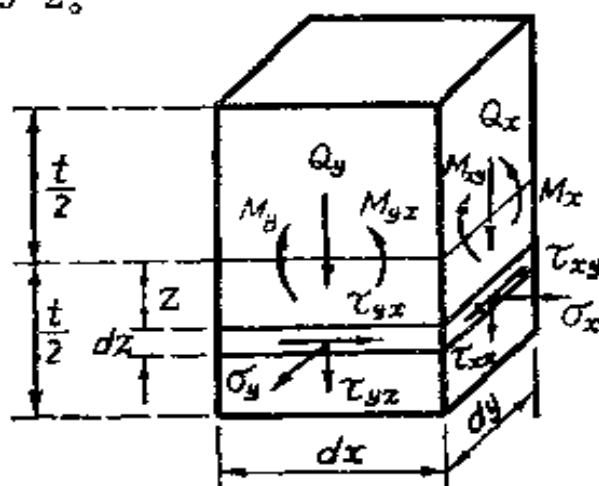


图 9-2

在垂直于 x 轴的横截面上, 作用着 σ_x 、 τ_{xy} 和 τ_{xz} 。由表达式(9-7)可见, σ_x 及 τ_{xy} 与 z 成正比, 是 z 的奇函数, 所以它们在薄板

全厚度上的总和分别等于零, 只可能分别合成为弯矩和扭矩。

在该横截面的每单位宽度上, 应力分量 σ_x 合成为弯矩

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz.$$

将(9-7)中的第一式代入, 对 z 进行积分, 得

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \\ &= -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (a)$$

与此相似, 应力分量 τ_{xy} 将合成为扭矩

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{xy} dz.$$

将(9-7)中的第三式代入, 对 z 进行积分, 得

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \\ &= -\frac{Et^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (b)$$

应力分量 τ_{xz} 只可能合成为横向剪力, 在每单位宽度上为

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz.$$

将(9-8)中的第一式代入, 对 z 进行积分, 得

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right) dz \\ &= -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \end{aligned} \quad (c)$$

同样, 在垂直于 y 轴的横截面上, 每单位宽度内的 σ_y , τ_{yx} 和 τ_{yz} 也分别合成为如下的弯矩、扭矩和横向剪力:

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (d)$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{yx} dz = -\frac{Et^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = M_{xy}, \quad (e)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz = -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (f)$$

利用公式(9-12), 式(a)至(f)可以改写为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} = M_{yx} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (9-13)$$

其中的前三式也可以通过表达式(9-5)再改写成为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D(\chi_x + \mu \chi_y), \quad M_y = D(\chi_y + \mu \chi_x), \\ M_{xy} = M_{yx} &= D(1-\mu) \chi_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (9-14)$$

上列三式表示薄板的内力与薄板的形变两者之间的关系, 因而就是薄板弯曲问题的物理方程。

利用式(a)至(f), 从表达式(9-7)及(9-8)中消去 w , 并利用式(9-10)从表达式(9-9)中消去 w , 可以得出各应力分量与弯矩、扭矩、横向剪力或荷载之间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x}{t^3} z, \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{t^3} z, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{12M_{xy}}{t^3} z, \\ \tau_{xz} &= \frac{6Q_x}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right), \quad \tau_{yz} = \frac{6Q_y}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right), \\ \sigma_z &= -2q \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{t} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9-15)$$

沿着薄板的厚度, 应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的最大数值发生在板面, τ_{xz} 及 τ_{yz} 的最大数值发生在中面, 而 σ_z 的最大数值发生在板的上面, 各个最大数值为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{z=\frac{t}{2}} &= -(\sigma_x)_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{6M_x}{t^2}, \\ (\sigma_y)_{z=\frac{t}{2}} &= -(\sigma_y)_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{6M_y}{t^2}, \\ (\tau_{xy})_{z=\frac{t}{2}} &= -(\tau_{xy})_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{6M_{xy}}{t^2}, \\ (\tau_{xz})_{z=0} &= \frac{3Q_x}{2t}, \quad (\tau_{yz})_{z=0} = \frac{3Q_y}{2t}, \\ (\sigma_z)_{z=\frac{t}{2}} &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (9-16)$$

注意: 以上所提到的内力, 都是作用在薄板每单位宽度上的内力, 所以弯矩和扭矩的因次都是[力], 而不是[力][长度]; 横向剪力的因次是[力][长度]⁻¹, 而不是[力]。

正应力 σ_x 及 σ_y 分别与弯矩 M_x 及 M_y 成正比, 因而称为弯应力; 剪应力 τ_{xy} 与扭矩 M_{xy} 成正比, 因而称为扭应力, 剪应力 τ_{xz} 及 τ_{yz} 分别与横向剪力 Q_x 及 Q_y 成正比, 因而称为横向剪应力; 正应力 σ_z 与荷载 q 成正比, 称为挤压应力。

在薄板弯曲问题中, 得出的弯矩和扭矩, 都是 $q\alpha^2$ 阶的量, 其中 q 是横向荷载的集度, 而 α 是薄板的横向尺度(例如矩形薄板的边长或是圆形薄板的半径等等); 横向剪力则是 $q\alpha$ 阶的量。于是由公式(9-15)或(9-16)可见, 弯应力和扭应力是 $q\frac{\alpha^2}{t^2}$ 阶的量, 横向剪应力是 $q\frac{\alpha}{t}$ 阶的量, 而挤压应力是 q 阶的量。在薄板中, α 是远大于 t 的, 所以弯应力和扭应力在数值上最大, 是主要的应力; 横向剪应力的数值较小, 是次要的应力; 挤压应力在数值上更小, 是更次要的应力。因此, 在计算薄板的内力时, 主要是计算弯矩和扭

矩、横向剪力一般都无须计算。根据这个理由,在一般的工程手册中,只是给出弯矩和扭矩的计算公式或计算图表,而并不提到横向剪力。又由于目前在钢筋混凝土建筑结构的设计中,大都按照双向的弯矩来配置双向的钢筋,而并不考虑扭矩的作用,因此,有些手册中也就不给出扭矩的计算公式和计算图表。

§ 9-4 边界条件、扭矩的等效剪力

在 § 9-2 中已经指出,求解薄板弯曲问题,首先要按照板边的边界条件的要求,由薄板弹性曲面的微分方程(9-11)求出挠度 w 。

本节中以矩形薄板为例,说明各种边界处的边界条件。假定矩形薄板 $OABC$ 的 OA 边是固定边,图 9-3, OC 边是简支边, AB 边和 BC 边是自由边。

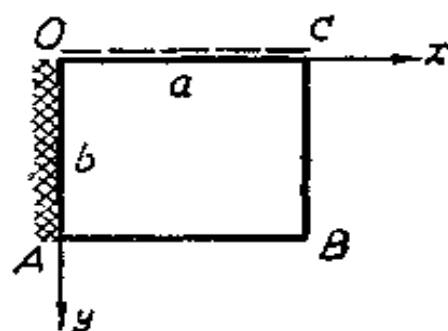


图 9-3

沿着固定边 OA ($x=0$), 薄板的挠度 w 应当等于零, 弹性曲面的斜率 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 也应当等于零, 所以边界条件是

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, \quad (9-17)$$

沿着简支边 OC ($y=0$), 薄板的挠度 w 应当等于零, 弯矩 M_y 也应当等于零, 所以边界条件是

$$(w)_{y=0} = 0, \quad (M_y)_{y=0} = 0. \quad (\alpha)$$

利用(9-13)中的第一式, 条件 (α) 可以全部用 w 表示为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0, \quad (b)$$

但是, 如果前一条件得到满足, 即挠度 w 在整个边界上都等于零,

则 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 也在整个边界上都等于零, 所以简支边 OC 的边界条件(b)可以简写为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0. \quad (9-18)$$

如果在这个简支边上有分布的弯矩荷载 M (一般是 x 的函数), 则边界条件(a)中第二式的右边将不等于零, 而等于这个弯矩荷载 M 。这样, 式(b)中的第二式及(9-18)中的第二式都不适用, 但仍然可以通过表达式(9-13)把上述边界条件用 w 来表示。

沿着自由边, 例如 AB 边 ($y=b$), 薄板的弯矩 M_y 和扭矩 M_{yx} 以及横向剪力 Q_y 都等于零, 因而有三个边界条件

$$(M_y)_{y=b} = 0, \quad (M_{yx})_{y=b} = 0, \quad (Q_y)_{y=b} = 0. \quad (c)$$

但是, 弹性曲面的微分方程(9-11)是四阶的微分方程, 只可能满足两个边界条件。实际上, 薄板任一边界上的扭矩都可以变换为等效的横向剪力, 和原来的横向剪力合并, 因而式(c)中后二式所示的两个条件可以归并为一个条件, 分析如下。

假定在任意边界 AB 的微小长度 $EF=dx$ 上面, 有扭矩 $M_{yx}dx$ 作用着, 图 9-4a。将这个扭矩 $M_{yx}dx$ 变换为等效的两个力 M_{yx} ,

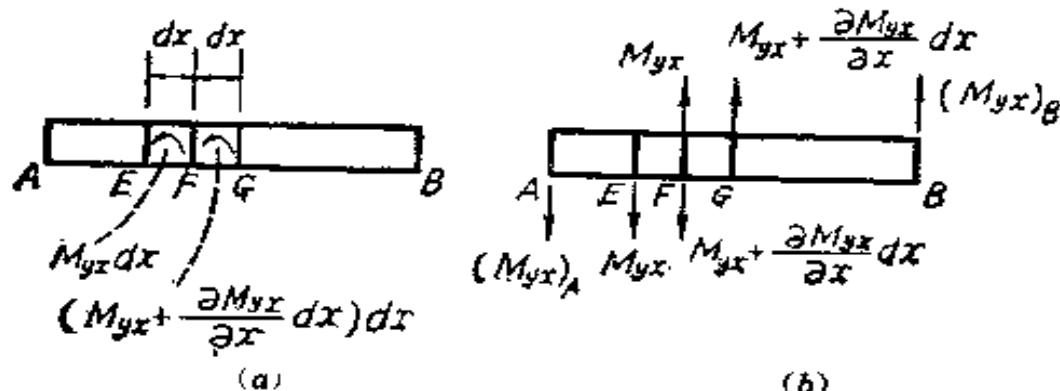


图 9-4

一个在 E 点, 向下, 另一个在 F 点, 向上, 图 9-4b。根据圣维南原理, 这样的等效变换, 只会显著影响这一边界近处的应力, 而其余各处的应力不会受到显著的影响。同样, 在相邻的微小长度 FG

$=dx$ 上面, 扭矩 $\left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial x} dx \right) dx$ 也可以变换为两个力 $M_{yx} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial x} dx$, 一个在 F 点, 向下, 另一个在 G 点, 向上。这样, 在 F 点的两个力合成为向下的 $\frac{\partial M_{yz}}{\partial x} dx$, 而边界 AB 上的分布扭矩就变换为等效的分布剪力 $\frac{\partial M_{yz}}{\partial x}$, 因此, 在边界 AB 上 ($y=b$), 总的分布剪力 (也就等于分布反力) 是

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yz}}{\partial x}.$$

此外, 由图 9-4b 可见, 在 A 点和 B 点, 还有未被抵消的集中剪力 (也就等于集中反力)

$$R_{AB} = (M_{yx})_A, \quad R_{BA} = (M_{yx})_B. \quad (d)$$

根据以上的变换, 如果 AB 是自由边, 它的边界条件(c)就变换成为

$$(M_y)_{y=b} = 0, \quad (V_y)_{y=b} = \left(Q_y + \frac{\partial M_{yz}}{\partial x} \right)_{y=b} = 0, \quad (e)$$

其中前一个条件仍然表示弯矩等于零, 而后一个条件则表示总的分布剪力等于零, 即分布反力等于零 (但是 Q_y 和 M_{yz} 并不分别等于零)。通过式(9-13), 自由边 AB 的边界条件(e)可以改用挠度 w 表示成为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} &= 0, \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} &= 0. \end{aligned} \quad (9-19)$$

如果在这个自由边上有分布的弯矩荷载 M 和分布的横向荷载 V (它们一般是 x 的函数), 则(e)中两式的右边将不等于零, 而分别等于 M 及 V 。这时, 边界条件式(9-19)将不适用, 但也不难利用

表达式(9-13)导出用 w 表示的边界条件。

同样, 沿着边界 $BC(x=a)$, 扭矩 M_{xy} 也可以变换为等效的分布剪力 $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$, 而总的分布剪力为

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (9-20)$$

此外, 在 C 点和 B 点, 还分别有集中剪力(即集中反力)

$$R_{CB} = (M_{xy})_C, \quad R_{BC} = (M_{xy})_B. \quad (f)$$

因此, 如果 BC 是自由边, 则边界条件也可以变换成为

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (V_x)_{x=a} = \left(Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0, \quad (g)$$

或再通过表达式(9-13)改用挠度 w 表示成为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} &= 0, \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} &= 0. \end{aligned} \quad (9-21)$$

当然, 如果这个自由边上有分布的弯矩荷载 M 及分布的横向荷载 V , 则(9)中两式的右边就不等于零, 而分别等于 M 及 V , 边界条件(9-21)就要作相应的修改。

在两边相交的一点, 例如图 9-3 中的 B 点, 由(9)中的第二式及(9)中的第二式可见, 总的集中反力是

$$R_B = R_{BA} + R_{BC} = (M_{yx})_B + (M_{xy})_B = 2(M_{xy})_B,$$

或通过(9-13)中的第三式改写为

$$R_B = -2D(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B. \quad (9-22)$$

如果 B 点是自由边 AB 和自由边 BC 的交点, 而在 B 点并没有任何支柱对薄板施以此项集中反力, 则在 B 点还须补充以边界条件 $R_B = 0$, 亦即

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_B = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{x=a, y=b} = 0, \quad (9-23)$$

如果在 B 点有支柱阻止挠度发生, 则上述条件应改为

$$(w)_B = (w)_{x=a, y=b} = 0, \quad (9-24)$$

而支柱对薄板所施的反力如(9-22)所示。

§ 9-5 四边简支矩形薄板的重三角级数解——纳维叶解法

在四边简支的矩形薄板上, 图 9-5, 边界条件是

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} &= 0, \\ (w)_{x=a} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a} &= 0, \\ (w)_{y=0} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} &= 0, \\ (w)_{y=b} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

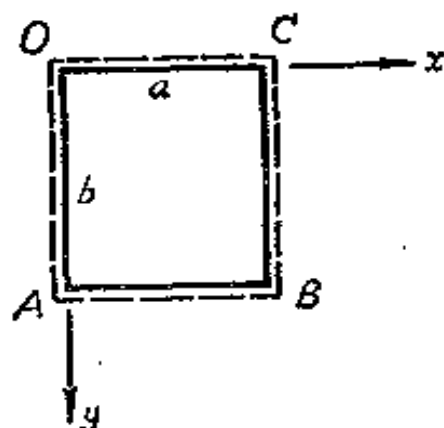


图 9-5

纳维叶把挠度 w 的表达式取为如下的重三角级数:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (b)$$

其中的 m 和 n 是正整数。代入式(α), 可见全部边界条件都能满足。

为了求出系数 A_{mn} , 将式(b)代入微分方程(9-1I), 得

$$\pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q. \quad (c)$$

现在需要将上式右边的 $q = q(x, y)$ 也展为重三角级数:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (d)$$

为了求得 C_{mn} , 将式(d)的左右两边都乘以 $\sin \frac{i\pi x}{a}$, 其中的 i 为任意整数, 然后对 x 积分, 从 0 到 a , 并注意

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{i\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & (m \neq i) \\ a/2, & (m = i) \end{cases}$$

就得到

$$\int_0^a q \sin \frac{i\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_{in} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

再将左右两边都乘以 $\sin \frac{j\pi y}{b}$, 其中的 j 也是任意整数, 然后对 y 积分, 从 0 到 b , 并注意

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{j\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0, & (n \neq j) \\ b/2, & (n = j) \end{cases}$$

就得到

$$\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} C_{ij}.$$

因为 i 和 j 是任意整数, 可以换写为 m 和 n , 所以上式可以换写为

$$\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} C_{mn}.$$

解出 C_{mn} , 代入式(d), 得到

$$q = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

代回式(c), 将两边的系数进行对比, 即得

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 ab D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (e)$$

当薄板受均布荷载时, q 成为常量 q_0 , 式(e)中的积分成为

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\
 &= q_0 \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\
 &= \frac{q_0 ab}{\pi mn} (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi).
 \end{aligned}$$

于是由式(e)得到

$$A_{mn} = \frac{4q_0(1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)}{\pi^6 D mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

或

$$A_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^6 D mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad \begin{matrix} (m=1, 3, 5, \dots; \\ n=1, 3, 5, \dots) \end{matrix}$$

代入式(a), 即得挠度的表达式

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad (f)$$

由此可以用公式(9-13)求得内力的表达式。

当薄板在任意一点 (ξ, η) 受集中荷载 P 时, 可以用微分面积 $dx dy$ 上的均布荷载 $\frac{P}{dx dy}$ 来代替分布荷载 q 。于是, 式(e)中的 q 除了在 (ξ, η) 处等于 $\frac{P}{dx dy}$ 以外, 在其余各处都等于零。因此, 式(e)成为

$$\begin{aligned}
 A_{mn} &= \frac{4}{\pi^4 ab L \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \frac{P}{dx dy} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} dx dy \\
 &= \frac{4P}{\pi^4 ab D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}.
 \end{aligned}$$

代入式(b), 即得挠度的表达式

$$w = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (g)$$

由此可以用公式(9-13)求得内力的表达式。

以上所述的纳维叶解法, 只适用于四边简支的矩形薄板, 而且解答中的重三角级数收敛得较慢(弯矩和扭矩比挠度收敛得慢, 剪力收敛得更慢, 集中荷载下的内力比分布荷载下的内力收敛得还要慢)。这些缺点使得纳维叶解法在实用上受到很大的限制。

§ 9-6 矩形薄板的单三角级数解——李维解法

对于有两个对边被简支的矩形薄板, 可以较简单地用单三角级数求解。

设图 9-6 所示的矩形薄板具有两个简支边 $x=0$ 及 $x=a$, 其余两边 $y=\pm b/2$ 是任意边, 承受任意横向荷载 $q(x, y)$ 。李维把挠度的表达式取为如下的三角级数:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (a)$$

其中 Y_m 是 y 的任意函数, 而 m 为正整数。极易看出, 级数 (a) 能满足 $x=0$ 及 $x=a$ 两边的边界条件, 即

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0,$$

$$(w)_{x=a} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a} = 0.$$

因此, 只须选择函数 Y_m , 使式(a)能满足弹性曲面的微分方程

$$\nabla^4 w = q/D, \quad (b)$$

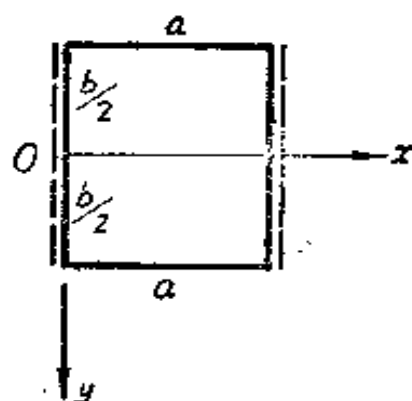


图 9-6

并在 $y = \pm b/2$ 的两边上满足边界条件。

将式(a)代入式(b), 得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q}{D}. \quad (c)$$

再将式(c)右边的 q/D 展为 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 的级数, 得

$$\frac{q}{D} = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_0^a \frac{q}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

与式(c)对比, 可见有

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m = -\frac{2}{aD} \int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (d)$$

这一常微分方程的解答可以写成

$$Y_m = A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + f_m(y),$$

其中 $f_m(y)$ 是任意一个特解, 可按照式(d)右边积分以后的结果来选择; A_m, B_m, C_m, D_m 是任意常数, 决定于 $y = \pm b/2$ 两边的边界条件。将上式代入式(a), 即得挠度 w 的表达式

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + f_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (e)$$

作为例题, 设图 9-6 中的矩形薄板是四边简支的, 受有均布荷载 $q = q_0$ 。这时, 微分方程(d)的右边成为

$$\frac{2q_0}{aD} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = -\frac{2q_0}{\pi D m} (1 - \cos m\pi)$$

$$= \frac{4q_0}{\pi D m^5}, \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

于是微分方程(d)的特解可以取为

$$f_m(y) = \left(\frac{\sigma}{m\pi}\right)^4 \frac{4q_0}{\pi D m^5} = \frac{4q_0 \sigma^4}{\pi^5 D m^5}, \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

代入式(e), 并注意薄板的挠度 w 应当是 y 的偶函数, 因而有 $C_m = 0$, $D_m = 0$, 即得

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} + \frac{4q_0 \sigma^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (f)$$

应用 $y = \pm b/2$ 处的边界条件

$$(w)_{y=\pm b/2} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=\pm b/2} = 0,$$

得出决定 A_m 及 B_m 的联立方程

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \alpha_m A_m + \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m B_m + \frac{4q_0 \sigma^4}{\pi^5 D m^5} &= 0, \\ \operatorname{ch} \alpha_m (A_m + \alpha_m B_m) + \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m B_m &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \alpha_m A_m + \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m B_m &= 0, \\ \operatorname{ch} \alpha_m (A_m + \alpha_m B_m) + \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m B_m &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (m=2, 4, 6, \dots)$$

其中 $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$. 求解 A_m 及 B_m , 得出

$$A_m = -\frac{2(2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) q_0 \sigma^4}{\pi^5 D m^5 \operatorname{ch} \alpha_m},$$

$$B_m = \frac{2q_0 \sigma^4}{\pi^5 D m^5 \operatorname{ch} \alpha_m}; \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

或者得出

$$A_m = 0, \quad B_m = 0. \quad (m = 2, 4, 6, \dots)$$

将求出的系数代入式(f), 得挠度 w 的最后表达式

$$w = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{m^5} \right) \left(1 - \frac{2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{2y}{b} \operatorname{sh} \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (g)$$

并可以从而求得内力的表达式。

最大挠度发生在薄板的中心。将 $x = \frac{a}{2}$ 及 $y = 0$ 代入(g), 即得

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5} \left(1 - \frac{2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right). \quad (h)$$

这个表达式中的级数收敛很快。例如, 对于正方形薄板, $b = a$, $\alpha_m = \frac{m\pi}{2}$, 将得出

$$w_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} (0.314 - 0.004 - \dots) = 0.00406 \frac{q_0 a^4}{D}.$$

在数级中仅取两项, 就得到很精确的解答。但是, 在其他各点的挠度表达式中, 级数收敛就没有这样快。在内力的表达式中, 级数收敛得还要慢一些。

应用本节中所述的李维解法, 可以得出四边简支的矩形薄板在受各种横向荷载时的解答, 还可以得出这种薄板在某一边界上受分布弯矩或发生挠度(沉陷)时的解答, 以及在角点发生沉陷时的解答。利用这些解答, 采用结构力学里的力法, 位移法或混合法, 以四边简支的矩形薄板为基本系, 可以得出任意边界的矩形薄板受任意横向荷载时的解答。但是, 求解时的运算是比较繁的。

对于在各种边界条件下承受各种横向荷载的矩形薄板, 很多专著和手册中给出了关于挠度和弯矩的表格, 可供工程设计之用。

为了节省篇幅, 对于只具有简支边和固定边而不具有自由边的矩形薄板, 表格或图线中大都只给出泊松系数等于某一指定数值时的弯矩, 因为我们极易由此求得泊松系数等于任一其他数值时的弯矩, 说明如下:

薄板的弹性曲面微分方程(9-11)可以改写成

$$\nabla^4(Dw) = q, \quad (i)$$

固定边及简支边的边界条件不外乎如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} (Dw)_{x=x_1} &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}Dw\right)_{x=x_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}Dw\right)_{x=x_1} = 0, \\ (Dw)_{y=y_1} &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}Dw\right)_{y=y_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}Dw\right)_{y=y_1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

或者

把 Dw 看做基本未知函数, 则由式(i)及式(j)可见, Dw 的微分方程及边界条件中都不包含泊松系数 μ 。因此 Dw 的解答也不会包含 μ , 于是 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}Dw$ 及 $\frac{\partial^2}{\partial y^2}Dw$ 都不随 μ 而变。

现在, 根据公式(9-13), 当泊松系数为 μ 时, 弯矩为

$$M_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}Dw - \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2}Dw, \quad M_y = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}Dw - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}Dw; \quad (k)$$

当泊松系数为 μ' 时, 弯矩为

$$M'_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}Dw - \mu' \frac{\partial^2}{\partial y^2}Dw, \quad M'_y = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}Dw - \mu' \frac{\partial^2}{\partial x^2}Dw. \quad (l)$$

由式(k)解出 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}Dw$ 及 $\frac{\partial^2}{\partial y^2}Dw$, 然后代入式(l), 得到关系式

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= \frac{1}{1-\mu^2}[(1-\mu\mu')M_x + (\mu'-\mu)M_y], \\ M'_y &= \frac{1}{1-\mu^2}[(1-\mu\mu')M_y + (\mu'-\mu)M_x]. \end{aligned} \right\} \quad (9-25)$$

于是可见, 如果已知泊松系数为 μ 时的弯矩 M_x 及 M_y , 就很容易

求得泊松系数为 μ' 时的弯矩 M'_x 及 M'_y 。在 $\mu=0$ 的情况下(即表格或图线所示的 M_x 及 M_y 是取 $\mu=0$ 而算出的), 则上式简化为

$$M'_x = M_x + \mu' M_y, \quad M'_y = M_y + \mu' M_x. \quad (9-26)$$

注意, 如果薄板具有自由边, 则由于自由边的边界条件方程中包含着泊松系数 μ , 因而 Dw 的解答将随泊松系数 μ 而变。于是, 式(k)中的 Dw 与式(l)中的 Dw 一般并不相同, 因而就得出关系式(9-25)及(9-26)。

§ 9-7 圆形薄板的弯曲

求解圆形薄板的弯曲问题时, 和求解圆形边界的平面问题时一样, 用极坐标比较方便。这时, 我们把挠度 w 和横向荷载 q 都看做是极坐标 r 和 θ 的函数, 即 $w=w(r, \theta)$, $q=q(r, \theta)$ 。进行与 § 4-3 中相同的运算, 可以得出下列变换式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &\quad - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \\ &\quad - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ &\quad - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (c)$$

应用式(c), 弹性曲面的微分方程(9-11)可以变换成为

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = q. \quad (9-27)$$

为了导出用挠度 w 表示内力的表达式, 从薄板内取出一个微小的部分, 如图 9-7 所示。在 r 为常量的横截面上, 弯矩、扭矩和横向剪力分别用 M_r 、 $M_{r\theta}$ 和 Q_r 表示; 在 θ 为常量的横截面上, 则用 M_θ 、 $M_{\theta r}$ 和 Q_θ 表示。在图 9-7 中, 弯矩与扭矩都是按右手螺旋定则用矩矢来表示的。现在, 把 x 轴和 y 轴分别转到这个微小部分的 r 和 θ 方向, 则 M_r 、 M_θ 、 $M_{r\theta}$ 、 $M_{\theta r}$ 、 Q_r 、 Q_θ 分别成为 M_x 、 M_y 、 M_{xy} 、 M_{yx} 、 Q_x 、 Q_y 。利用变换式(b)和(a), 令 $\theta=0$, 即由表达式(9-13)得到

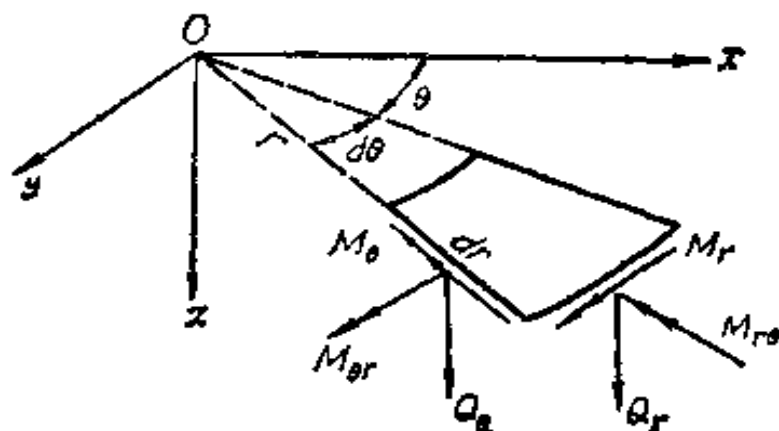


图 9-7

$$\begin{aligned} M_r &= (M_x)_{\theta=0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} \\ &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_\theta &= (M_y)_{\theta=0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} \\ &= -D \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right], \end{aligned} \quad (9-28)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{r\theta} &= (M_{r\theta})_{\theta=0} = -D(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} \\ &= -D(1-\mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ Q_r &= (Q_r)_{\theta=0} = -D \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \right)_{\theta=0} = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w, \\ Q_\theta &= (Q_\theta)_{\theta=0} = -D \left(\frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \right)_{\theta=0} = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w, \end{aligned} \right\}$$

其中的 $\nabla^2 w$ 是用式(c)表示的。

通过这样的转换, 公式(9-15)就成为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{12 M_r}{t^3} z, \quad \sigma_\theta = \frac{12 M_\theta}{t^3} z, \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = -\frac{12 M_{r\theta}}{t^3} z, \\ \tau_{rz} &= -\frac{6 Q_r}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right), \\ \tau_{\theta z} &= -\frac{6 Q_\theta}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right), \\ \sigma_z &= -2q \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{t} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9-29)$$

最大应力的公式(9-16)也就成为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_r)_{z=\frac{t}{2}} &= -(\sigma_r)_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{6 M_r}{t^2}, \\ (\sigma_\theta)_{z=\frac{t}{2}} &= -(\sigma_\theta)_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{6 M_\theta}{t^2}, \\ (\tau_{r\theta})_{z=\frac{t}{2}} &= -(\tau_{r\theta})_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{6 M_{r\theta}}{t^2}, \\ (\tau_{rz})_{z=0} &= \frac{3 Q_r}{2t}, \quad (\tau_{\theta z})_{z=0} = \frac{3 Q_\theta}{2t}, \\ (\sigma_z)_{z=\frac{t}{2}} &= -q. \end{aligned} \right\} \quad (9-30)$$

现在来写出边界条件(坐标原点取在薄板的中心):

设 $r=a$ 处有固定边, 则该处的挠度 w 应当等于零, 薄板弹性

曲面的斜率 $\frac{\partial w}{\partial r}$ 也应当等于零, 即

$$(w)_{r=a}=0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a}=0. \quad (9-31)$$

设 $r=a$ 处有简支边, 则该处的挠度 w 应当等于零, 弯矩 M_r 也应当等于零, 即

$$(w)_{r=a}=0, \quad (M_r)_{r=a}=0. \quad (9-32)$$

如果这个简支边上受有分布的弯矩荷载 M , (9-32) 中第二式的右边就不等于零而等于 M 。

和 § 9-4 中相似, 在 r 为常量的截面上, 扭矩 $M_{r\theta}$ 可以变换成为等效的剪力 $\frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}$, 与横向剪力 Q_r 合并而成为总的剪力 V_r , 即

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}. \quad (9-33)$$

由于在圆板中, r 为常量的截面是一个光滑连续的截面, 所以集中剪力 R 不存在。

这样, 设 $r=a$ 处有自由边, 则该处的边界条件成为

$$(M_r)_{r=a}=0, \quad (V_r)_{r=a} = \left(Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}\right)_{r=a} = 0, \quad (9-34)$$

其中前一个条件仍然表示弯矩等于零, 而后一个条件则表示总的分布剪力等于零。当然, 如果这个自由边上受有分布的弯矩荷载 M 及横向荷载 V , 则上列二式的右边将不等于零而分别等于 M 及 V 。

在以上的边界条件中, 可以通过 (9-28) 式把内力改用 w 来表示, 从而把边界条件直接用 w 表示。

§ 9-8 圆形薄板的轴对称弯曲

如果圆形薄板所受的横向荷载是绕 z 轴对称的 (q 只是 r 的

函数,不随 θ 而变),则该薄板的弹性曲面也将是绕 z 轴对称的(w 只是 r 的函数,不随 θ 而变)。这时,弹性曲面的微分方程(9-27)简化为

$$D\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right) = q. \quad (a)$$

这个常微分方程的解答是

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + w_1, \quad (b)$$

其中的 w_1 是任意特解,可以按照荷载的分布来选择; C_1, C_2, C_3, C_4 是任意常数,决定于边界条件。

对于受均布荷载 q_0 的薄板,式(a)中的 q 等于常数 q_0 ,这时式(b)中的特解可以取为 $w_1 = mr^4$ 的形式,其中 m 是常数。将 $w = w_1 = mr^4$ 代入式(a),求得 $m = \frac{q_0}{64D}$,于是解答(b)成为

$$w = C_1 \ln r + C_2 r^2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 + \frac{q_0 r^4}{64D}. \quad (c)$$

如果在薄板的中心并没有孔,常数 C_1 和 C_2 都应当等于零,否则在薄板的中心($r=0$),内力将成为无限大。于是得

$$w = C_3 r^2 + C_4 + \frac{q_0 r^4}{64D}, \quad \frac{dw}{dr} = 2C_3 r + \frac{q_0 r^3}{16D}, \quad (d)$$

并由公式(9-28)得

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -2(1+\mu)DC_3 - \frac{3+\mu}{16}q_0 r^2, \\ M_\theta &= -2(1+\mu)DC_3 - \frac{1+3\mu}{16}q_0 r^2, \\ M_{r,\theta} - M_{\theta,r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

剪力 Q_r 可由平衡条件得到,不必利用公式(9-28);剪力 Q_θ 则由于对称而可见其等于零。常数 C_3 和 C_4 决定于边界条件。

设半径为 a 的薄板具有固定边,则边界条件为

$$(w)_{r=a}=0, \quad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a}=0.$$

于是由式(d)得

$$a^2 C_3 + C_4 + \frac{q_0 a^4}{64D} = 0, \quad 2a C_3 + \frac{q_0 a^3}{16D} = 0,$$

由此求得

$$C_3 = -\frac{q_0 a^2}{32D}, \quad C_4 = \frac{q_0 a^4}{64D}.$$

代回式(d)及式(e), 即得

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 a^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2, \\ M_r &= \frac{q_0 a^2}{16} \left[(1 + \mu) - (3 + \mu) \frac{r^2}{a^2} \right], \\ M_\theta &= \frac{q_0 a^2}{16} \left[(1 + \mu) - (1 + 3\mu) \frac{r^2}{a^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

此外, 取出半径为 r 的中间部分的薄板, 由平衡条件 $\Sigma F_z = 0$ 得

$$2\pi r Q_r - q_0 \pi r^2 = 0,$$

从而得

$$Q_r = -\frac{q_0 r}{2}. \quad (g)$$

在薄板的中心, 由式(f)得

$$\left. \begin{aligned} (w)_{r=0} &= \frac{q_0 a^4}{64D}, \\ (M_r)_{r=0} - (M_\theta)_{r=0} &= \frac{(1 - \mu) q_0 a^2}{16}. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

在边界上, 由式(f)及式(g)得

$$(M_r)_{r=a} = -\frac{q_0 a^2}{8}, \quad (Q_r)_{r=a} = -\frac{q_0 a}{2}. \quad (i)$$

设半径为 a 的薄板具有简支边, 则边界条件为

$$(w)_{r=a} = 0, \quad (M_r)_{r=a} = 0.$$

于是由式(d)及式(e)得

$$\alpha^2 C_3 + C_4 + \frac{q_0 \alpha^4}{64D} = 0, \quad -2(1+\mu)DC_3 - \frac{(3+\mu)q_0 \alpha^2}{16} = 0,$$

由此可得出 C_3 及 C_4 。再代回式(d)及式(e), 得

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 \alpha^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right) \left(\frac{5+\mu}{1+\mu} - \frac{r^2}{\alpha^2} \right), \\ \frac{dw}{dr} &= -\frac{q_0 \alpha^3}{16D} \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} - \frac{r^2}{\alpha^2} \right) \frac{r}{\alpha}, \\ M_r &= \frac{(3+\mu)q_0 \alpha^2}{16} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right), \\ M_\theta &= \frac{q_0 \alpha^2}{16} \left[(3-\mu) - (1+3\mu) \frac{r^2}{\alpha^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

剪力 Q_r 仍然如式(g)所示。

在薄板的中心, 由式(j)得,

$$\left. \begin{aligned} (w)_{r=0} &= \frac{(5+\mu)q_0 \alpha^4}{64(1+\mu)D}, \\ (M_r)_{r=0} &= (M_\theta)_{r=0} = \frac{(3+\mu)q_0 \alpha^2}{16}. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

在边界上, 由式(j)及式(g)得,

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dw}{dr} \right)_{r=\alpha} &= -\frac{q_0 \alpha^3}{8(1+\mu)D}, \\ (Q_r)_{r=\alpha} &= -\frac{q_0 \alpha}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

设半径为 α 的简支边圆形薄板, 不受横向荷载, 但在边界上受有均布弯矩 M 。这时, 式(a)中的 q 等于零, 因而式(b)中的特解 w_1 可以取为等于零。假定薄板中心并没有孔, 则常数 C_1 及 C_2 仍然等于零。于是由式(b)得

$$w = C_3 r^2 + C_4, \quad \frac{dw}{dr} = 2C_3 r, \quad (m)$$

并由公式(9-28)得

显然, 这一微分方程的特解可以取为 $w_1 = mr^5 \cos \theta$ 的形式, 其中 m 是常数。将 $w = w_1$ 代入式(b), 得 $m = \frac{q_1}{192aD}$, 从而得特解

$$w_1 = \frac{q_1}{192aD} r^5 \cos \theta. \quad (c)$$

为了求出补充解 w_2 , 根据挠度对称于 x 轴而反对称于 y 轴的特性, 并结合特解(c)的形式, 假设

$$w_2 = f(r) \cos \theta. \quad (d)$$

将 $w = w_2$ 代入式(b)的齐次微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0,$$

得

$$\cos \theta \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{f}{r^2} \right) = 0.$$

删去因子 $\cos \theta$, 求解这一微分方程, 得

$$f(r) = C_1 r + C_2 r^3 + \frac{C_3}{r} + C_4 r \ln r. \quad (e)$$

于是由(c)、(d)、(e)三式得挠度 w 的全解

$$\begin{aligned} w &= w_1 + w_2 \\ &= \frac{q_1 r^5 \cos \theta}{192aD} + \left(C_1 r + C_2 r^3 + \frac{C_3}{r} + C_4 r \ln r \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (f)$$

由于薄板的中心并没有孔, 为了薄板中心的挠度及内力不致成为无限大, 必须取 $C_3 = C_4 = 0$, 于是式(f)简化为

$$w = \frac{q_1 r^5 \cos \theta}{192aD} + (C_1 r + C_2 r^3) \cos \theta. \quad (g)$$

假定薄板的边界是简支边, 则边界条件要求

$$(w)_{r=a} = 0, \quad (M_r)_{r=a} = 0.$$

将式(9-28)中 M_r 的表达式代入, 得

$$(w)_{r=a}=0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} = 0.$$

将式(g)代入, 求出常数 C_1 及 C_2 , 再代回式(g), 即得

$$w = \frac{q_1 a^4}{192D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(\frac{7+\mu}{3+\mu} - \frac{r^2}{a^2} \right) \frac{r}{a} \cos \theta. \quad (h)$$

有了挠度 w 的这个表达式, 就可以求得薄板的内力。例如, 将式(h)代入(9-28)中的前二式, 得弯矩的表达式

$$M_r = -\frac{q_1 a^2}{48} (5+\mu) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \frac{r}{a} \cos \theta,$$

$$M_\theta = -\frac{q_1 a^2}{48} \left[\frac{(5+\mu)(1+3\mu)}{3+\mu} - (1+5\mu) \frac{r^2}{a^2} \right] \frac{r}{a} \cos \theta.$$

读者试用上列两个表达式证明: 最大的 M_r 发生在 $\theta=0$ 而 $r=a/\sqrt{3}$ 的一点处, 它的数值是

$$(M_r)_{\max} = \frac{\sqrt{3}(5+\mu)q_1 a^2}{216}.$$

最大的 M_θ 发生在 $\theta=0$ 而

$$r = \sqrt{\frac{(5+\mu)(1+3\mu)}{3(1+5\mu)(3+\mu)}} a$$

的一点处, 它的数值是

$$(M_\theta)_{\max} = \sqrt{\frac{3(5+\mu)^3(1+3\mu)^3}{(1+5\mu)(3+\mu)^3}} \frac{q_1 a^2}{216}.$$

如果薄板的边界是固定边, 则边界条件是

$$(w)_{r=a}=0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0.$$

将式(g)代入, 求出常数 C_1 及 C_2 , 再代回式(g), 即得

$$w = \frac{q_1 a^4}{192D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \frac{r}{a} \cos \theta. \quad (i)$$

利用(9-28)中的前二式, 可由式(i)得出弯矩的表达式

$$M_r = -\frac{q_1 a^3}{48} \left[\left(5\frac{r^2}{a^2} - 3 \right) + \mu \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) \right] \frac{r}{a} \cos \theta,$$

$$M_r = -\frac{q_1 a^2}{18} \left[\left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) + \mu \left(5 \frac{r^2}{a^2} - 3 \right) \right] \frac{r}{a} \cos \theta.$$

读者试证, 弯矩的最大绝对值是 $q_1 a^2/24$, 发生在 $r=a$ 而 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 之处。

§ 9-10 用差分法解薄板弯曲问题

对于具有正交边界的薄板的弯曲问题, 用差分法求解是比较简便的。求解时, 和平面问题一样, 也在薄板的中面上织成网格, 图 9-9。按照弹性曲面的微分方程(9-11), 在任一结点 0, 我们有

$$(\nabla^4 w)_0 = q_0/D, \quad (a)$$

其中 $(\nabla^4 w)_0$ 为 $\nabla^4 w$ 在结点 0 的值, q_0 为分布荷载在结点 0 的值。利用差分公式(5-6)至(5-8), 可由式(a)得差分方程

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) = \frac{q_0 h^4}{D}. \quad (9-35)$$

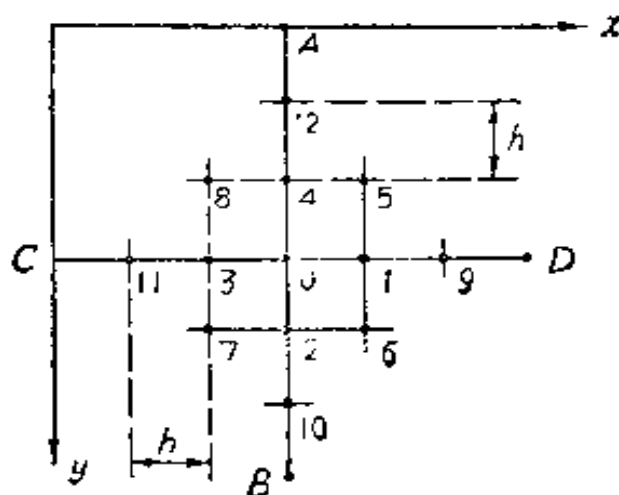


图 9-9

设薄板的边界只有简支边和固定边, 则边界上结点处的 w 都等于零。至于边界外一行虚结点处的 w , 则可用边界内一行结点处的 w 来表示。例如, 设 AB 边为简支边(结点 5、1、6 在边界外而结点 8、3、7 在边界内), 则在该边界上的任一结点 0 处, 有边界条件

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{w_1 + w_3 - 2w_0}{h^2} = 0.$$

注意 $w_0=0$, 可见 $w_1 = -w_3$ 。又例如, 设 AB 边为固定边, 则在结点 0 处有边界条件

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \frac{w_1 - w_3}{2h} = 0.$$

由这一关系式可见 $w_1 = w_3$ 。这样, 取内结点处的 w 值为未知值, 为各个内结点立出(9-35)型的差分方程, 联立求解, 就可以求出这些未知值。

设薄板具有自由边, 则自由边上各结点处的 w 值也须取为未知值, 并须为这些结点列出(9-35)型的差分方程。这些方程中将包含边界外第一行及第二行虚结点处的 w 。但是, 利用边界条件, 可以把这些虚结点处的 w 用边界上及边界内各结点处的 w 来表示。这样就可使差分方程中只包含自由边上及边界以内各结点处的 w , 从而联立求解这些 w 值。

不论边界如何, 求出各结点处的 w 值以后, 就可以用差分公式求得内力及反力。例如, 结点 0 处的弯矩 M_x 是

$$\begin{aligned} (M_x)_0 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 \\ &= -D \left(\frac{w_1 + w_3 - 2w_0}{h^2} + \mu \frac{w_2 + w_4 - 2w_0}{h^2} \right) \\ &= \frac{D}{h^2} [2(1 + \mu)w_0 - (w_1 + w_3) - \mu(w_2 + w_4)]. \end{aligned} \quad (b)$$

同样可得该结点处的弯矩 M_y 是

$$(M_y)_0 = \frac{D}{h^2} [2(1 + \mu)w_0 - (w_2 + w_4) - \mu(w_1 + w_3)]. \quad (c)$$

作为例题, 设有正方形薄板, 边长为 a , 四边简支, 图 9-10, 受有均布荷载 q_0 。取 $h = \frac{a}{4}$ 。由于对称, 只须取 w_1, w_2, w_3 为未知值。

为结点 1、2、3 立出 (9-35) 型的差分方程:

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_3) = q_0 h^4 / D,$$

$$20w_2 - 8(w_1 + 2w_3) + 2(2w_2) + (w_2 - w_2) = q_0 h^4 / D,$$

$$20w_3 - 8(2w_2) + 2(w_1) + (w_3 - w_3 + w_3 - w_3) = q_0 h^4 / D,$$

联立求解, 得

$$w_1 = \frac{33}{32} \frac{q_0 h^4}{D}, \quad w_2 = \frac{3}{4} \frac{q_0 h^4}{D}, \quad w_3 = \frac{35}{64} \frac{q_0 h^4}{D},$$

并由式 (b) 或式 (c), 得

$$(M_x)_1 = (M_y)_1 = \frac{9(1+\mu)}{16} q_0 h^2.$$

由对称性可见, 最大挠度及最大弯矩都发生在结点 1 处。最大挠度为

$$w_{\max} = w_1 = \frac{33}{32} \frac{q_0 h^4}{D} = 0.00402 \frac{q_0 a^4}{D},$$

与精确值 $0.00406 \frac{q_0 a^4}{D}$ 只相差 1%。最大弯矩为

$$M_{\max} = (M_x)_1 = (M_y)_1 = \frac{9(1+\mu)}{16} q h^2 = \frac{9(1+\mu)}{256} q a^2.$$

设 $\mu = 0.3$, 则得 $M_{\max} = 0.0457 q_0 a^2$, 与精确值 $0.0479 q_0 a^2$ 相差约 5%。

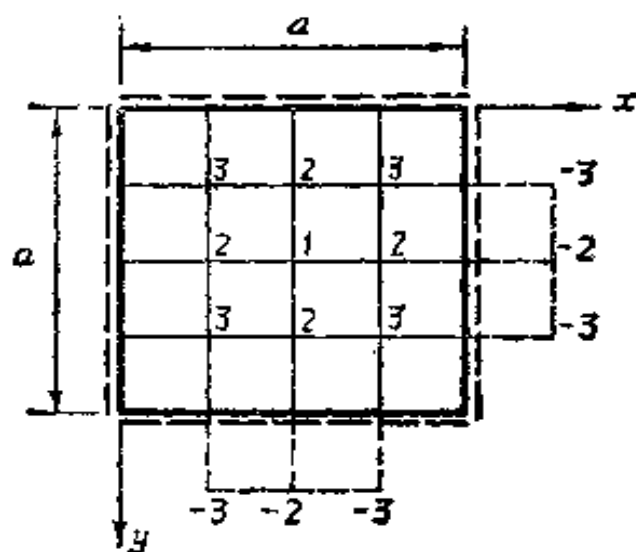


图 9-10

§ 9-11 用变分法解薄板弯曲问题

在薄板弯曲问题中,按照计算假定,是不计形变分量 $\epsilon_z, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ 的。于是,§ 5-6中弹性体形变势能的基本公式简化为

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz. \quad (a)$$

上式中的应力分量和形变分量,已在§ 9-2 中用挠度 w 表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & \epsilon_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z, \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), & \epsilon_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z, \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

代入式(a),得

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iiint z^2 \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy dz.$$

注意上式方括号中的各项都不随 z 而变,对 z 进行积分,取极限 $-t/2$ 到 $t/2$,并应用公式(9-12),即得

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (9-36)$$

按照薄板弯曲问题的计算假定及几何方程,位移分量 u 和 v 可以用挠度 w 表示,不必取为基本未知函数(也不应取为基本未知函数),因而只有 w 这唯一的基本未知函数。现在,把 w 的表达式设定为

$$w = \sum_m C_m w_m, \quad (9-37)$$

其中的 C_m 为互不依赖的 m 个待定系数; w_m 为满足薄板位移边界条件(即约束条件)的设定函数。这样,不论 C_m 如何取值,上式所示的挠度 w 总能满足位移边界条件。在这里,挠度的变分只是由系数 C_m 的变分来实现;至于设定的函数 w_m ,则仅随坐标而变,与上述变分完全无关。

在瑞次法中,为了决定系数 C_m ,须应用空间问题中类似于(5-26)的方程。

$$\frac{\partial U}{\partial C_m} = \iiint V w_m dx dy dz + \iint \bar{Z} w_m dS. \quad (c)$$

注意:在薄板弯曲问题中,横向体力归入了横向面力,而两者又一并归入横向荷载 q ,因此有 $Z=0, \bar{Z}=q$ 。再注意在板面上有 $dS = dx dy$,可见式(c)成为

$$\frac{\partial U}{\partial C_m} = \iint q w_m dx dy. \quad (9-38)$$

由此可以得出 C_m 的 m 个线性方程,用来确定 C_m ,从而由(9-37)式得出挠度 w ,再从而求得薄板的内力。

用极坐标求解时,须将上列公式中的各项改用极坐标表示。为此,在式(9-36)中,将微分面积 $dx dy$ 改用 $r d\theta dr$ 表示,并对其中的二阶导数用 § 9-7 中的方法进行变换,简化以后,即得薄板在极坐标中的形变势能表达式如下:

$$\begin{aligned} U = \frac{D}{2} \iint & \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 \right. \\ & + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta. \end{aligned} \quad (9-39)$$

表达式(9-37)保持不变,但 q 及 w_m 为 r 和 θ 的函数,而方程(9-38)须改换为

$$\frac{\partial U}{\partial C_m} = \iint q w_m r dr d\theta. \quad (9-40)$$

在圆形薄板的轴对称问题中, 横向荷载及挠度都只是 r 的函数, 即

$$q = q(r), \quad w = w(r).$$

于是形变势能的表达式(9-39)简化为

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + 2\mu \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] dr d\theta.$$

注意 $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, 则上式可以改写为

$$U = \pi D \int \left[r \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + 2\mu \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right] dr. \quad (9-41)$$

方程(9-40)则简化为

$$\frac{\partial U}{\partial C_m} = 2\pi \int q w_m r dr. \quad (9-42)$$

在伽辽金法中, 仍然把薄板挠度的表达式设定为(9-37)的形式, 即

$$w = \sum_m C_m w_m. \quad (d)$$

但是, 现在的 w_m 必须同时满足位移边界条件和内力边界条件, 也就是必须满足薄板的全部边界条件。

为了导出决定系数 C_m 的方程, 须应用空间问题的类似于 § 5-8 中的变分方程

$$\iiint \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z \right) w_m dx dy dz = 0. \quad (e)$$

在薄板的弯曲问题中, 体力是归入横向荷载 q 的, 因此, 在式(e)中应当取 $Z=0$ 。将式中的应力分量按照 § 9-2 中的公式用 w 和 z 来表示, 对 z 积分, 从 $z=-t/2$ 到 $z=t/2$, 即得

$$\iint (q - D\nabla^4 w) w_m dx dy = 0,$$

也就是

$$D \iint (\nabla^4 w) w_m dx dy = \iint q w_m dx dy. \quad (9-13)$$

由此可得 m 个方程, 用来求解系数 C_m 。

用极坐标求解问题时, 要将方程(9-43)改用极坐标表示。这样就得到

$$D \iint (\nabla^4 w) w_m r dr d\theta = \iint q w_m r dr d\theta, \quad (9-44)$$

其中

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w.$$

对于轴对称问题, 方程(9-44)简化为

$$D \int (\nabla^4 w) w_m r dr = \int q w_m r dr, \quad (9-45)$$

其中

$$\nabla^4 w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 w. \quad (9-46)$$

§ 9-12 变分法应用举例

作为第一个例题, 设有矩形薄板, 边长为 a 及 b , 图 9-11. 上下两边简支, 左边固定, 右边自由, 受有均布荷载 q_0 。取坐标轴如图所示, 则位移边界条件为

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = 0,$$

$$(w)_{y=0} = 0, \quad (w)_{y=b} = 0.$$

将挠度的表达式取为

$$w = C_1 w_1 = C_1 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (a)$$

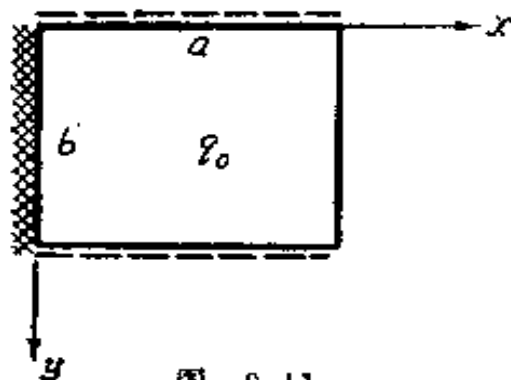


图 9-11

可以满足上列位移边界条件。因为内力边界条件并不能完全满足,所以只能用瑞次法求解。

按照式(a)求挠度 w 对于坐标的二阶导数,得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{2}{a^2} C_1 \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{\pi^2}{a^2 b^2} C_1 x^2 \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{2\pi}{a^2 b} C_1 x \cos \frac{\pi y}{b}.\end{aligned}$$

代入式(9-36),得到

$$\begin{aligned}U &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{2}{a^2} C_1 \sin \frac{\pi y}{b} \right)^2 + \left(-\frac{\pi^2}{a^2 b^2} C_1 x^2 \sin \frac{\pi y}{b} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2\mu \left(\frac{2}{a^2} C_1 \sin \frac{\pi y}{b} \right) \left(-\frac{\pi^2}{a^2 b^2} C_1 x^2 \sin \frac{\pi y}{b} \right) \\ &\quad \left. + 2(1-\mu) \left(\frac{2\pi}{a^2 b} C_1 x \cos \frac{\pi y}{b} \right)^2 \right] dx dy,\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial C_m} = \frac{\partial U}{\partial C_1} &= \frac{D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{8}{a^4} C_1 \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \frac{2\pi^4}{a^4 b^4} C_1 x^4 \sin^2 \frac{\pi y}{b} \right. \\ &\quad - \frac{8\pi^2 \mu}{a^4 b^2} C_1 x^2 \sin^2 \frac{\pi y}{b} \\ &\quad \left. + \frac{16\pi^2 (1-\mu)}{a^4 b^2} C_1 x^2 \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right] dx dy.\end{aligned}\quad (b)$$

另一方面,由式(a)得到

$$\iint q w_m dx dy = \int_0^a \int_0^b q_0 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi y}{b} dx dy.\quad (c)$$

将式(b)及(c)代入(9-38)式,进行积分以后,求得

$$C_1 = \frac{2q_0 a^4}{3\pi D \left[2 + \left(\frac{4}{3} - 2\mu \right) \left(\frac{\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{\pi a}{b} \right)^4 \right]}.$$

代入式(a), 即得

$$w = \frac{2q_0 a^2 x^2 \sin \frac{\pi y}{b}}{3\pi D \left[2 + \left(\frac{4}{3} - 2\mu \right) \left(\frac{\pi a}{b} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{\pi a}{b} \right)^4 \right]} \quad (d)$$

当 $b=a$ 而 $\mu=0.3$ 时, 自由边中点 $(a, b/2)$ 处的挠度为

$$w = 0.0112 \frac{q_0 a^4}{D},$$

与精确解答相比, 只有 1% 的误差。

作为第二个例题, 设有矩形薄板, 四边固定, 图 9-12, 受有均匀荷载 q_0 。取坐标轴如图所示, 则边界条件为

$$(w)_{x=\pm a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=\pm a} = 0,$$

$$(w)_{y=\pm b} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=\pm b} = 0.$$

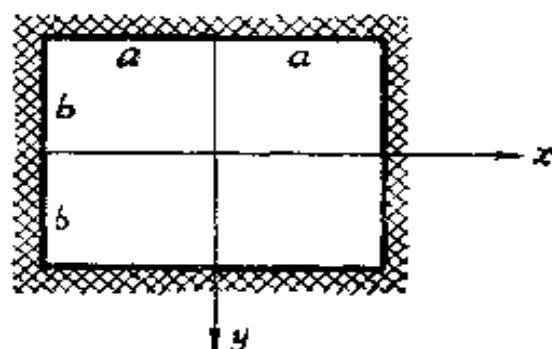


图 9-12

将挠度的表达式取为

$$w = \sum_m C_m w_m = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (C_1 + C_2 x^2 + C_3 y^2 + \dots), \quad (e)$$

可以满足上列边界条件。由于对称, 式中只取 x 和 y 的偶次幂。因为这里并没有内力边界条件, 所以, 我们可以认为式(e)也满足了内力边界条件, 于是可以用伽辽金法求解。

假定在式(e)中只取一个系数, 也就是取

$$w = C_1 w_1 = C_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2. \quad (f)$$

于是得

$$w_m = w_1 = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2,$$

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$= 8[3(y^2 - b^2)^2 + 3(x^2 - a^2)^2 + 4(3x^2 - a^2)(3y^2 - b^2)]C_1.$$

代入方程(9-43), 注意 $q = q_0$, 并注意对称性, 得到

$$\begin{aligned} & 4D \int_0^a \int_0^b 8[3(y^2 - b^2)^2 + 3(x^2 - a^2)^2 \\ & \quad + 4(3x^2 - a^2)(3y^2 - b^2)]C_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 dx dy \\ & = 4q_0 \int_0^a \int_0^b (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 dx dy. \end{aligned}$$

积分以后, 求解 C_1 , 得到

$$C_1 = \frac{7q_0}{128 \left(a^4 + b^4 + \frac{4}{7}a^2b^2 \right) D}.$$

对于正方形薄板, 命 $b = a$, 得到

$$C_1 = \frac{49q_0}{2304a^4D}.$$

从而由式(f)得到

$$w = \frac{49q_0a^4}{2304D} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^2. \quad (g)$$

最大挠度为

$$w_{\max} = (w)_{x=y=0} = \frac{49q_0a^4}{2304D} = 0.0213 \frac{q_0a^4}{D},$$

比精确值 $0.0203q_0a^4/D$ 大出 5%。

作为第三个例题, 设有半径为 a 的固定边圆板, 在半径为 b 的中心圆面积上受匀布荷载 q_0 , 图 9-13。这是一个轴对称问题。取挠度表达式为

$$\begin{aligned} w = & \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 \left[C_1 + C_2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right. \\ & \left. + C_3 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^2 + \cdots \right], \end{aligned} \quad (h)$$

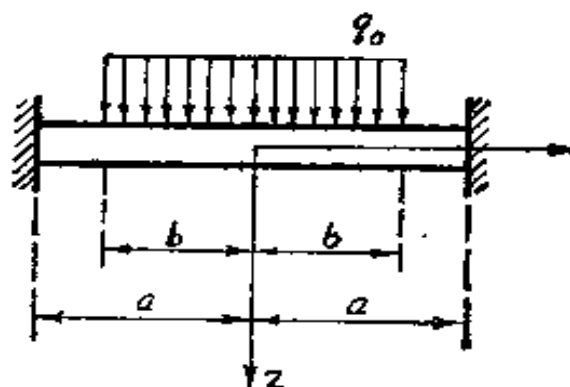


图 9-13

可以满足位移边界条件

$$(w)_{r=a} = 0, \quad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = 0.$$

和第二个例题一样, 可以认为内力边界条件也是满足的, 因而可以用伽辽金法求解。

现在, 在式(4)中只取一个待定系数, 也就是取

$$w = C_1 w_1 = C_1 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2, \quad (i)$$

由式(i)求得

$$\nabla^4 w = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right)^2 w = \frac{64C_1}{a^4},$$

连同 $w_m = w_1 = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2$ 代入方程(9-45), 即得

$$D \int_0^a \frac{64C_1}{a^4} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 r dr = \int_0^b q_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 r dr.$$

积分以后, 求出 C_1 , 再代入式(i), 得到

$$w = \frac{q_0 a^4}{64D} \left(3 - 3\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right) \frac{b^2}{a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2. \quad (9-47)$$

当整个薄板受匀布荷载 q_0 时, $b = a$, 由上式得

$$w = \frac{q_0 a^4}{64D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2.$$

与 § 9-8 中的精确解答相同。

习 题

9-1. 设有半椭圆形薄板, 图 9-14, 边界 AOB 为简支边, ACB 为固定边, 受有荷载 $q = q_1 \frac{x}{a}$. 试证 $w = mx \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2$ 能满足一切条件, 其中 m 是待定系数。试求挠度和弯矩以及它们的最大值。

$$\text{答案: } (w)_{\max} = \frac{2\sqrt{5} q_1 a^4}{375 \left(5 + 2\frac{a^4}{b^4} + \frac{a^4}{b^4}\right) D},$$

$$(M_x)_{x=a, y=0} = -\frac{q_1 a^2}{3\left(5 + 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^4}\right)}$$

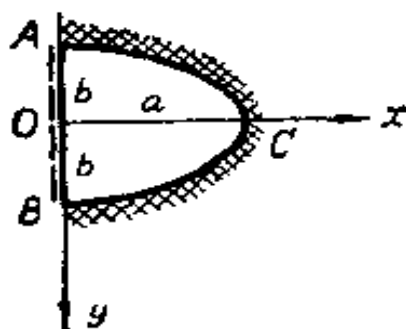


图 9-14

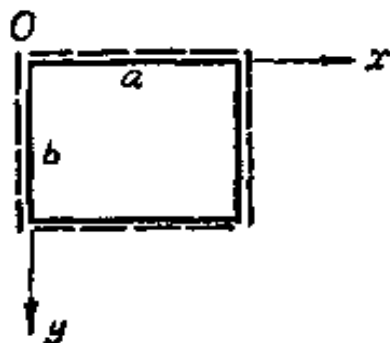


图 9-15

9-2. 四边简支的矩形薄板, 图 9-15, 边长为 a 和 b , 受有荷载

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

试证 $w = m \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ 能满足一切条件, 并求出挠度、弯矩和反力。

答案: $(w)_{\max} = \frac{q_0 a^4}{\pi^4 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 D}$

$$(M_x)_{\max} = \frac{q_0 a^2 \left(1 + \mu \frac{a^2}{b^2}\right)}{\pi^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2},$$

$$(V_x)_{\max} = \frac{q_0 a \left[1 + (2 - \mu) \frac{a^2}{b^2}\right]}{\pi \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2},$$

$$R = \frac{2(1 - \mu) q_0 a^2}{\pi^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \frac{b}{a}.$$

9-3. 矩形薄板 $OABC$ 的 OA 边和 OC 边是简支边, AB 边和 CB 边是自由边, 图 9-16, 在 B 点受有横向集中力 P , 试证 $w = mxy$ 能满足一切条件, 其中 m 是待定系数。试求挠度、弯矩和反力。

答案: $(w)_{\max} = \frac{Pab}{2(1 - \mu)D}$, $M_x = M_y = 0$, $V_x = V_y = 0$, $R_A = R_C = P$

(与荷载反向), $R_B = P$ (与荷载同向)。

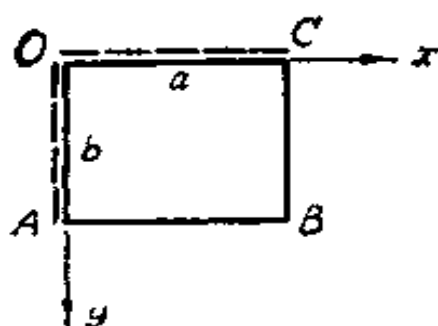


图 9-16

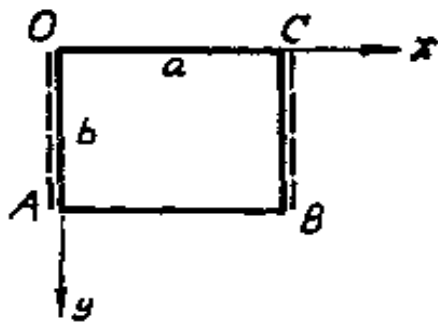


图 9-17

9-4. 矩形薄板 $OABC$ 的 OA 边和 BC 边是简支边, OC 边和 AB 边是自由边, 图 9-17, 不受横向荷载 ($q=0$), 但在两个简支边上受均布弯矩 M , 在两个自由边上受均布弯矩 μM . 试证 $w=f(x)$ 能满足一切条件, 并求出挠度, 弯矩和反力。

答案: $(w)_{\max} = \frac{Ma^2}{8D}$,

$$M_x = M, \quad M_y = \mu M,$$

$$M_{xy} = 0, \quad V_x = V_y = 0,$$

$$R = 0.$$

9-5. 矩形薄板, 二对边简支, 二对边固定, 图 9-18, 受均布荷载 q_0 , 试用李维解法求解挠度, 并求出 $b=a$ 时的最大挠度。

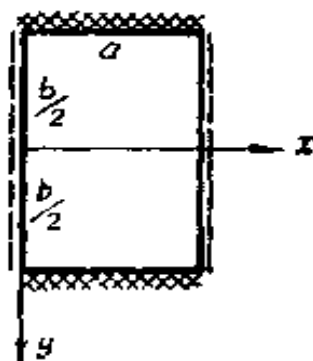


图 9-18

答案: $(w)_{\max} = 0.00193 \frac{q_0 a^4}{D}$.

9-6. 固定边圆形薄板, 半径为 a , 受荷载 $q = q_1 \frac{r}{a}$, 试求挠度、弯矩和反力以及它们的最大值。

答案: $(w)_{\max} = \frac{q_1 a^4}{150D}$, $(M_r)_{r=a} = -\frac{q_1 a^2}{15}$,

$$(M_r)_{r=0} = (M_\theta)_{r=0} = \frac{(1+\mu)q_1 a^2}{45}, \quad V_r = -\frac{q_1 a}{3}.$$

9-7. 简支边圆形薄板, 半径为 a , 中心有半径为 b 的圆孔, 不受横向荷载, 但在孔边受均布弯矩 M , 试求挠度、弯矩及反力。

提示: 用 § 9-8 中的式 (b), 取 $w_1 = 0$ 。

答案: $w = -\frac{Mb^2}{2(1+\mu)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)D} \left[\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{2(1+\mu)}{(1-\mu)} \ln \frac{a}{r} \right].$

9-8. 正方形薄板, 边长为 a , 四边固定, 受均布荷载 q_0 , 取 $h = \frac{a}{4}$ 用差分法求解, 并求出最大挠度及最大弯矩

答案: $(w)_{\max} = 0.00179 \frac{q_0 a^4}{D}$.

9-9. 试证明: 对于图 9-12 所示的固定边矩形薄板, 取挠度为

$$w = \sum_m \sum_n C_{mn} \left(1 + \cos \frac{m\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{n\pi y}{b} \right),$$

其中 m 及 n 为奇数, 也能满足约束条件及内力边界条件。

第十章 薄壳问题

§ 10-1 有关概念及计算假定

两个曲面所限定的物体, 如果两曲面之间的距离比曲面的尺寸为小, 就称为壳体。这两个曲面称为壳面。距两壳面等远的点的轨迹, 称为壳体的中面。中面的法线被两壳面截断的长度 t , 称为壳体的厚度。本章中只讨论等厚度的壳体。

在壳体中面上的任意一点 O , 作中面的法线。通过这一根中面法线, 可以作无数多的平面与中面相交, 得出无数多的中面曲线。各个中面曲线在 O 点处的曲率一般并不相同(除非中面是圆球面)。按照微分几何, 在这些曲线中间有一根曲线, 它在 O 点处的曲率最大, 相应的曲率半径为最小; 另有一根和它正交的曲线, 它在 O 点处的曲率最小, 相应的曲率半径为最大。这两个曲率称为中面在 O 点处的主曲率, 两个相应的曲率半径, 称为中面在 O 点处的主曲率半径。这两根曲线在 O 点处的切线方向, 称为中面在 O 点的曲率主向。既然在中面上的任意一点都有两个互相正交的曲率主向, 自然就可以在中面上作无数多这样的曲线: 它们的切线方向总是沿着中面的曲率主向。这样的曲线称为中面的曲率线。在分析壳体时, 为了简化方程, 一般都选择这样的右手坐标系: x 轴和 y 轴沿着中面的曲率线, z 轴沿着中面法线的方向, 指向中面的凸方, 图 10-1。

为了分析壳体横截面上的内力, 取微分体如图 10-1 所示。在垂直于 x 轴的横截面上, 坐标为 z 、宽度为 dz 的微分面积是

$$dA = \frac{dy}{R_y} (R_y + z) dz = dy \left(1 + \frac{z}{R_y} \right) dz,$$

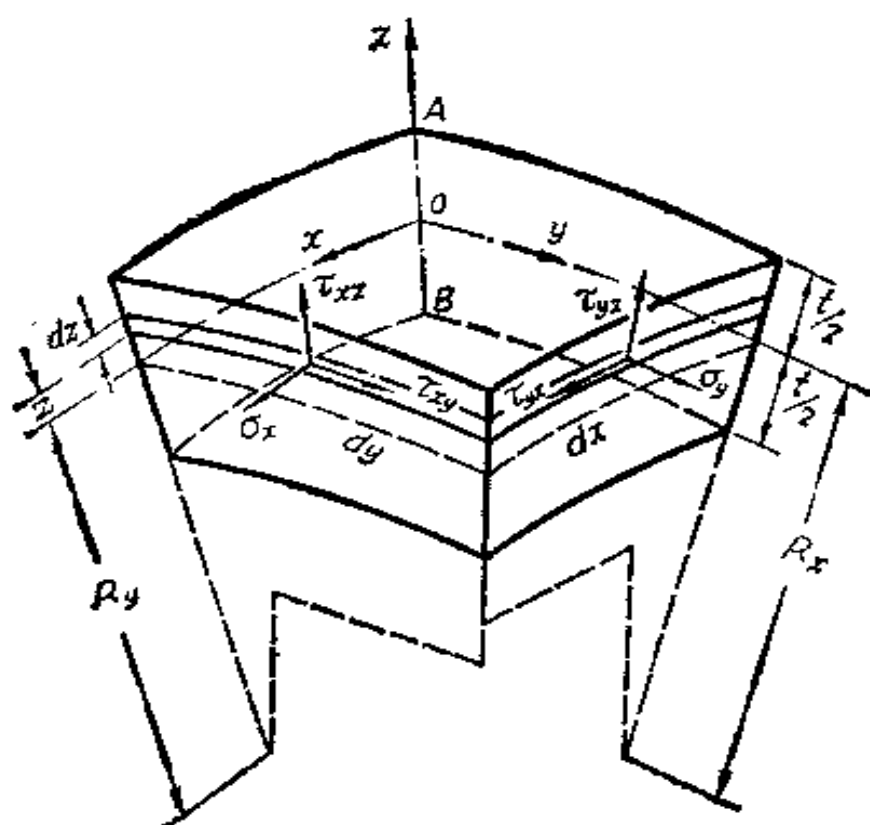


图 10-1

其中 R_y 为中面沿 y 方向的主曲率半径。将该截面上的应力向中面简化, 得出中面单位宽度上的内力如下:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) dz, & N_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) dz, \\ M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) z dz, & M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) z dz, \\ Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) dz. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

同样, 在垂直于 y 轴的横截面上, 将得出中面单位宽度上的内力如下:

$$\left. \begin{aligned} N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) dz, & N_{yx} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) dz, \\ M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) z dz, & M_{yx} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yx} \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) z dz, \\ Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) dz. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

在式(a)及(b)中, N_x 及 N_y 称为法向力, 或拉压力; N_{xy} 及 N_{yx} 称为平错力, 又称为纵向剪力或顺剪力。这四个内力总称为薄膜内力或中面内力。其余的内力, 即弯矩 M_x 及 M_y , 扭矩 M_{xy} 及 M_{yx} , 横向剪力 Q_x 及 Q_y , 则总称为平板内力或弯曲内力。在这里, 虽然 τ_{xy} 和 τ_{yx} 相等, 但由于 R_y 和 R_x 一般并不相等, 所以 N_{xy} 和 N_{yx} 一般并不相等, M_{xy} 和 M_{yx} 一般也不相等。

在薄壳中, z/R_x 及 z/R_y 与 1 相比是很小的量, 可以略去不计。这样, 式(a)及式(b)将简化为

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz, & N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz, \\ N_{xy} &= N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz, \\ M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, & M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \\ M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \\ Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, & Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \end{aligned} \right\} \quad (10-1)$$

薄膜内力的因次, 和横向剪力的因次一样, 是[力][长度]⁻¹。弯矩及扭矩的因次和上一章中一样, 是[力]。各个内力的正方向如图 10-2 所示。

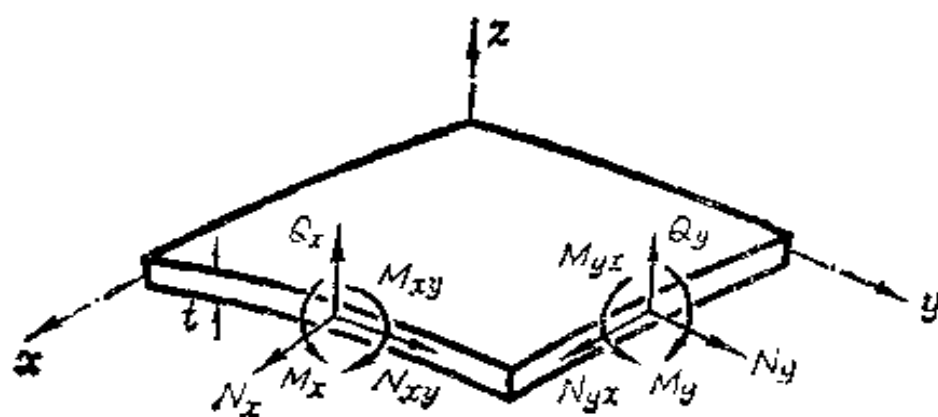


图 10-2

对于薄壳, 可以按照下列简单公式由内力求得应力:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{N_x}{t} + \frac{12M_x}{t^3}z, & \sigma_y &= \frac{N_y}{t} + \frac{12M_y}{t^3}z, \\ \tau_{xy} &= -\frac{N_{xy}}{t} + \frac{12M_{xy}}{t^3}z, \\ \tau_{xz} &= \frac{6Q_x}{t^3}\left(\frac{t^2}{4} - z^2\right), & \tau_{yz} &= \frac{6Q_y}{t^3}\left(\frac{t^2}{4} - z^2\right). \end{aligned} \right\} \quad (10-2)$$

由上式可见, 薄膜内力引起的应力, 沿着薄壳的厚度方向是均匀分布的。平板内力引起的应力, 它在薄壳厚度方向的变化, 是和薄板受横向荷载时一样的, 即, 弯矩引起的弯应力和扭矩引起的扭应力是按直线变化, 横向剪力引起的横向剪应力则按抛物线变化。

计算薄壳时, 有两种理论可以应用。一种理论是所谓无矩理论或薄膜理论, 另一种理论是所谓有矩理论或弯曲理论。

在无矩理论中, 采用如下的计算假定: 薄壳的横截面上没有弯矩和扭矩。在这种假定之下, 横截面上也就没有横向剪力。于是, 横截面上只有薄膜内力。这样就使得薄壳的计算大为简化。同时, 由于薄膜内力引起的应力是在横截面上均匀分布, 所以材料的强度得到充分利用。

根据理论分析和实验量测, 无矩假定得以实现的条件是: (1) 薄壳的中面不但是光滑曲面, 而且也没有曲率的突变。(2) 薄壳所受的荷载是连续分布, 没有突变, 更没有集中荷载。(3) 薄壳的边界沿中面法向和转动方向不受约束。在满足这些条件时, 薄壳的平板内力很小, 薄膜内力也和无矩理论给出的解答很接近。反之, 如果中面的斜率或曲率有突变, 或者荷载的集度有突变, 则在突变的近处将发生不能忽略的平板内力; 如果薄壳的边界受有沿中面法向的约束, 或受有转动方向的约束, 则在该边界的附近将发生不能忽略的平板内力。上述各种局部的平板内力, 当然必须按照有矩理论进行计算。

在薄壳的有矩理论中,为了简化计算,采用如下的计算假定:

(1) 垂直于中面方向的正应变 ε_z 极其微小,可以不计。(2) 应力分量 τ_{zx} 、 τ_{zy} 、 σ_z 引起的形变极其微小,可以不计。这两方面的假定,是和薄板小挠度弯曲理论中相同的。但是,和薄板小挠度弯曲问题中不同,薄壳中面内各点在 x 、 y 、 z 三方向的位移都不能不计。

对于工程上使用的一些薄壳,常常采用如下的计算方法:首先按照无矩理论计算薄壳绝大部分的内力,即所谓无矩内力,然后按照有矩理论,但应用一些简化了的方程,计算局部的平板内力,并对无矩内力进行修正。这样往往可以只用较少的计算工作量就得出工程上可用的成果。

§ 10-2 圆柱面薄壳的无矩内力

以圆柱面为中面的薄壳,称为圆柱面薄壳。因为圆柱面薄壳在纵向的曲率等于零,在环向的曲率又是常量,在设计、制造、施工方面都比较简单,所以得到广泛的采用。环向闭合的圆柱面薄壳,也就是圆筒,常用于气体或液体的容器,例如气缸、锅炉、水管、水塔、调压井等等;环向开敞的圆柱面薄壳,则广泛应用于各种工业与民用建筑的顶盖结构。弧形闸门,在适当的支承情况下,也可以作为圆柱面薄壳来计算。

对于圆柱面薄壳,通常都把 x 坐标放在纵向,即圆柱面的母线方向; y 坐标改用 θ 坐标,放在环向,即圆柱面的导线方向。命圆柱面的半径为 R ,取出壳体的一个微分块,其中面的边长为 dx 及 $Rd\theta$,图 10-3。按照无矩理论,作用在每单位宽度上的内力,只有纵向力 N_x ,环向力 N_θ ,以及平剪力 $N_{x\theta} = N_{\theta x}$ 。这些内力和它们的增量如图 10-3 所示。单位面积的薄壳所受的荷载,沿坐标轴方向的三个分量用 X 、 Y 、 Z 表示。由该微分块的平衡条件 $\sum F_x = 0$ 、 $\sum F_y = 0$ 、 $\sum F_z = 0$ 得出

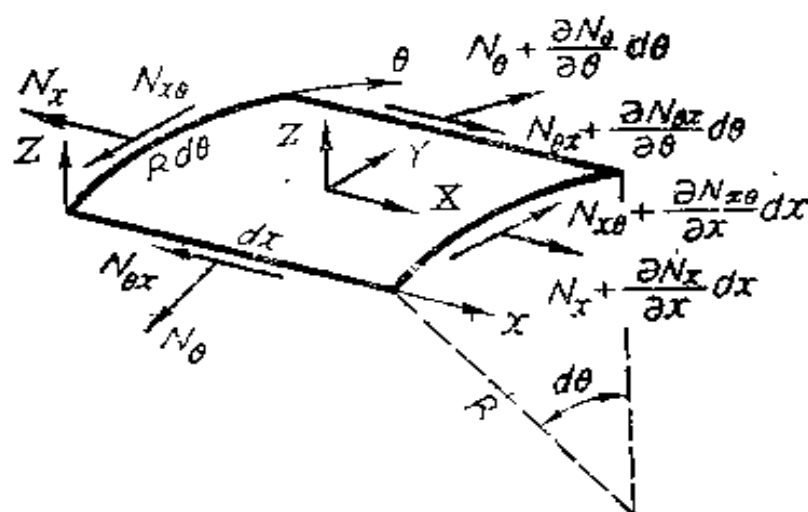


图 10-3

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx R d\theta + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} d\theta dx + X dx R d\theta = 0,$$

$$\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial x} dx R d\theta + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} d\theta dx + Y dx R d\theta = 0,$$

$$-N_\theta dx d\theta + Z dx R d\theta = 0.$$

用 $N_{x\theta}$ 代替 $N_{\theta x}$, 简化以后, 得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + X &= 0, \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + Y &= 0, \\ \frac{N_\theta}{R} - Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10-3)$$

这一组平衡方程可以用来求解薄膜内力 N_x 、 N_θ 、 $N_{x\theta}$ 。

具体计算时, 可以先由(10-3)中的第三方程求出 N_θ , 然后代入第二方程, 对 x 积分, 求出 $N_{x\theta}$, 再将求出的 $N_{x\theta}$ 代入第一方程, 对 x 积分, 就可以求得 N_x 。积分时出现的任意函数, 可以根据边界条件(或借助于对称条件)求得。

作为第一个例题, 设有盛满液体的圆筒, 下端支承而上端自由, 图 10-4。命液体的容重为 p , 则圆筒所受的荷载为

$$X = 0, Y = 0, Z = p(L-x).$$

于是由(10-3)中的第三式得

$$N_\theta = RZ = pR(L-x). \quad (a)$$

代入(10-3)中的第二式, 注意 $Y = 0$,

即得 $\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} = 0$ 。对 x 积分, 得到 $N_{x\theta} =$

$f(\theta)$ 。因为在圆筒的上端有边界条件 $(N_{x\theta})_{x=L} = 0$, 所以有 $f(\theta) = 0$, 从而得出

$$N_{x\theta} = 0.$$

代入(10-3)中的第一式, 注意 $X = 0$, 即得 $\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0$ 。对 x 积分, 得到

$N_x = f_1(\theta)$ 。因为在圆筒上端有边界条件 $(N_x)_{x=L} = 0$, 所以有 $f_1(\theta) = 0$, 从而得出

$$N_x = 0.$$

于是只剩下环向拉力 N_θ , 而环向拉应力为

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{t} = \frac{pR}{t}(L-x), \quad (b)$$

与材料力学中给出的解答完全相同。

应当指出: 由于圆筒下端的法向位移 w 和转角 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 受有约束, 所以实现无矩假定的第(3)个条件不能满足, 因而在圆筒下端附近将发生局部性的弯曲, 也就是发生局部性的弯矩和横向剪力。关于这些弯曲内力的计算, 见 § 10-4。

作为第二个例题, 设有两端支承的水平圆筒, 图 10-5, 盛满容重为 p 的液体。命圆筒中心处的液体压力为 q_0 , 则圆筒所受的荷载为

$$X = 0, Y = 0,$$

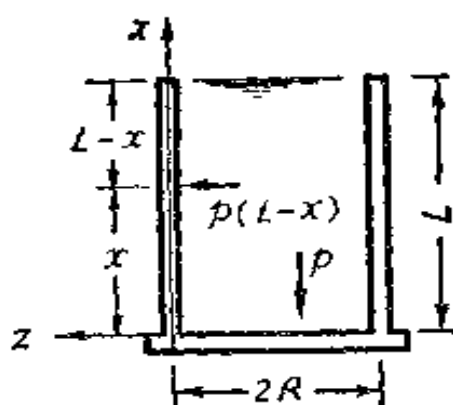


图 10-4

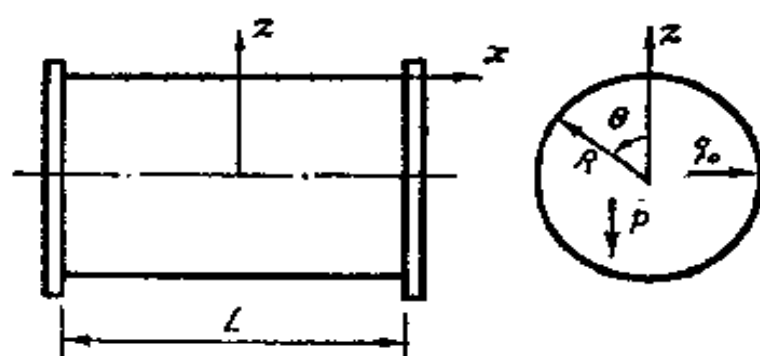


图 10-5

$$Z = q_0 - pR \cos \theta.$$

由(10-3)中的第三式得

$$N_\theta = RZ = R(q_0 - pR \cos \theta). \quad (c)$$

代入(10-3)中的第二式,得

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} = -pR \sin \theta.$$

对 x 积分,得

$$N_{x\theta} = -pRx \sin \theta + f(\theta). \quad (d)$$

由于对称性,在 $x=0$ 处有 $N_{x\theta}=0$,可见 $f(\theta)=0$,从而得

$$N_{x\theta} = -pRx \sin \theta. \quad (e)$$

再将式(e)代入(10-3)中的第一式,得

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = px \cos \theta.$$

对 x 积分,得

$$N_x = \frac{1}{2} px^2 \cos \theta + f_1(\theta). \quad (f)$$

假定圆筒两端支承板的弯曲刚度很小,圆筒可以沿纵向自由移动,因而不受纵向拉压力,则有边界条件

$$(N_x)_{x=\pm \frac{1}{2}L} = 0.$$

由此得 $f_1(\theta) = -\frac{1}{8} pL^2 \cos \theta$,而式(f)成为

$$N_x = \frac{1}{2}px^2 \cos \theta - \frac{1}{8}pL^2 \cos \theta = \frac{p}{2} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) \cos \theta. \quad (9)$$

与前一例题相似, 由于圆筒在两端受有沿中面法向的约束, 实现无矩假定的第(3)个条件不能满足, 因而在靠近圆筒两端处将发生局部性的弯曲内力。

§ 10-3 圆柱面薄壳的轴对称弯曲

如果圆柱面薄壳所受的约束和荷载都是轴对称的, 那么, 内力、形变、位移也将是轴对称的。这时, 反对称的内力, 即平错力及扭矩, 以及横向剪力 Q_θ , 都等于零。其余的内力 N_x 、 N_θ 、 M_x 、 M_θ 、 Q_x 将只是 x 的函数, 不随 θ 变化。将这些内力和它们的增量以及轴对称的荷载 X 和 Z , 都画在中面的微分面积上, 图 10-6。

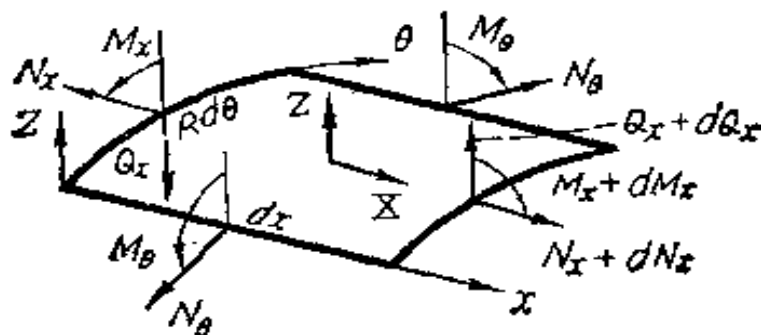


图 10-6

首先来导出平衡方程。由平衡条件 $\sum F_x = 0$ 得到

$$(N_x + dN_x)Rd\theta - N_xRd\theta + XdxRd\theta = 0,$$

简化以后, 除以 $dxRd\theta$, 得出

$$\frac{dN_x}{dx} + X = 0. \quad (10-4)$$

由平衡条件 $\sum F_\theta = 0$ 得到

$$(Q_x + dQ_x)Rd\theta - Q_xRd\theta - 2N_\theta dx \sin \frac{d\theta}{2} + ZdxRd\theta = 0.$$

近似地用 $\frac{d\theta}{2}$ 代替 $\sin \frac{d\theta}{2}$, 进行简化, 再除以 $dxRd\theta$, 得出

$$\frac{dQ_x}{dx} - \frac{N_\theta}{R} + Z = 0. \quad (10-5)$$

以 θ 轴为矩轴, 立出力矩的平衡条件, 不计三阶及三阶以上的微量, 得到

$$dM_x R d\theta - Q_x R d\theta dx = 0,$$

除以 $dx R d\theta$, 得出

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx}. \quad (10-6)$$

现在来导出几何方程。用 u 、 v 及 w 分别代表中面上各点的纵向、环向及法向位移。由于对称, $v=0$, 而 u 及 w 只是 x 的函数, 不随 θ 变化。参阅公式(2-3)及(7-23), 可见中面的纵向及环向正应变为

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}. \quad (a)$$

由于对称, 中面的剪应变 $\gamma_{x\theta} = 0$ 。根据计算假定, 其余三个形变分量都等于零。因为中面上的各点一般都有法向位移 w , 所以中面内的纵向线段将发生曲率(即曲率的改变):

$$\chi_x = -\frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (b)$$

同时, 中面内环向线段的曲率由 $\frac{1}{R}$ 变为 $\frac{1}{R+w}$, 因此有曲率的改变

$$\chi_\theta = \frac{1}{R+w} - \frac{1}{R} = -\frac{w}{(R+w)R}.$$

注意 w 远小于 R , 即得

$$\chi_\theta = -\frac{w}{R^2}. \quad (c)$$

综合(a)、(b)、(c)三式, 就是所需的几何方程:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \frac{du}{dx}, & e_\theta &= \frac{w}{R}, \\ \chi_x &= -\frac{d^2w}{dx^2}, & \chi_\theta &= -\frac{w}{R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10-7)$$

命薄壳任意一点的纵向正应变及环向正应变分别为 e_x 及 e_θ 。每个正应变的第一部分是和中面上相同的正应变，即 ε_x 及 ε_θ ，而第二部分则是由中面曲率的改变引起的。参阅(9-6)中的前二式，可见这第二部分正应变为 $\chi_x z$ 及 $\chi_\theta z$ 。于是有

$$e_x = \varepsilon_x + \chi_x z, \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + \chi_\theta z. \quad (d)$$

按照计算假定，不计 σ_z 引起的形变，所以有

$$e_x = \frac{\sigma_x - \mu \sigma_\theta}{E}, \quad e_\theta = \frac{\sigma_\theta - \mu \sigma_x}{E},$$

从而有

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (e_x + \mu e_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (e_\theta + \mu e_x).$$

将式(d)代入，得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} [(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_\theta) + (\chi_x + \mu \chi_\theta)z], \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} [(\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_x) + (\chi_\theta + \mu \chi_x)z]. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

将式(e)代入(10-1)中的第一式和第二式，以及第四式和第五式(将其中的角码 y 改换为 θ)，进行积分，并注意 $\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} = D$ ，即得下列物理方程：

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Et}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_\theta), & N_\theta &= \frac{Et}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_x), \\ M_x &= D(\chi_x + \mu \chi_\theta), & M_\theta &= D(\chi_\theta + \mu \chi_x). \end{aligned} \right\} \quad (10-8)$$

现在我们共有 11 个基本方程：3 个平衡方程(10-4)至(10-6)，4 个几何方程(10-7)，4 个物理方程(10-8)。这些方程包含 11 个未知函数：5 个内力 N_x 、 N_θ 、 M_x 、 M_θ 、 Q_x ，4 个中面形变 e_x 、 e_θ 、 χ_x 、

χ_0 , 2 个中面位移 u 及 w 。在适当的边界条件下可以求解。

平衡方程(10-4)中只包含一个未知函数 N_x , 可以在 N_x 的边界条件下单独求解。因此, 在由其余 10 个方程求解其余 10 个未知函数时, 可以取 $N_x = 0$ 。下面我们按位移求解, 以中面的法向位移 w 为基本未知函数, 把其余 9 个未知函数都用 w 表示, 并建立求解 w 的微分方程。

首先将几何方程(10-7)代入物理方程(10-8), 得到如下的所谓弹性方程:

$$N_x = \frac{Et}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dx} + \mu \frac{w}{R} \right), \quad N_\theta = \frac{Et}{1-\mu^2} \left(\frac{w}{R} + \mu \frac{du}{dx} \right), \quad (f)$$

$$M_x = -D \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \mu \frac{w}{R^2} \right), \quad M_\theta = -D \left(\frac{w}{R^2} + \mu \frac{d^2 w}{dx^2} \right). \quad (g)$$

根据上面所述, 在(f)的第一式中令 $N_x = 0$, 得到 $\frac{du}{dx} = -\mu \frac{w}{R}$, 于是(f)中的第二式成为

$$N_\theta = \frac{Et}{R} w. \quad (10-9)$$

又因为 $\frac{w}{R^2}$ 远小于 $\frac{d^2 w}{dx^2}$, 所以在式(g)中可以略去 $\frac{w}{R^2}$ 而得到

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (10-10)$$

$$M_\theta = -D \mu \frac{d^2 w}{dx^2} = \mu M_x. \quad (10-11)$$

由(10-6)及(10-10)又可得出

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -D \frac{d^3 w}{dx^3}. \quad (10-12)$$

再将式(10-9)及(10-12)代入(10-5), 即得 w 的微分方程

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Et}{R^2 D} w = \frac{Z}{D}. \quad (10-13)$$

为了简化解答, 引用一个因次为[长度]⁻¹的常数

$$\lambda = \left(\frac{Et}{4R^2D} \right)^{1/4} = \left[\frac{3(1-\mu^2)}{R^2t^2} \right]^{1/4}. \quad (10-14)$$

再引用无因次坐标 ξ 以代替 x :

$$\xi = \lambda x. \quad (10-15)$$

这样, 微分方程(10-13)就变换成为

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4w = \frac{4R^2}{Et} Z. \quad (10-16)$$

表达式(10-10)及(10-12)则变换成为

$$M_x = -\lambda^2 D \frac{d^2 w}{d\xi^2}, \quad Q_x = -\lambda^3 D \frac{d^3 w}{d\xi^3}. \quad (10-17)$$

微分方程(10-16)的解答可以写成

$$w = C_1 \operatorname{ch} \xi \cos \xi + C_2 \operatorname{sh} \xi \sin \xi + C_3 \operatorname{ch} \xi \sin \xi \\ + C_4 \operatorname{sh} \xi \cos \xi + w_1,$$

其中 w_1 为任意一个特解, 可以根据荷载 $Z(x)$ 的函数形式按照方程(10-16)的要求来选择; 常数 C_1 至 C_4 则决定于边界条件。求出 w 以后, 即可由(10-9)求得 N_x , 由(10-17)求得 M_x 及 Q_x , 并由(10-11)求得 M_θ 。

§ 10-4 圆柱面薄壳轴对称弯曲问题的简化计算

为了简化计算, 减小计算工作量, 我们把微分方程(10-16)的解答改写为如下的形式:

$$w = e^{-\xi} (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi) + e^{\xi} (C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi) + w_1. \quad (a)$$

现在, 设有很长的圆筒, 它不受法向荷载, 但在它的一端($\xi=0$)受有沿边界均匀分布的弯矩 M_0 及横向剪力 Q_0 , 如图 10-7。因为这里有 $Z=0$, 所以特解可以取为 $w_1=0$ 。另一方面, 按照圣维南原理, 在远离这些自成平衡的荷载之处, 应力可以不计, 因而内力可

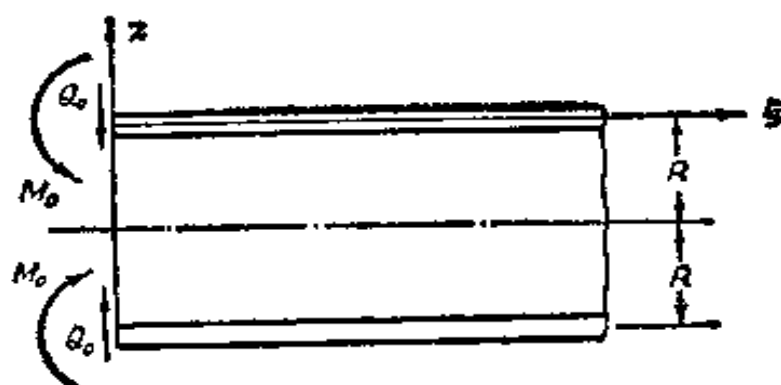


图 10-7

以不计。由(10-9)式可见,该处的中面法向位移 w 也可以不计。这就是说,当 ξ 趋于无限大时, w 应当趋于零。因此,式(a)中的 C_3 和 C_4 应当等于零,而解答(a)简化为

$$w = e^{-\xi} (C_1 \cos \xi + C_2 \sin \xi). \quad (b)$$

边界条件是

$$(M_x)_{\xi=0} = -\lambda^2 D \left(\frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)_{\xi=0} = M_0,$$

$$(Q_x)_{\xi=0} = -\lambda^3 D \left(\frac{d^3 w}{d\xi^3} \right)_{\xi=0} = Q_0.$$

将式(b)代入,求解 C_1 及 C_2 ,再代回式(b),即得

$$w = \frac{1}{2\lambda^3 D} e^{-\xi} [-\lambda M_0 (\cos \xi - \sin \xi) - Q_0 \cos \xi], \quad (c)$$

为了便于查表计算,引用如下的四个特殊函数:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\xi) &= e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi), & f_2(\xi) &= e^{-\xi} \sin \xi, \\ f_3(\xi) &= e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi), & f_4(\xi) &= e^{-\xi} \cos \xi. \end{aligned} \right\} \quad (10-18)$$

注意它们之间的微分关系

$$\left. \begin{aligned} f_1'(\xi) &= -2f_2(\xi), & f_2'(\xi) &= f_3(\xi), \\ f_3'(\xi) &= -2f_4(\xi), & f_4'(\xi) &= -f_1(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (10-19)$$

并利用表达式(10-17),可将中面法向位移 w ,转角 $\frac{dw}{dx}$,弯矩 M_x 及剪力 Q_x 用上列四个特殊函数表示如下:

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{M_0}{2\lambda^2 D} f_3(\xi) - \frac{Q_0}{2\lambda^3 D} f_4(\xi), \\ \frac{dw}{dx} &= \lambda \frac{dw}{d\xi} = \frac{Q_0}{2\lambda^2 D} f_1(\xi) + \frac{M_0}{\lambda D} f_4(\xi), \\ M_x &= M_0 f_1(\xi) + \frac{Q_0}{\lambda} f_2(\xi), \\ Q_x &= Q_0 f_3(\xi) - 2\lambda M_0 f_2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (10-20)$$

四个特殊函数 $f_1(\xi)$ 、 $f_2(\xi)$ 、 $f_3(\xi)$ 、 $f_4(\xi)$ 的数值，可在表 10-1 中按 ξ 的数值查得。

由表 10-1 可见，当 $\xi = \lambda x$ 充分增大时，四个特殊函数急剧减小。这就表示，中面法向位移及弯曲内力都是局部性的。当 $\xi = \lambda x > \pi$ 时，每个特殊函数的绝对值都小于它的最大绝对值的 5%。这时，

$$x > \pi / \lambda = \pi \left[\frac{R^2 t^2}{3(1-\mu^2)} \right]^{1/4} = 2.0\sqrt{Rt} \text{ 至 } 2.5\sqrt{Rt}.$$

这就是说，在离开受力端的距离超过 $2.0\sqrt{Rt}$ 至 $2.5\sqrt{Rt}$ 之处，中面法向位移 w 和弯曲内力都可以不计。例如，设 $R=100$ 厘米， $t=1$ 厘米，则在离开受力端远于 20 至 25 厘米处，中面法向位移 w 及弯曲内力就可以不计。

目前在计算圆筒容器时，大都是应用这种简化算法，或者再将计算结果和无矩解答相叠加。得出的成果一般都能符合工程上对精度的要求，而所费的工作量却是很小。

作为例题，设有很长的圆筒，在其某一横截面上受有沿环向均匀分布的法向荷载 P ，图 10-8。假定荷载至圆筒两端的距离较远（例如大于 $2.5\sqrt{Rt}$ ），即可利用如上所述的简化算法。由对称性可见，在荷载 P 右边的相邻横截面上，剪力为 $Q_0 = P/2$ 。于是圆筒右半部分的 w 、 $\frac{dw}{dx}$ 、 M_x 、 Q_x 可按式 (10-20) 写出：

表 10-1 函数 f_1, f_2, f_3, f_4 的数值

ξ	$f_1(\xi)$	$f_2(\xi)$	$f_3(\xi)$	$f_4(\xi)$
0	1.000	0.000	1.000	1.000
0.1	0.991	0.090	0.810	0.900
0.2	0.965	0.163	0.640	0.802
0.3	0.927	0.219	0.489	0.708
0.4	0.878	0.261	0.356	0.617
0.5	0.823	0.291	0.242	0.532
0.6	0.763	0.310	0.143	0.453
0.7	0.700	0.320	0.060	0.380
0.8	0.635	0.322	-0.009	0.313
0.9	0.571	0.319	-0.066	0.253
1.0	0.508	0.310	-0.111	0.199
1.1	0.448	0.297	-0.146	0.151
1.2	0.390	0.281	-0.172	0.109
1.3	0.336	0.263	-0.190	0.073
1.4	0.285	0.243	-0.201	0.042
1.5	0.238	0.223	-0.207	0.016
1.6	0.196	0.202	-0.208	-0.006
1.7	0.158	0.181	-0.205	-0.024
1.8	0.123	0.161	-0.199	-0.038
1.9	0.093	0.142	-0.190	-0.048
2.0	0.067	0.123	-0.179	-0.056
2.1	0.044	0.106	-0.168	-0.062
2.2	0.024	0.090	-0.155	-0.065
2.3	0.008	0.075	-0.142	-0.067
2.4	0.006	0.061	-0.128	-0.067
2.5	-0.017	0.049	-0.115	-0.066
2.6	-0.025	0.038	-0.102	-0.064
2.7	-0.032	0.029	-0.090	-0.061
2.8	-0.036	0.020	-0.078	-0.057
2.9	-0.040	0.013	-0.067	-0.053
3.0	-0.042	0.007	-0.056	-0.049
3.1	-0.043	0.002	-0.047	-0.045
3.2	-0.043	-0.002	-0.038	-0.041
3.3	-0.042	-0.006	-0.031	-0.036
3.4	-0.041	-0.009	-0.024	-0.032
3.5	-0.039	-0.011	-0.018	-0.028
3.6	-0.037	-0.012	-0.012	-0.025
3.7	-0.034	-0.013	-0.008	-0.021
3.8	-0.031	-0.014	-0.004	-0.018
3.9	-0.029	-0.014	-0.001	-0.015
4.0	-0.026	-0.014	-0.002	-0.012

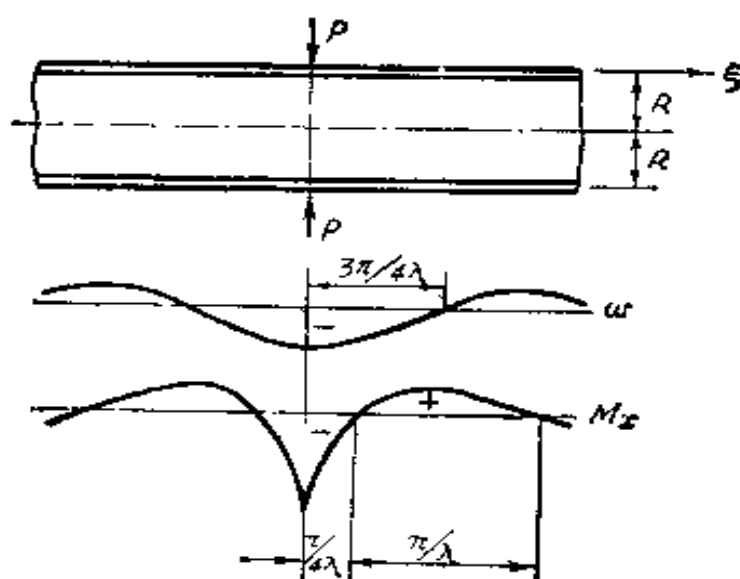


图 10-8

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{M_0}{2\lambda^2 D} f_3(\xi) - \frac{P}{4\lambda^3 D} f_1(\xi), \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{P}{4\lambda^2 D} f_1(\xi) + \frac{M_0}{\lambda D} f_4(\xi), \\ M_x &= M_0 f_1(\xi) + \frac{P}{2\lambda} f_2(\xi), \\ Q_x &= \frac{P}{2} f_3(\xi) - 2\lambda M_0 f_2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

为了求得 M_0 , 可利用对称条件

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{\xi=0} = 0.$$

将(d)中的第二式代入, 注意在 $\xi=0$ 时有 $f_1=f_4=1$, 即得

$$\frac{P}{4\lambda^2 D} + \frac{M_0}{\lambda D} = 0,$$

从而得到 $M_0 = -P/4\lambda$ 。代回式(d), 并利用式(10-18), 即得

$$w = \frac{P}{8\lambda^3 D} [f_3(\xi) - 2f_4(\xi)] = -\frac{P}{8\lambda^3 D} f_1(\xi),$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{P}{4\lambda^2 D} [f_1(\xi) - f_4(\xi)] = \frac{P}{4\lambda^2 D} f_2(\xi),$$

$$M_x = -\frac{P}{4\lambda} [f_1(\xi) + 2f_2(\xi)] = -\frac{P}{4\lambda} f_3(\xi),$$

$$Q_x = \frac{P}{2} [f_3(\xi) + f_2(\xi)] = \frac{P}{2} f_4(\xi).$$

在荷载作用处, 中面法向位移 w 及弯矩 M_x 的绝对值为最大, 分别等于 $P/8\lambda^3 D$ 及 $P/4\lambda$ 。沿着圆筒的长度方向, w 及 M_x 的变化如图中所示。

又例如, 对于图 10-4 中的圆筒, 已经求得无矩内力

$$N_\theta = pR(L-x).$$

代入式(10-9), 得出与无矩内力相应的位移及转角为

$$w = \frac{R}{Et} N_\theta = \frac{pR^2}{Et} (L-x), \quad \theta_x = \frac{dw}{dx} = -\frac{pR^2}{Et}. \quad (e)$$

当然, 与无矩内力相对应, 我们有

$$M_x = 0, Q_x = 0. \quad (f)$$

另一方面, 由于圆筒下端受有沿中面法向的约束及转动约束, 该处将发生弯矩 M_0 及横向剪力 Q_0 。将(e)、(f)二式与(10-20)式相叠加, 注意 $x = \xi/\lambda$, 得到

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{pR^2}{Et} \left(L - \frac{\xi}{\lambda} \right) - \frac{M_0}{2\lambda^2 D} f_3(\xi) - \frac{Q_0}{2\lambda^3 D} f_4(\xi), \\ \frac{dw}{dx} &= -\frac{pR^2}{Et} + \frac{Q_0}{2\lambda^2 D} f_1(\xi) + \frac{M_0}{\lambda D} f_4(\xi), \\ M_x &= M_0 f_1(\xi) + \frac{Q_0}{\lambda} f_2(\xi), \\ Q_x &= Q_0 f_3(\xi) - 2\lambda M_0 f_2(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

在固定端有边界条件

$$(w)_{\xi=0} = 0, \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_{\xi=0} = 0.$$

将(g)中的前二式代入, 注意在 $\xi=0$ 时有 $f_1 = f_3 = f_4 = 1$, 即得

$$\frac{pR^2 L}{Et} - \frac{M_0}{2\lambda^2 D} - \frac{Q_0}{2\lambda^3 D} = 0, \quad -\frac{pR^2}{Et} + \frac{Q_0}{2\lambda^2 D} + \frac{M_0}{\lambda D} = 0.$$

求解 M_0 及 Q_0 , 得到

$$M_0 = -\frac{2pR^2D\lambda}{Et}(\lambda L - 1) = -\frac{pRtL}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left(1 - \frac{1}{\lambda L}\right),$$

$$Q_0 = \frac{2pR^2D\lambda^2}{Et}(2\lambda L - 1) = \frac{pRt}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}(2\lambda L - 1).$$

将 M_0 及 Q_0 代回 (g), 利用表 10-1, 极易求得圆筒任一截面处的中面法向位移 w 及内力, 其中的 w 及 M_x 沿纵向的变化大致如图 10-9 所示。

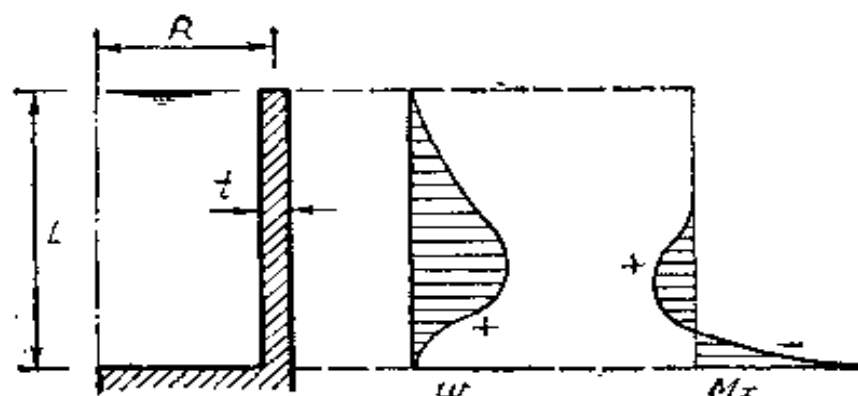


图 10-9

§10-5 回转薄壳的轴对称无矩内力

以回转面为中面的薄壳, 称为回转薄壳。回转面是由平面曲线绕其平面内某一直线回转而成的曲面, 图 10-10。这平面曲线上任意一点回转而成的圆周, 如圆周 MP , 称为平行圆或纬线。这平面曲线在回转时的任一位置, 例如 MN , 称为子午线或经线。平行圆和子午线就是回转面的曲率线。子午线所在的平面, 如 $MNOT$, 称为子午面。平行圆 MP 的位置, 可以决定于回转面法线 MI_2 与回转轴 OT 之间的夹角 φ ; 子午线 MN 的位置, 可以决定于子午面 $MNOT$ 与某一基准子午面 $PQOT$ 之间的夹角 θ 。因此, M 点的位置可以决定于两个坐标 φ 和 θ 。

中面在 M 点 (φ, θ) 的法线, 被邻近的 M_1 点 $(\varphi + d\varphi, \theta)$ 处的法

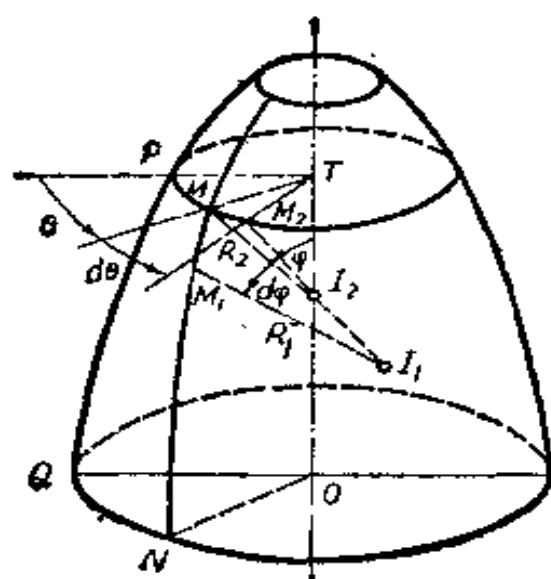


图 10-10

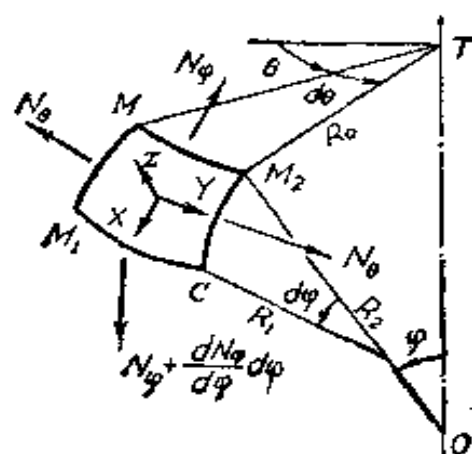


图 10-11

线所截的一段长度, $MI_1 = R_1$, 就是中面在 M 点沿 φ 方向的主曲率半径。中面在 M 点 (φ, θ) 的法线, 被回转轴所截的一段长度, 即邻近的 M_2 点 $(\varphi, \theta + d\theta)$ 处的法线所截的一段长度, $MI_2 = R_2$, 就是中面在 M 点沿 θ 方向的主曲率半径。将通过 M 点的平行圆的半径 MT 用 R_0 代表, 则显然有几何关系

$$R_0 = R_2 \sin \varphi. \quad (10-21)$$

用两个邻近的平行圆和两个邻近的子午线从薄壳的中面上割取一个微分面 MM_1CM_2 , 图 10-11。根据几何关系有

$$MM_1 = M_2C = R_1 d\varphi,$$

$$MM_2 = R_0 d\theta,$$

$$M_1C = \left(R_0 + \frac{dR_0}{d\varphi} d\varphi \right) d\theta,$$

而该微分面的面积为 $R_0 d\theta R_1 d\varphi = R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\theta$ 。

设薄壳所受的荷载和约束都是轴对称的, 则薄壳的内力和位移都将是轴对称的。于是, 作用于该微分面上的内力只有 φ 向拉压力 N_φ 和 θ 向拉压力 N_θ , 而且它们只是 φ 的函数。这些内力和它们的增量如图所示。由于对称, 薄壳在每单位面积上所受的荷

裁只有 φ 向分量 X 和法向分量 Z , θ 向分量 $Y=0$ 。

由薄壳微分块在 φ 向的平衡条件 $\Sigma F_{\varphi}=0$ 得到

$$\left(N_{\varphi} + \frac{dN_{\varphi}}{d\varphi} d\varphi \right) \left(R_0 + \frac{dR_0}{d\varphi} d\varphi \right) d\theta - N_{\varphi} R_0 d\theta \\ - N_{\theta} R_1 d\varphi d\theta \cos \varphi + X R_0 d\theta R_1 d\varphi = 0.$$

简化以后, 除以 $d\varphi d\theta$, 得出

$$R_0 \frac{dN_{\varphi}}{d\varphi} + \frac{dR_0}{d\varphi} N_{\varphi} - R_1 \cos \varphi N_{\theta} + R_0 R_1 X = 0,$$

或

$$\frac{d}{d\varphi} (R_0 N_{\varphi}) - R_1 \cos \varphi N_{\theta} - R_0 R_1 X = 0. \quad (10-22)$$

由薄壳微分块在中面法向的平衡条件 $\Sigma F_z=0$ 得到

$$N_{\varphi} R_0 d\theta d\varphi + N_{\theta} R_1 d\varphi d\theta \sin \varphi - Z R_0 d\theta R_1 d\varphi = 0.$$

除以 $d\varphi d\theta$, 得出

$$R_0 N_{\varphi} + R_1 \sin \varphi N_{\theta} - R_0 R_1 Z = 0. \quad (10-23)$$

平衡微分方程 (10-22) 及 (10-23) 中包含两个未知函数 N_{φ} 及 N_{θ} , 可以用来求解这两个函数。

方程 (10-22) 可以用另一形式的方程来代替。为此, 试考虑某一平行圆以上的部分薄壳的平衡, 图 10-12。命这一部分薄壳所受荷载的合力为 P , 以沿坐标 z 的正向为正; 也就是以指向凸方为正。由平衡条件 $\Sigma F_z=0$ 得

$$P - 2\pi R_0 N_{\varphi} \sin \varphi = 0,$$

从而得出 φ 向拉压力

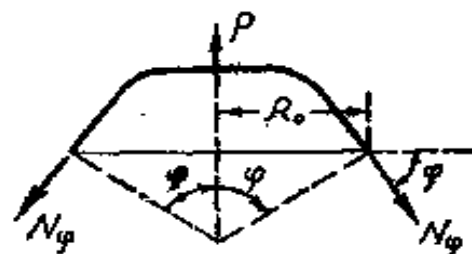


图 10-12

$$N_{\varphi} = \frac{P}{2\pi R_0 \sin \varphi}. \quad (10-24)$$

已知 N_{φ} , 即可用方程 (10-23) 求得 θ 向拉压力 N_{θ} , 即

$$N_{\varphi} = -\frac{R_0}{\sin \varphi} \left(\frac{N_z}{R_1} - Z \right). \quad (10-25)$$

举例说明如下:

(1) 球面薄壳受均布压力。对于半径为 a 的球面薄壳, 图 10-13, 根据几何关系有

$$R_1 = R_2 = a, \quad R_0 = a \sin \varphi.$$

当薄壳受有均布压力 q 时, 我们有

$$Z = -q, \quad P = -\pi R_0^2 q.$$

于是可由公式 (10-24) 及 (10-25) 得出

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{P}{2\pi R_0 \sin \varphi} = -\frac{R_0 q}{2 \sin \varphi} = -\frac{qa}{2}, \\ N_z &= -\frac{R_0}{\sin \varphi} \left(\frac{N_{\varphi}}{R_1} - Z \right) = -a \left(-\frac{q}{2} + q \right) = -\frac{qa}{2}. \end{aligned} \right\} (10-26)$$

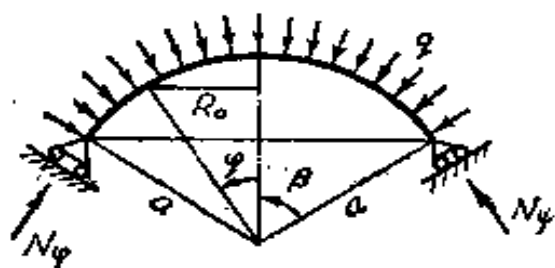


图 10-13

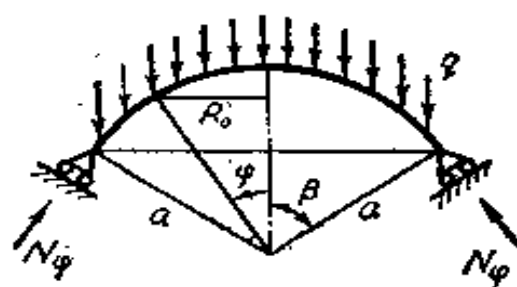


图 10-14

注意, 只有当薄壳的支座容许薄壳边界自由转动和自由沿中面法向移动时, 如图 10-13 所示以上的无矩解答才是正确的。如果薄壳边界的转动和法向移动受有约束, 就会在薄壳内产生局部性的弯矩和横向剪力。这些弯曲内力的计算见 § 10-9。

(2) 球面薄壳受自重。设薄壳每单位面积的重量为 q , 图 10-14, 则 $Z = -q \cos \varphi$, 而

$$P = -q \int_0^{\varphi} 2\pi R_0 a d\varphi = -2\pi a^2 q \int_0^{\varphi} \sin \varphi d\varphi = -2\pi a^2 q (1 - \cos \varphi).$$

于是由公式 (10-24) 及 (10-25) 得到

$$N_r = \frac{P}{2\pi R_0 \sin \varphi} = -\frac{qa(1 - \cos \varphi)}{\sin^2 \varphi} = -\frac{qa}{1 + \cos \varphi},$$

$$N_\theta = -\frac{R_0}{\sin \varphi} \left(\frac{N_r}{R_1} - Z \right) = -a \left(-\frac{q}{1 + \cos \varphi} + q \cos \varphi \right)$$

$$= qa \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right).$$

由上式可见, N_r 总是负的(压力), 并且这负值随着 φ 的增大而增大。在 φ 值较小的各点, N_θ 是负的(压力); 当

$$\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi = 0$$

时, 即 $\varphi = 51^\circ 50'$ 时, N_θ 等于零; 对于更大的 φ , N_θ 成为正的(拉力)。

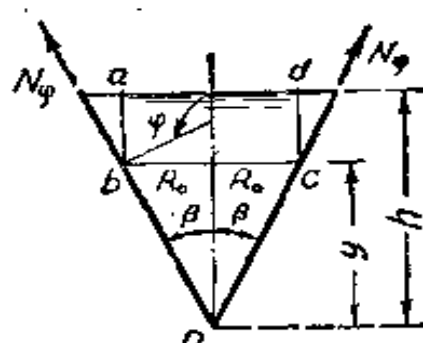


图 10-15

(3) 圆锥形容器。对于中心角为 2β 的圆锥形容器, 图 10-15, 根据几何关系有

$$R_1 = \infty, \quad \sin \varphi = \cos \beta, \quad R_0 = y \tan \beta.$$

当容器盛满容重为 γ 的液体时, 合力 P 应为 $abOcd$ 体积内液体的重量, 因此,

$$P = \gamma \left[\pi R_0^2 (h - y) + \frac{1}{3} \pi R_0^2 y \right] = \gamma \pi R_0^2 \left(h - \frac{2}{3} y \right).$$

于是由公式(10-24)得到

$$N_r = \frac{P}{2\pi R_0 \sin \varphi} = \frac{\gamma \pi R_0^2 \left(h - \frac{2}{3} y \right)}{2\pi R_0 \cos \beta} = \frac{\gamma y \left(h - \frac{2}{3} y \right) \tan \beta}{2 \cos \beta}.$$

为了求得 N_r 的最大值, 命 $\frac{dN_r}{dy} = 0$, 得到 $y = \frac{3}{4}h$. 代入上式, 即得

$$(N_r)_{\max} = \frac{3}{16} \frac{\gamma h^2 \tan \beta}{\cos \beta}.$$

注意 $Z = \gamma(h - y)$, 和 $R_1 = \infty$ 可由方程(10-25)得出

$$N_{\theta} = \frac{R_0}{\sin \varphi} Z - \frac{\gamma R_0 (h-y)}{\sin \varphi} = \frac{\gamma (h-y) y \operatorname{tg} \beta}{\cos \beta}.$$

为了求得 N_{θ} 的最大值, 命 $\frac{dN_{\theta}}{dy} = 0$, 得到 $y = \frac{h}{2}$. 代入上式, 即得

$$(N_{\theta})_{\max} = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \beta}{4 \cos \beta}.$$

§10-6 回转薄壳的轴对称位移

如果回转薄壳所受的约束和荷载都是轴对称的, 中面上各点的位移也将是轴对称的。这时, θ 向位移 $v=0$, 而 φ 向位移 u 和法向位移 w 都只是 φ 的函数, 不随 θ 变化。

由于 φ 向位移 u , 图 10-16, 平行圆的半径 R_0 改变了 $\delta' = u \cos \varphi$, 所以环向线段将和半径 R_0 同样地发生正应变

$$\epsilon'_{\theta} = \frac{u \cos \varphi}{R_0} = \frac{u \cos \varphi}{R_2 \sin \varphi} = \frac{u}{R_2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

同时, φ 向线段也将发生正应变

$$\epsilon'_{\varphi} = \frac{(u+du) - u}{R_1 d\varphi} = \frac{1}{R_1} \frac{du}{d\varphi},$$

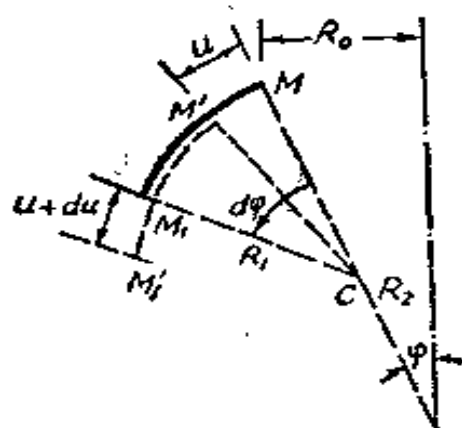


图 10-16

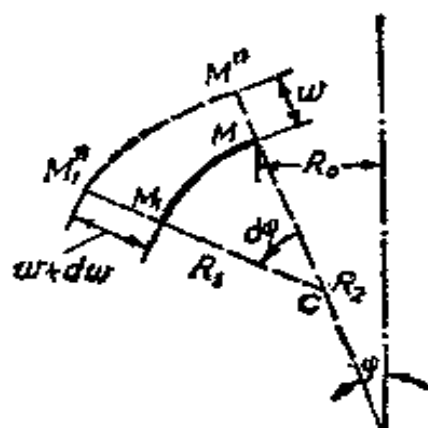


图 10-17

并发生转角(等于法线的转角)

$$\omega' = \angle MCM' = \frac{u}{R_1}.$$

由于法向位移 w , 图 10-17, 平行圆的半径 R_0 改变了 $\delta'' =$

$w \sin \varphi$, 所以环向线段将发生正应变

$$\varepsilon_{\theta}'' = \frac{w \sin \varphi}{R_0} = \frac{w \sin \varphi}{R_2 \sin \varphi} = \frac{w}{R_2}.$$

同时, φ 向线段也发生正应变

$$\varepsilon_{\varphi}'' = \frac{(R_1 + w)d\varphi - R_1 d\varphi}{R_1 d\varphi} = \frac{w}{R_1},$$

并发生转角(等于法线的转角)

$$\omega'' = -\frac{(w + dw) - w}{R_1 d\varphi} = -\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi}.$$

于是得总的环向正应变、 φ 向正应变、 φ 向线段和法线的转角以及平行圆半径的改变如下:

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}' + \varepsilon_{\theta}'' = \frac{1}{R_2}(u \operatorname{ctg} \varphi + w), \quad (a)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\varphi}' + \varepsilon_{\varphi}'' = \frac{1}{R_1} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right), \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega = \omega' + \omega'' &= \frac{1}{R_1} \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right), \\ \delta = \delta' + \delta'' &= u \cos \varphi + w \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (10-27)$$

由式(a)及式(b)消去 w , 得到

$$\frac{du}{d\varphi} - u \operatorname{ctg} \varphi = R_1 \varepsilon_{\varphi} - R_2 \varepsilon_{\theta}. \quad (c)$$

利用物理方程

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \mu \sigma_{\varphi}) = \frac{1}{Et} (N_{\theta} - \mu N_{\varphi}), \quad (d)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi} - \mu \sigma_{\theta}) = \frac{1}{Et} (N_{\varphi} - \mu N_{\theta}), \quad (e)$$

可以由式(c)得出

$$\frac{du}{d\varphi} - u \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{Et} [N_{\varphi} (R_1 + \mu R_2) - N_{\theta} (R_2 + \mu R_1)].$$

命

$$f(\varphi) = \frac{1}{Et} [N_{\varphi} (R_1 + \mu R_2) - N_{\theta} (R_2 + \mu R_1)], \quad (f)$$

则由上式的积分得

$$u = \sin \varphi \int \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} d\varphi + C \sin \varphi, \quad (10-28)$$

其中的积分常数 C 决定于约束条件(位移的边界条件)。

另外, 由式(a)及式(d)消去 e_θ , 得

$$w = -u \operatorname{ctg} \varphi + \frac{R_2}{Et} (N_\theta - \mu N_\varphi). \quad (10-29)$$

于是, 如果已知 N_φ 和 N_θ , 就可以由公式(10-28)求得 φ 向位移 u , 然后由公式(10-29)求得法向位移 w , 最后由公式(10-27)求得转角 ω 和平行圆半径的改变 δ 。

试以图 10-13 中受均布法向荷载 q 的球面薄壳为例。将式(10-26)所示的薄膜内力

$$N_\varphi = N_\theta = -\frac{qa}{2}$$

代入式(f), 并注意 $R_1 = R_2 = a$, 即得 $f(\varphi) = 0$, 而(10-28)式成为 $u = C \sin \varphi$. 由边界上的约束条件

$$(u)_{\varphi=\beta} = 0,$$

可见 $C = 0$, 从而得出

$$u = 0. \quad (10-30)$$

代入式(10-29), 注意 $R_2 = a$, 即得

$$w = \frac{R_2}{Et} (N_\theta - \mu N_\varphi) = -\frac{(1-\mu)qa^2}{2Et}, \quad (10-31)$$

并由式(10-27)得出

$$\omega = 0, \quad (10-32)$$

$$\delta = -\frac{(1-\mu)qa^2}{2Et} \sin \varphi. \quad (10-33)$$

§10-7 回转薄壳的轴对称弯曲

仍然用两个相邻的平行圆和两个相邻的子午面从薄壳的中面

上割取一个微分面, 图 10-18。薄壳的内力, 除了 φ 向拉压力 N_φ 和

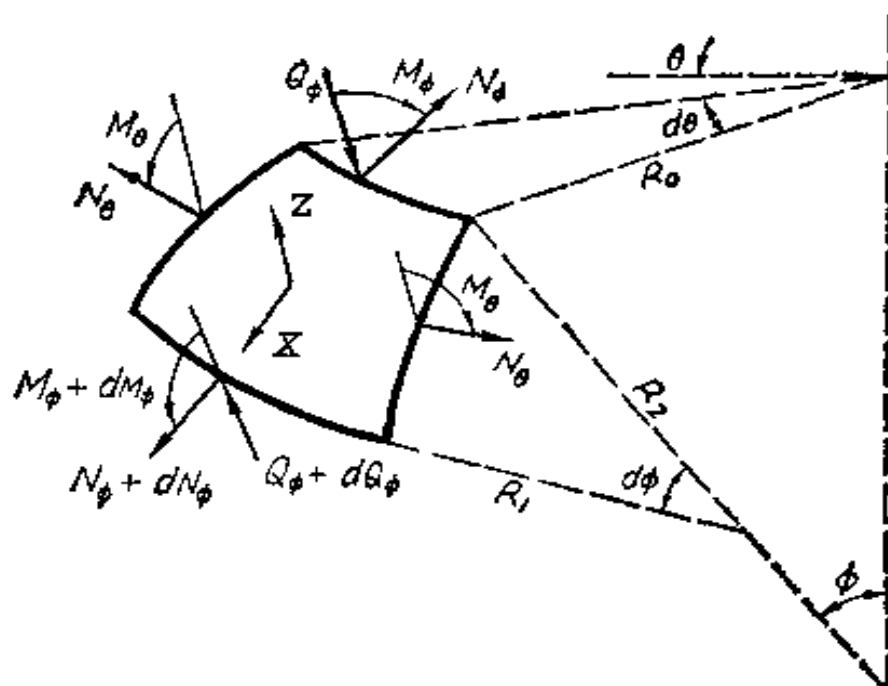


图 10-18

θ 向拉压力 N_θ 以外, 还有剪力 Q_θ 以及弯矩 M_φ 和 M_θ 。各个内力及其增量, 连同法向荷载和 φ 向荷载, 一并表示在图上。由该微分块的平衡条件 $\Sigma F_\varphi = 0$, $\Sigma F_z = 0$ 和 $\Sigma M_\theta = 0$ 可以导出如下的三个平衡微分方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varphi}(R_0 N_\varphi) - R_1 \cos \varphi N_\theta + R_0 Q_\varphi + R_0 R_1 X &= 0, \\ -R_0 N_\varphi - R_1 \sin \varphi N_\theta + \frac{d}{d\varphi}(R_0 Q_\varphi) + R_0 R_1 Z &= 0, \\ \frac{d}{d\varphi}(R_0 M_\varphi) - R_1 \cos \varphi M_\theta - R_0 R_1 Q_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由几何关系可以导出中面形变与中面位移的关系式, 即如下的几何方程:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\varphi &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right), \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{R_2} (u \operatorname{ctg} \varphi + w), \\ \chi_\varphi &= -\frac{1}{R_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{u}{R_1} \right), \quad \chi_\theta = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R_2} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{u}{R_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

物理方程则为

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{Et}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\varphi} + \mu\varepsilon_{\theta}), N_{\theta} = \frac{Et}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\theta} + \mu\varepsilon_{\varphi}), \\ M_{\varphi} &= D(\chi_{\varphi} + \mu\chi_{\theta}), M_{\theta} = D(\chi_{\theta} + \mu\chi_{\varphi}). \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将式(b)代入式(c), 得出用位移表示内力的所谓弹性方程

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{Et}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) + \frac{\mu}{R_2} (u \operatorname{ctg} \varphi + w) \right], \\ N_{\theta} &= \frac{Et}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{R_2} (u \operatorname{ctg} \varphi + w) + \frac{\mu}{R_1} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) \right], \\ M_{\varphi} &= -D \left[\frac{1}{R_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{u}{R_1} \right) + \frac{\mu \operatorname{ctg} \varphi}{R_2} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{u}{R_1} \right) \right], \\ M_{\theta} &= -D \left[\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R_2} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{u}{R_1} \right) + \frac{\mu}{R_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{u}{R_1} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

球面薄壳是最常用的回转薄壳。在球面薄壳中, 我们有 $R_1 = R_2 = R$, $R_3 = R \sin \varphi$ 。这时, 平衡微分方程(a)简化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi N_{\varphi}) - \cos \varphi N_{\theta} + \sin \varphi Q_{\varphi} + X R \sin \varphi &= 0, \\ \frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi Q_{\varphi}) - \sin \varphi (N_{\varphi} + N_{\theta}) + Z R \sin \varphi &= 0, \\ \frac{d}{d\varphi} (\sin \varphi M_{\varphi}) - \cos \varphi M_{\theta} - R \sin \varphi Q_{\varphi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

弹性方程(d)简化为

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= \frac{Et}{(1-\mu^2)R} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) + \mu (u \operatorname{ctg} \varphi + w) \right], \\ N_{\theta} &= \frac{Et}{(1-\mu^2)R} \left[(u \operatorname{ctg} \varphi + w) + \mu \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) \right], \\ M_{\varphi} &= \frac{D}{R^2} \left[\frac{d}{d\varphi} \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right) + \mu \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \operatorname{ctg} \varphi \right], \\ M_{\theta} &= \frac{D}{R^2} \left[\left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \operatorname{ctg} \varphi + \mu \frac{d}{d\varphi} \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

用混合法求解。第一个基本未知函数取为横向剪力 Q_{φ} , 第二

个未知函数取为式(10-27)中所示的转角

$$\omega = \frac{1}{R_1} \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right) = \frac{1}{R} \left(u - \frac{dw}{d\varphi} \right). \quad (10-34)$$

利用方程(e)及(f), 可将 M_φ 及 M_θ 用 ω 表示, 将 N_φ 及 N_θ 用 Q_φ 表示, 并得出求解 Q_φ 及 ω 的微分方程。在球面薄壳不受分布荷载而只受边界荷载时, 这些表达式及微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi, \quad N_\theta = \frac{dQ_\varphi}{d\varphi}, \\ M_\varphi &= \frac{D}{R} \left(\frac{d\omega}{d\varphi} + \mu \omega \operatorname{ctg} \varphi \right), \quad M_\theta = \frac{D}{R} \left(\omega \operatorname{ctg} \varphi + \mu \frac{d\omega}{d\varphi} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10-35)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 Q_\varphi}{d\varphi^2} + \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - Q_\varphi (\operatorname{ctg}^2 \varphi - \mu) + Et\omega &= 0, \\ \frac{d^2 \omega}{d\varphi^2} + \frac{d\omega}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \omega (\operatorname{ctg}^2 \varphi + \mu) - \frac{R^2}{D} Q_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10-36)$$

§10-8 球面薄壳轴对称弯曲问题的简化计算

按无矩理论计算回转薄壳时, 和计算圆柱面薄壳时一样, 计算结果对薄壳的绝大部分足够精确, 但在靠近边界处, 由于支座约束的影响, 误差较大。为了对球面薄壳的无矩解答进行必要的修正, 我们来考虑球面薄壳在轴对称边界力 M 和 P 作用下的弯曲, 图 10-19。

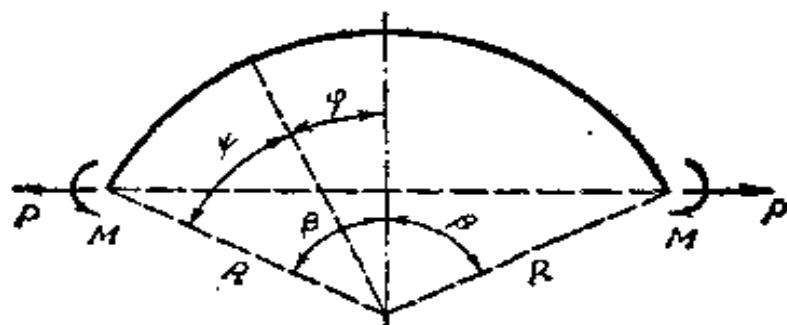


图 10-19

在这里, 本来可以由方程(10-36)求解 Q_φ 和 ω , 从而用(10-35)式求得内力。但是, 这样得来的解答, 只能表示成为无穷级数的形

式,而且对于工程上常见的薄壳,级数收敛很慢,不便应用。对这些解答进行考察,可见 Q_φ 和 ω 有如下的特征:

$$Q_\varphi \ll \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} \ll \frac{d^2Q_\varphi}{d\varphi^2}, \quad \omega \ll \frac{d\omega}{d\varphi} \ll \frac{d^2\omega}{d\varphi^2}.$$

在离开壳顶较远而离开边界较近之处(正是无矩解答需要修正之处), $\operatorname{ctg} \varphi$ 不会是很大的数值,因此可以在(10-36)的第一方程中略去 $\frac{dQ_\varphi}{d\varphi}$ 和 Q_φ 的项,在第二方程中略去 $\frac{d\omega}{d\varphi}$ 和 ω 的项,使二式简化为易于求解的形式如下:

$$\frac{d^2Q_\varphi}{d\varphi^2} = -Et\omega, \quad \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} = \frac{R^2}{D}Q_\varphi. \quad (a)$$

从二式中消去 ω , 得到 Q_φ 的四阶常微分方程

$$\frac{d^4Q_\varphi}{d\varphi^4} + \frac{EtR^2}{D}Q_\varphi = 0.$$

引用无因次的常数

$$m = \left(\frac{EtR^2}{4D} \right)^{1/4} = \left[3(1-\mu^2) \frac{R^2}{t^2} \right]^{1/4}, \quad (10-37)$$

则上列微分方程变换成为

$$\frac{d^4Q_\varphi}{d\varphi^4} + 4m^4Q_\varphi = 0. \quad (b)$$

为了进一步简化解答,我们用 ψ 角来代替 φ 角作为自变量,图 10-19。利用变换式

$$\psi = \beta - \varphi, \quad (10-38)$$

可将微分方程(b)变换成为

$$\frac{d^4Q_\varphi}{d\psi^4} + 4m^4Q_\varphi = 0.$$

将这一微分方程的解答取为如下的形式:

$$Q_\varphi = e^{-m\psi} (C_1 \cos m\psi + C_2 \sin m\psi) \\ + e^{m\psi} (C_3 \cos m\psi + C_4 \sin m\psi),$$

其中的 C_1 至 C_4 是任意常数。注意 m 是较大的数字而 Q_r 是局部性的(它随着 ψ 值的增大而趋近于零), 可见 C_3 及 C_4 可以取为等于零, 而上式简化为

$$Q_r = e^{-m\varphi} (C_1 \cos m\psi + C_2 \sin m\psi). \quad (c)$$

由 (a) 中的第一方程可以求得

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{Et} \frac{d^2 Q_r}{d\varphi^2} = -\frac{1}{Et} \frac{d^2 Q_r}{d\psi^2} \\ &= -\frac{2m^2}{Et} e^{-m\varphi} (C_1 \sin m\psi - C_2 \cos m\psi). \end{aligned} \quad (d)$$

在 (10-35) 的后二式中, 注意 $\omega \ll \frac{d\omega}{d\psi}$, 即可由式 (d) 得出

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{D}{R} \frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{D}{R} \frac{d\omega}{d\psi} \\ &= \frac{2m^3 D}{EtR} e^{-m\varphi} [(C_1 + C_2) \cos m\psi + (C_2 - C_1) \sin m\psi] \\ &= \frac{R}{2m} e^{-m\varphi} [(C_1 + C_2) \cos m\psi + (C_2 - C_1) \sin m\psi], \end{aligned} \quad (e)$$

$$M_\theta = \frac{D}{R} \mu \frac{d\omega}{d\varphi} = \mu M_r. \quad (f)$$

现在就可以由边界条件求出 C_1 及 C_2 。边界条件是

$$(M_r)_{\varphi=0} = M, \quad (Q_r)_{\varphi=0} = P \sin \beta.$$

将式 (e) 及式 (c) 代入, 求得

$$C_1 = P \sin \beta, \quad C_2 = 2M \frac{m}{R} - P \sin \beta.$$

代回 (c)、(d)、(e) 三式, 得到

$$Q_r = e^{-m\varphi} \left[P \sin \beta (\cos m\psi - \sin m\psi) + 2M \frac{m}{R} \sin m\psi \right], \quad (g)$$

$$\omega = -\frac{2m^2}{Et} e^{-m\varphi} \left[P \sin \beta (\cos m\psi + \sin m\psi) - 2M \frac{m}{R} \cos m\psi \right], \quad (h)$$

$$M_\varphi = e^{-m\varphi} \left[-P \frac{R}{m} \sin \beta \sin m\psi + M (\cos m\psi + \sin m\psi) \right] \quad (i)$$

按照(10-35)中的前二式,可由式(g)求得 N_φ 及 N_θ :

$$\begin{aligned} N_\varphi &= Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi \\ &= e^{-m\varphi} \left[P \sin \beta (\cos m\psi - \sin m\psi) + 2M \frac{m}{R} \sin m\psi \right] \operatorname{ctg} \varphi, \quad (j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_\theta &= \frac{dQ_\varphi}{d\varphi} = -\frac{dQ_\varphi}{d\psi} = e^{-m\varphi} \left[2Pm \sin \beta \cos m\psi \right. \\ &\quad \left. - 2M \frac{m^2}{R} (\cos m\psi - \sin m\psi) \right]. \quad (k) \end{aligned}$$

为了可以利用表 10-1 来简化数字计算,将以上各个内力的表达式通过公式(10-18)用特殊函数 f_1 至 f_4 来表示:

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \left[P \sin \beta f_3(m\psi) + 2M \frac{m}{R} f_2(m\psi) \right] \operatorname{ctg} \varphi, \\ N_\theta &= 2Pm \sin \beta f_4(m\psi) - 2M \frac{m^2}{R} f_3(m\psi), \\ M_\varphi &= -P \frac{R}{m} \sin \beta f_2(m\psi) + M f_1(m\psi), \\ M_\theta &= \mu M_\varphi, \\ Q_\varphi &= P \sin \beta f_3(m\psi) + 2M \frac{m}{R} f_2(m\psi). \end{aligned} \right\} \quad (10-39)$$

这样就很容易由 P 和 M 求得内力。

在计算实际问题时,要首先算出 M 和 P ,而 M 和 P 须根据薄壳在 M 及 P 作用方向的位移条件来确定。薄壳在 M 作用方向的位移是边界处的转角,即

$$\omega_0 = (\omega)_{\varphi=0},$$

由式(k)可见其为

$$\omega_0 = -\frac{2m^2 \sin \beta}{Et} P + \frac{4m^3}{EtR} M, \quad (10-40)$$

薄壳在 P 作用方向的位移等于边界半径的改变,即

$$\delta_0 = R \sin \beta (\varepsilon_\theta)_{\varphi=0} = R \sin \beta \left(\frac{N_\theta - \mu N_\varphi}{Et} \right)_{\varphi=0}.$$

将式(j)及式(k)代入, 得

$$\delta_0 = \frac{PR \sin \beta}{Et} (2m \sin \beta - \mu \cos \beta) - \frac{2Mm^2}{Et} \sin \beta.$$

由于 m 是较大的数字而 $\sin \beta$ 不会是很小的数字, $\mu \cos \beta$ 与 $2m \sin \beta$ 相比, 可以略去不计。于是上式可以简写为

$$\delta_0 = \frac{2mR \sin^2 \beta}{Et} P - \frac{2m^2 \sin \beta}{Et} M. \quad (10-41)$$

§ 10-9 球面薄壳受均布压力

作为应用上一节中简化计算法的实例, 设有边界固定的球面薄壳, 受均布压力 q , 图 10-20。参阅 § 10-5 中的解答(10-26), 可见这里的无矩内力是

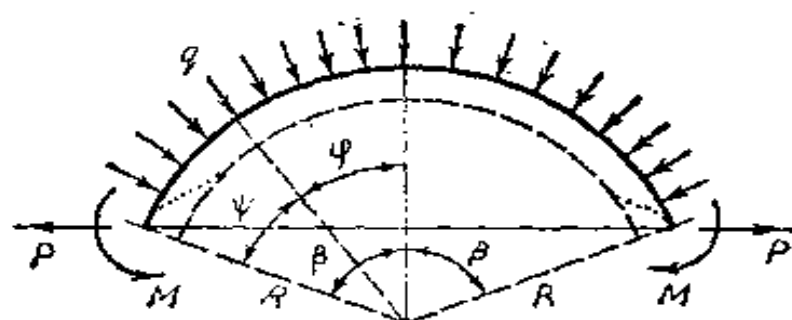


图 10-20

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{qR}{2}, & N_\theta &= -\frac{qR}{2}, \\ M_\varphi &= 0, & M_\theta &= 0, & Q_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

参阅 § 10-6 中的解答(10-30) 及 (10-31), 可见这里与无矩内力(a)相应的中面位移是

$$u = 0, \quad w = -\frac{(1-\mu)qR^2}{2Et},$$

而薄壳的弹性曲面(发生位移以后的中面)如图 10-20 中的虚线所

示。此外,参阅 § 10-6 中的解答(10-32)及(10-33),可见这里的 ω_0 及 δ_0 为

$$\omega_0 = (\omega)_{\psi=0} = 0, \quad (b)$$

$$\delta_0 = (\delta)_{\psi=0} = (\delta)_{\psi=\beta} = -\frac{(1-\mu)qR^2 \sin \beta}{2Et}. \quad (c)$$

实际上,由于边界固定,边界处将发生反力矩 M 及反力 P 。这个 M 和 P , 结合荷载 q 的作用, 应使边界处总的 ω_0 及总的 δ_0 成为零, 而边界近处的弹性曲面如图 10-20 中的点线所示。按照公式(10-40)及(10-41), 以及式(b)和式(c), 上述条件可以表示成为

$$\begin{aligned} -\frac{2m^2 \sin \beta}{Et} P + \frac{4m^3}{EtR} M &= 0, \\ \frac{2mR \sin^2 \beta}{Et} P - \frac{2m^2 \sin \beta}{Et} M - \frac{(1-\mu)qR^2 \sin \beta}{2Et} &= 0. \end{aligned}$$

求解 P 及 M , 得到

$$P = \frac{(1-\mu)qR}{2m \sin \beta}, \quad M = \frac{(1-\mu)qR^2}{4m^2}. \quad (d)$$

将式(d)代入式(10-39), 得出由于边界约束而应修正的内力(即所谓边缘效应), 然后附加于式(a)所示的无矩内力, 整理以后, 即得总的内力如下:

$$\begin{aligned} N_\varphi &= -\frac{qR}{2} \left\{ 1 - \frac{1-\mu}{m} \left[f_3(m\psi) + f_2(m\psi) \right] \right\} \operatorname{ctg} \varphi \\ &= -\frac{qR}{2} \left[1 - \frac{1-\mu}{m} f_4(m\psi) \right] \operatorname{ctg} \varphi, \\ N_\theta &= -\frac{qR}{2} \left\{ 1 - (1-\mu) \left[2f_4(m\psi) - f_3(m\psi) \right] \right\}, \\ &= -\frac{qR}{2} \left[1 - (1-\mu) f_1(m\psi) \right], \\ M_\varphi &= \frac{(1-\mu)qR^2}{4m^2} \left[f_1(m\psi) - 2f_2(m\psi) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{qR^2}{4m^2} \left(\frac{1-\mu}{2} \right) f_3(m\psi),$$

$$M_\varphi = -\mu M_\psi,$$

$$Q_\varphi = \frac{(1-\mu)qR}{2m} \left[f_3(m\psi) + f_2(m\psi) \right]$$

$$= \frac{qR}{2m} \left(\frac{1-\mu}{2} \right) f_4(m\psi).$$

利用表 10-1, 极易由这些表达式求得球面薄壳的最后内力。

习 题

10-1. 试求图 10-5 中水平圆筒由自重引起的无矩内力及相应的应力。假定圆筒两端可以沿纵向自由移动, 圆筒每单位面积的自重为 q 。

答案: $\sigma_x = \frac{q}{Rt} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right) \cos \theta, \quad \sigma_\varphi = -\frac{qR}{t} \cos \theta,$

$$\tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} = -\frac{2q}{t} x \sin \theta.$$

10-2. 设有很长的圆筒, 半径为 R , 受均布内压力 q , 试求靠近一端处的中面法向位移 w , 弯矩 M_x 及横向剪力 Q_x , 并利用表 10-1 画出它们的图线, 假定: (1) 该端为铰支端, (2) 该端为固定端。

答案: (1) $w = \frac{qR^2}{Et} [1 - f_4(\xi)],$ (2) $w = \frac{qR^2}{Et} [1 - f_1(\xi)],$

10-3. 圆锥面薄壳的顶角为 2β , 图 10-21, 单位面积的自重为 q , 试求无矩内力。

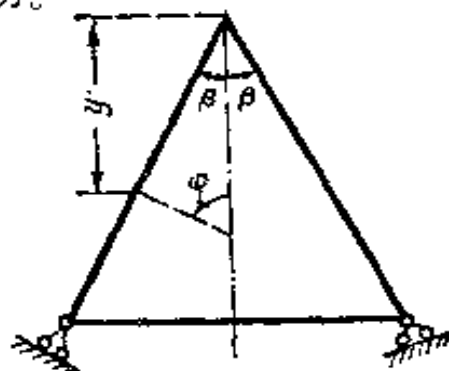


图 10-21

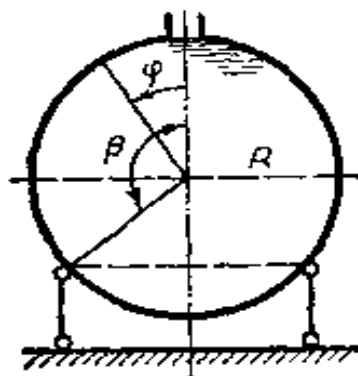


图 10-22

答案: $N_\varphi = -\frac{qy}{2\cos^2\beta}, \quad N_\theta = -qy\cos^2\beta.$

10-4. 圆球形容器, 沿着 $\varphi = \beta$ 的平行圆受支承, 图 10-22, 盛满容重为

ν 的液体, 试求无矩内力。

答案: 在 $\varphi < \beta$ 处, $N_\varphi = \frac{\nu R^2}{6} \left(1 - \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right),$

$$N_\theta = \frac{\nu R^2}{6} \left(5 - 6 \cos \varphi + \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right);$$

在 $\varphi > \beta$ 处, $N_\varphi = \frac{\nu R^2}{6} \left(5 + \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} \right),$

$$N_\theta = \frac{\nu R^2}{6} \left(1 - 6 \cos \varphi - \frac{2 \cos^2 \varphi}{1 - \cos \varphi} \right).$$

10-5. 设图 10-20 中的球面薄壳具有铰支边, 试求均布压力 q 引起的内力。

答案: $M = 0, \quad P = \frac{(1 - \mu) q R}{4 m \sin \beta},$

$$N_\varphi = - \frac{q R}{2} \left[1 - \frac{1 - \mu}{2 m} f_3(m \psi) \operatorname{ctg} \varphi \right],$$

$$N_\theta = - \frac{q R}{2} [1 - (1 - \mu) f_4(m \psi)],$$

$$M_\varphi = - \frac{q R^2 (1 - \mu)}{4 m} f_2(m \psi), \quad M_\theta = \mu M_\varphi,$$

$$Q_\varphi = \frac{q R (1 - \mu)}{4 m} f_3(m \psi).$$

10-6. 设有较长的圆筒, 一端与同半径的圆板刚连, 另一端与同半径、同厚度的半球壳刚连, 内盛有压的气体, 试考虑如何用简化计算法求得位移及内力。