

# 第一章 绪论

## 1.1 引言

有限单元法已成为一种强有力的数值解法来解决工程中遇到的大量问题,其应用范围从固体到流体,从静力到动力,从力学问题到非力学问题。事实上,有限单元法已经成为在已知边界条件和初始条件下求解偏微分方程组的一般数值方法。

对于有限元的线性分析,我们已经比较熟悉,它已作为设计工具被广泛采用。但绝大多数实际问题属于非线性问题,根据产生非线性的原因,非线性问题主要有三种类型:

### 1. 材料非线性(简称材料非线性或物理非线性)

其特点是应力 $\sigma$ 与应变 $\varepsilon$ 之间为非线性关系,通常与加载历史有关,加载和卸载不是同一途径(图 1.1),因而其物理方程

$$\sigma = D\varepsilon$$

中的弹性矩阵  $D$  是应变 $\varepsilon$  的函数。但材料非线性问题仍属于小变形问题,位移和应变是微量,其几何方程是线性的。土、岩石、混凝土等具有典型的材料非线性性质,所以,土坝、岩土地基的稳定性和加固,地下洞室和边坡的稳定性都应当按材料非线性问题处理。

### 2. 几何非线性

几何非线性属于大变形问题,位移和应变或者它们中一个是有限量。可能会有三种情况:大位移(包括线位移和角位移)、小应变,小位移、大应变和大位移、大应变。此时反映应变和位移关系的几何方程是非线性方程,例如,正应变 $\varepsilon_x$ 可表示为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \dots$$

剪应变 $\gamma_{xy}$ 表示为

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \dots$$

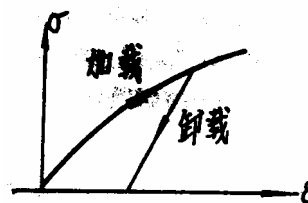


图 1.1

如果应力和应变之间的关系也是非线性的,就变成了更复杂的双重非线性问题。不过,在几何非线性问题中一般都认为应力在弹性范围内, $\sigma$ 与 $\varepsilon$ 之间呈线性关系。工程中的实体结构和板壳结构都存在几何非线性问题,例如弹性薄壳的大挠度分析,压杆或板壳在弹性屈曲后的稳定性问题。

在采用有限元方法分析非线性问题时,以上两类都表现为结构的整体劲度矩阵  $K$  不再是常量矩阵,而是结点位移 $\delta$  的函数,还有一类问题是结点荷载  $R$  与 $\delta$  有关,这就是边界非线性问题,又称接触非线性。

### 3. 接触非线性

由于接触体的变形和接触边界的摩擦作用,使得部分边界条件随加载过程而变化,且不可恢复。这种由边界条件的可变性和不可逆性产生的非线性问题,称为接触非线性。工程中有许多接触非线性的问题,如混凝土坝纵缝和横缝缝面的接触,面板堆石坝中钢筋混凝土面板与垫层之间的接触,岩体节理面或裂隙面的工作状态等。

目前,研究工程非线性问题比较有效的工具是非线性有限元方法。要使这一方法实用化,有两个问题必须解决。第一,由于非线性问题的数值计算工作量大大增加,需要有相当大计

算能力的工具。近 10 年来，高速计算机的发展已基本满足了这一需要，同时计算费用也在继续减小。第二，非线性求解方法的精度和收敛性必须被验证。由于发展和改进了多种类型的单元，以更好地模拟结构的工作，找到更有效的非线性求解方法，并且积累了许多经验可应用于实际工程问题，现在已经能够比较有把握地完成非线性有限元分析。非线性有限元方法正在成为一种强有力的计算工具被研究人员和工程人员所采用。

## 1.2 线弹性有限元方法的回顾

一般来说，非线性有限元法可归结为一系列线弹性问题。因而，线弹性有限元是非线性有限元法的基础。两者不仅在分析方法和求解步骤上有相似之处，而且后者要不断调用前者的结果。为此，本节将扼要地回顾一下线弹性有限元方法（以位移有限元为例）。

线弹性有限元的分析步骤大致可分：

### 1. 结构的离散化

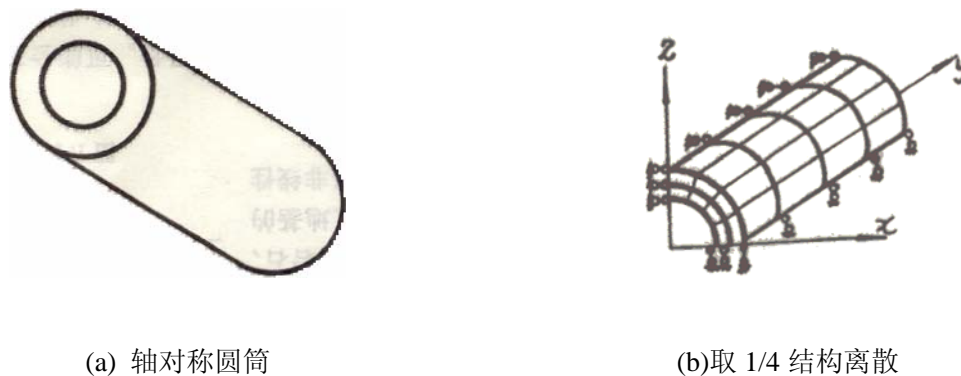


图 1.2 圆筒有限元离散

在有限元分析中，首先要将连续体剖分成有限个结点上相联的单元（图 1.2），单元之间的力依靠结点传递，铰接结点只能传递力，刚接结点可以传递力和力矩。根据结构的形状和计算要求，可以选择各种单元类型，图 1.2 采用了八结点六面体的空间等参单元。

在位移有限元中，以结点的位移  $\delta$  为基本未知量。设结构离散后，总的自由度数为  $n$ ，则整体的结点位移向量为

$$\delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \cdots \quad \delta_n]^T \quad (1-1)$$

单元的结点位移向量为

$$\delta^e = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \cdots \quad u_d \quad v_d \quad w_d]^T \quad (1-2)$$

$d$  是单元的结点数。

连续体离散后，还需要对位移边界进行约束处理，将连续的位移边界条件离散为结点的位移边界条件。例如，位移为零的边界可处理为该边界上的结点具有铰支座（图 1.2）。

### 2. 单元分析

根据所选择的单元类型，确定单元的位移模式，将外荷载转化为等效结点荷载列阵，导出单元的应变、应力矩阵及劲度矩阵。

#### (1) 单元位移模式

采用广义坐标法或Seredipity方法<sup>[1]</sup>导出位移插值函数 $N_i$ 的表达式, 就可以建立单元内任一点的位移 $\mathbf{f} = [u \quad v \quad w]^T$ 与单元结点位移 $\boldsymbol{\delta}^e$ 之间的关系:

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}^e \quad (1-3)$$

$N_i$ 反映了单元内位移的分布形状, 所以又称形函数。对于 $d$ 个结点的三维单元,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_d & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_d & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_d \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

$N_i$ 是整体坐标 $(x \ y \ z)$ 的函数, 对于图 1-3所示的等参单元, 由于需要进行从实际单元(图 1-3(a))到母单元(图 1-3(b))的坐标变换,  $N_i$ 将是局部坐标 $(\xi \ \eta \ \zeta)$ 的函数, 坐标变换可表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{x}^e \quad (1-5)$$

式中

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T \quad (1-6)$$

为单元内任意点的整体坐标。

$$\mathbf{x}^e = [x_1 \ y_1 \ z_1 \ x_2 \ y_2 \ z_2 \ \cdots \ x_d \ y_d \ z_d]^T \quad (1-7)$$

为单元各结点的整体坐标。

(2) 单元的结点荷载 $\mathbf{R}^e$

作用在单元上的集中力 $\mathbf{P} = [P_x \ P_y \ P_z]^T$ , 体力 $\mathbf{p} = [X \ Y \ Z]^T$ 及面力 $\bar{\mathbf{p}} = [\bar{X} \ \bar{Y} \ \bar{Z}]^T$ 必须转换成等效的单元结点荷载列阵 $\mathbf{R}^e$ ,

$$\mathbf{R}^e = [X_1 \ Y_1 \ Z_1 \ X_2 \ Y_2 \ Z_2 \ \cdots \ X_d \ Y_d \ Z_d]^T \quad (1-8)$$

根据虚功原理可导出

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{N}^T \mathbf{P} + \iiint \mathbf{N}^T \mathbf{p} dv + \iint \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} ds \quad (1-9)$$

(3) 应变和应力矩阵

对于小变形问题, 应变和位移之间满足以下的几何方程

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{f} \quad (1-10)$$

式中

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \quad (1-11)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

为微分算子矩阵。将式(1-3)代入(1-10)可得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^e \quad (1-13)$$

其中

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} \quad (1-14)$$

为单元的应变矩阵。

对于线弹性体，应力和应变遵循以下的物理方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (1-15)$$

$\mathbf{D}$  为弹性矩阵，可表示为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & & & & & \\ & \lambda & \lambda + 2G & & & \\ & \lambda & \lambda & \lambda + 2G & & \\ & 0 & 0 & 0 & G & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & G \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

$\lambda$  和  $G$  为拉密系数。将式 (1-13) 代入 (1-15) 可得

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}\boldsymbol{\delta}^e \quad (1-17)$$

其中

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{B} \quad (1-18)$$

称单元的应力矩阵。

(4) 单元劲度矩阵

在有限元方法中，各单元之间的相互作用力表现为结点力，设单元的结点力为

$$\mathbf{F}^e = [U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \cdots \quad U_d \quad V_d \quad W_d]^T \quad (1-19)$$

则虚功方程可表示为

$$(\boldsymbol{\delta}^{*e})^T \mathbf{F}^e = \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^*)^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (1-20)$$

式中， $\boldsymbol{\delta}^{*e}$  是单元的结点虚位移， $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  是虚应变。将式 (1-13) 和 (1-15) 代入式 (1-20)，可得出单元结点力与结点位移的关系

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}\boldsymbol{\delta}^e \quad (1-21)$$

式中

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dv \quad (1-22)$$

为单元劲度矩阵。

### 3. 整体分析

弹性力学问题在按位移求解时，与基本微分方程对应的泛函是弹性体的势能  $\pi_p$ ，它是位移的函数。与微分方程等价的变分方程就是最小势能原理，即

$$\delta\pi_p = 0 \quad (1-23)$$

在有限元方法中，弹性体的总势能为各单元势能的集合，单元势能  $\pi_p^e$  由单元的形变势能  $U^e$  和外力势能  $V^e$  组成

$$\pi_p^e = U^e + V^e \quad (1-24)$$

式中

$$U^e = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (1-25)$$

$$V^e = -\mathbf{f}^T \mathbf{P} - \int_V \mathbf{f}^T \mathbf{p} dv - \int_{S_\sigma} \mathbf{f}^T \bar{\mathbf{p}} ds \quad (1-26)$$

将式 (1-13) 和 (1-15) 代入 (1-25)，式 (1-3) 代入 (1-26)，并注意式 (1-22) 和 (1-9)，可得

$$\pi_p^e = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{k} \boldsymbol{\delta}^e - (\boldsymbol{\delta}^e)^T \mathbf{R}^e \quad (1-27)$$

引入单元选择矩阵  $\mathbf{C}^e$ ，使

$$\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\delta}$$

则

$$\pi_p = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{R} \quad (1-28)$$

根据式 (1-23)，有

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \boldsymbol{\delta}} = 0$$

由 (1-28) 式导出位移有限元的支配方程

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{R} \quad (1-29)$$

其中

$$\mathbf{K} = \sum_e (\mathbf{C}^e)^T \mathbf{k} \mathbf{C}^e \quad (1-30)$$

为整体劲度矩阵。

$$\mathbf{R} = \sum_e (\mathbf{C}^e)^T \mathbf{R}^e \quad (1-31)$$

是整体结点荷载列阵。整体分析的目的就是将  $\mathbf{k}$  集成  $\mathbf{K}$ ， $\mathbf{R}^e$  集成  $\mathbf{R}$ 。

#### 4. 解方程，求位移和应力

求解支配方程 (1-29)，得到结点位移  $\boldsymbol{\delta}$ ，然后根据式 (1-18) 和 (1-15) 求出单元的应变和应力。

### 1.3 学习内容及课程安排

本课程主要为土木、水利类专业的本科生和研究生开设，根据土木、水利工程的特点，限于学时，课程内容主要研究材料非线性问题的有限元方法。与其它一些以理论为主的有限元教材不同，为了使本教材更实用，重点放在非线性有限元方法的计算机实践上。当然，作为一门完整的课程，对材料的本构关系及非线性问题的求解也要作必要的介绍。

工程中出现的材料非线性来自多方面的原因，例如，可能来自材料的弹塑性或某种形式的超弹性；也可能由于时间因素引起，如材料的粘性或动态瞬时特性。无论是一维、二维还是三维结构都可能存在以上类型的非线性，限于篇幅，本教材只能选其中几种进行讨论，并以弹塑性为主。

第一章回顾了弹性有限元方法，并简单介绍了几类非线性问题。

第二章对非线性方程组的求解方法进行研究，列出一些基本的求解方法，并讨论了非线性计算的迭代收敛准则。

第三章主要研究材料的本构关系，包括非线性弹性、弹塑性、粘弹性、粘塑性等，其中以弹塑性本构关系为主。

第四章对材料非线性有限元方法进行了介绍，重点研究了迭代求解的过程。本章还列出几种在非线性有限元分析中常遇到的特殊单元。

第五章给出一个二维的非线性有限元程序，对程序结构、主要变量和主要的子程序作了说明。

## 第二章 非线性代数方程组的解法

在非线性力学中，有多种类型的非线性问题，如材料非线性、几何非线性、接触非线性等。无论是哪一类非线性问题，经过有限元离散后，它们都归结为求解一个非线性代数方程组：

$$\psi_1(\delta_1 \ \delta_2 \ \cdots \ \delta_n) = 0$$

$$\psi_2(\delta_1 \ \delta_2 \ \cdots \ \delta_n) = 0$$

.....

$$\psi_n(\delta_1 \ \delta_2 \ \cdots \ \delta_n) = 0$$

其中  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  是未知量， $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  是  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  的非线性函数，现引用矢量记号

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \cdots \ \delta_n]^T$$

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_n]^T$$

上述方程组可表示为

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$$

还可以将它改写为

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta}) \equiv \mathbf{F}(\boldsymbol{\delta}) - \mathbf{R} \equiv \mathbf{K}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta} - \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{K}(\boldsymbol{\delta})$  是一个  $n \times n$  的矩阵，其元素  $k_{ij}$  是矢量  $\boldsymbol{\delta}$  的函数， $\mathbf{R}$  为已知矢量。在位移有限元中， $\boldsymbol{\delta}$  代表未知的结点位移， $\mathbf{F}(\boldsymbol{\delta})$  是等效结点力， $\mathbf{R}$  为等效结点荷载，方程  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$  表示结点的平衡方程。

在线弹性有限元中，线性代数方程组

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\delta} - \mathbf{R} = \mathbf{0}$$

可以毫无困难地求解，但对非线性方程组  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$  则不行。一般来说，难以求得精确解，通常采用数值解法，把非线性问题转化为一系列线性问题。为了使这一系列线性解收敛于非线性解，曾经有过许多方法，但这些解法都有一定的局限性。某一解法对某一类非线性问题有效，但对另一类问题可能不合适。因而，根据问题性质正确选用求解方法成为非线性有限元的一个极重要的问题。本章将介绍有限元分析中常见的各种求解非线性方程组的数值方法。

### 2.1 迭代法

前面已经提到，目前求解非线性方程组的方法一般为线性化方法。若对总荷载进行线性化处理，则称为迭代法。

#### 2.1.1 直接迭代法

对非线性方程组

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta} - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (2-1)$$

设其初始的近似解为  $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^0$ ，由此确定近似的  $\mathbf{K}$  矩阵

$$\mathbf{K}^0 = \mathbf{K}(\boldsymbol{\delta}^0)$$

根据式 (2-1) 可得出改进的近似解

$$\boldsymbol{\delta}^1 = (\mathbf{K}^0)^{-1} \mathbf{R}$$

重复这一过程，以第  $i$  次近似解求出第  $i+1$  次近似解的迭代公式为

$$\begin{aligned} K^i &= K(\delta^i) \\ \delta^{i+1} &= (K^i)^{-1} R \end{aligned} \quad (2-2)$$

直到

$$\Delta \delta^i = \delta^{i+1} - \delta^i \quad (2-3)$$

变得充分小，即近似解收敛时，终止迭代。

在迭代过程中,得到的近似解一般不会满足〈2-1〉式,即

$$\psi(\delta^i) \equiv K(\delta^i)\delta^i - R \neq 0$$

$\psi(\delta)$  作为对平衡偏离的一种度量，称为失衡力。

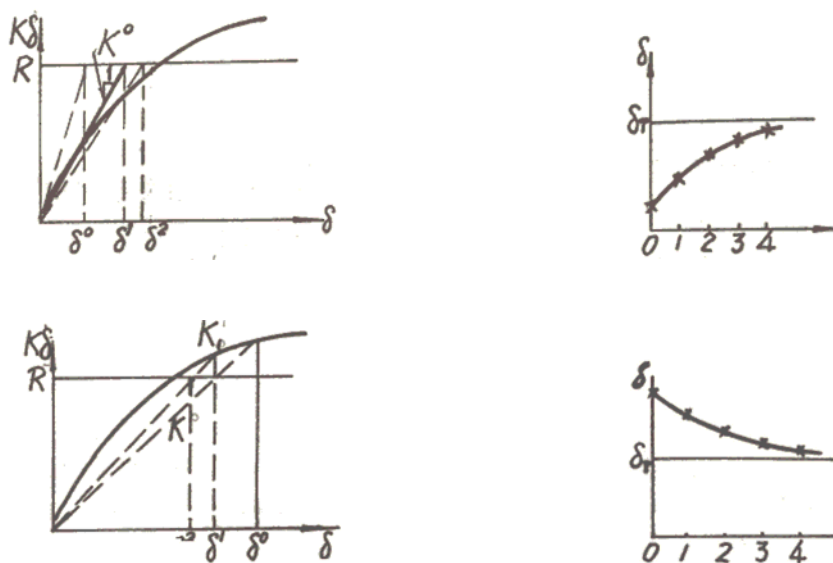


图 2-1  $F \sim \delta$  为凸曲线

图 2-2  $F \sim \delta$  为凹曲线

对于一个单变量问题的非线性方程，直接迭代法的计算过程如图 2-1 和图 2-2 所示，它们分别给出  $F \sim \delta$  为凸和凹曲线时的迭代过程。可以看出  $K(\delta)$  就是过曲线上点  $(\delta, F(\delta))$



与原点的割线斜率。对于单变量问题，这一迭代过程是收敛的，但对多自由度情况，由于未知量通过矩阵  $\mathbf{K}$  耦合，迭代过程可能不收敛。

### 2.1.2 Newton—Raphson 方法

Newton—Raphson 方法是求解非线性方程组

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta}) \equiv \mathbf{F}(\boldsymbol{\delta}) - \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (2-4)$$

的一个著名方法，简称 Newton 法。以下将介绍这种方法。

设  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta})$  为具有一阶导数的连续函数， $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^i$  是方程 (2-4) 的第  $i$  次近似解。若

$$\boldsymbol{\psi}^i = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta}^i) \equiv \mathbf{F}(\boldsymbol{\delta}^i) - \mathbf{R} \neq \mathbf{0}$$

希望能找到一个更好的、方程 (2-4) 的近似解为

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^{i+1} = \boldsymbol{\delta}^i + \Delta\boldsymbol{\delta}^i \quad (2-5)$$

将 (2-5) 代入 (2-4)，并在  $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^i$  附近按一阶 Taylor 级数展开，则  $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta})$  在  $\boldsymbol{\delta}^i$  处的线性近似公式为

$$\boldsymbol{\psi}^{i+1} = \boldsymbol{\psi}^i + \left(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\boldsymbol{\delta}}\right)^i \Delta\boldsymbol{\delta}^i$$

其中

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\boldsymbol{\delta}}\right)^i = \left(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\boldsymbol{\delta}}\right)_{\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\delta}^i}$$

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\boldsymbol{\delta}}\right) \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial\delta_1} \\ \frac{\partial}{\partial\delta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\delta_n} \end{Bmatrix} [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_n]$$

引入记号

$$\mathbf{K}_T^i = \mathbf{K}_T(\boldsymbol{\delta}^i) \equiv \left(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\boldsymbol{\delta}}\right)^i$$

假定  $\boldsymbol{\delta}^{i+1}$  为真实解，则由

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta}^{i+1}) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\delta}^i + \Delta\boldsymbol{\delta}^i) = \boldsymbol{\psi}^i + \mathbf{K}_T^i \Delta\boldsymbol{\delta}^i = \mathbf{0}$$

解出修正量  $\Delta\boldsymbol{\delta}^i$  为

$$\Delta\boldsymbol{\delta}^i = -(\mathbf{K}_T^i)^{-1} \boldsymbol{\psi}^i = (\mathbf{K}_T^i)^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{F}^i) \quad (2-6)$$

由于这样确定的  $\Delta\boldsymbol{\delta}^i$  仅考虑了 Taylor 级数的线性项，因而按式 (2-6) 和 (2-5) 求出的新解仍然是近似解。这样，Newton 法的迭代公式可归纳为

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\delta}^i &= -(\mathbf{K}_T^i)^{-1} \boldsymbol{\psi}^i = (\mathbf{K}_T^i)^{-1} (\mathbf{R} - \mathbf{F}^i) \\ \mathbf{K}_T^i &= \left(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\boldsymbol{\delta}}\right)^i = \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\delta}}\right)^i \\ \boldsymbol{\delta}^{i+1} &= \boldsymbol{\delta}^i + \Delta\boldsymbol{\delta}^i \end{aligned} \quad (2-7)$$

对于单变量的非线性问题，其迭代过程见图 2-3 和 2-4，可以看出  $K_T(\boldsymbol{\delta})$  是  $F \sim \boldsymbol{\delta}$  曲线上通过点  $(\boldsymbol{\delta} \quad F(\boldsymbol{\delta}))$  的切线斜率

Newton 法的收敛性是好的, 但对某些非线性问题, 如理想塑性和塑性软化问题, 在迭代过程中  $\mathbf{K}_T$  可能是奇异或病态的, 于是  $\mathbf{K}_T$  的求逆就会出现困难。为此, 可引入一个阻尼因子  $\eta$ , 使矩阵  $\mathbf{K}_T^i + \eta^i \mathbf{I}$  或者成为非奇异的, 或者使它的病态减弱。这儿  $\mathbf{I}$  为  $n \times n$  阶的单位矩阵。 $\eta^i$  的作用是改变矩阵  $\mathbf{K}_T^i$  主对角线元素不占优的情况。当  $\eta^i$  变大时, 收敛速度变



图 2-3

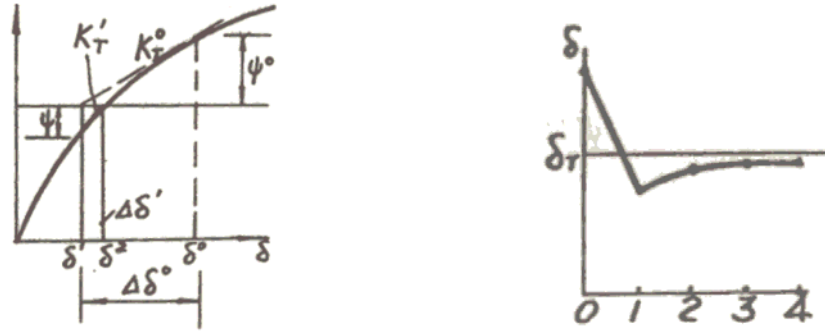


图 2-4

慢, 当  $\eta^i \rightarrow 0$  时, 收敛速度最快。引入  $\eta^i$  后, 将用下式代替 (2-6)

$$\Delta \delta^i = -(\mathbf{K}_T^i + \eta^i \mathbf{I})^{-1} \psi^i \quad (2-8)$$

### 2.1.3 修正的 Newton-Raphson 法

采用直接迭代法和 Newton 法求解非线性方程组时, 在迭代过程的每一步都需要重新计算  $\mathbf{K}_T^i$ 。如将 Newton 法迭代公式中的  $\mathbf{K}_T^i$  改用初始矩阵  $\mathbf{K}_T^0 = \mathbf{K}_T(\delta^0)$ , 就成了修正的 Newton-Raphson 法 (简称修正的 Newton 法)。此时, 仅第一步迭代需要完全求解一个线性方程组, 并将三角分解后的  $\mathbf{K}_T^0$  存贮起来, 以后的每一步迭代都采用公式

$$\Delta \delta^i = -(\mathbf{K}_T^0)^{-1} \psi^i \quad (2-9)$$

这样, 只需按式(2-9)右端的  $\psi^i$  进行回代即可。

修正 Newton 法的每一步迭代所用的计算时间较少, 但迭代的收敛速度降低。为了提高收敛速度, 可引入过量修正因子  $w^i$ 。在按 (2-9) 式求出  $\Delta \delta^i$  之后, 采用下式计算新解

$$\delta^{i+1} = \delta^i + w^i \Delta \delta^i \quad (2-10)$$

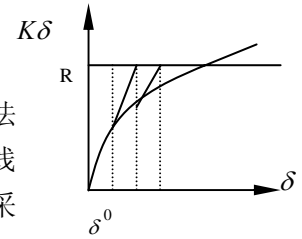


图 2-5

$w^i$  为大于 1 的正数。可以采用一维搜索的方法确定  $w^i$ ，此时将  $\Delta\delta^i$  看作  $n$  维空间中的搜索方向，希望在这一方向上找到一个更好的近似值，即使不能得到精确解（使  $\psi(\delta) = \theta$  的解），但可通过选择  $w^i$  使  $\psi(\delta)$  在搜索方向上的分量为零，即

$$(\Delta\delta^i)^T \psi(\delta^i + w^i \Delta\delta^i) = 0 \quad (2-11)$$

这是一个关于  $w^i$  的单变量非线性方程。

在应用修正的 Newton 法时，还可以在每经过若干次迭代后再重新计算一个新的  $K_T^0$ ，也可达到提高收敛速度的目的。

#### 2.1.4 拟 Newton 法

前面所谈的 Newton 法，每次迭代后需要重新计算一个新的矩阵  $K_T$ ，而修正的 Newton 法保持  $K_T^0$  不变。拟 Newton 法的主要特点是每次迭代后用一个简单的方法修正  $K$ ， $K$  的修正要满足以下的拟牛顿方程

$$K^{i+1}(\delta^{i+1} - \delta^i) = \psi(\delta^{i+1}) - \psi(\delta^i) \quad (2-12)$$

对于单变量情况，上式中的  $K^{i+1}$  是导数  $(\partial\psi/\partial\delta)_{\delta=\delta^i}$  的近似表达式，实际上就是割线劲度矩阵。由图 2-6 可知

$$\Delta\delta^0 = -(K^0)^{-1}\psi^0 = (K^0)^{-1}(R - F^0)$$

$$\delta^1 = \delta^0 + \Delta\delta^0$$

$$(K^1)^{-1} = \frac{\Delta\delta^0}{F^1 - F^0} = \frac{\delta^1 - \delta^0}{\psi^1 - \psi^0}$$

$$\Delta\delta^1 = (K^1)^{-1}(R - F^1)$$

-----

$$(K^{i+1})^{-1} = \frac{\Delta\delta^i}{\Delta\psi^i} = \frac{\delta^{i+1} - \delta^i}{\psi^{i+1} - \psi^i} \quad (2-13)$$

显然  $K^{i+1}$  就是相应于  $\Delta\delta^i = \delta^{i+1} - \delta^i$  与  $\Delta\psi^i = \psi^{i+1} - \psi^i$  的割线劲度矩阵。但实际上对于多维情况，无法由 (2-13) 式求出  $K^i$ 。我们可仿照位移的迭代公式来建立劲度矩阵逆矩阵的迭代公式：

$$(K^{i+1})^{-1} = (K^i)^{-1} + (\Delta K^i)^{-1} \quad (2-14)$$

那么只要由  $\Delta\delta^i$  和  $\Delta\psi^i$  求出  $(\Delta K^i)^{-1}$ ，就可以确定  $(\Delta K^{i+1})^{-1}$ 。这儿，修正矩阵  $(\Delta K^i)^{-1}$  的秩  $m \geq 1$ ，通常取  $m=1$  或 2。对于秩为  $m$  的  $N \times N$  阶矩阵，总可以将它表示为  $AB^T$  的形式， $A$  和  $B$  均为  $N \times m$  阶矩阵。得到  $(K^{i+1})^{-1}$  后，再由它求出  $\Delta\delta^i$

$$\Delta\delta^i = (K^{i+1})^{-1} \Delta\psi^i \quad (2-15)$$

(1) 秩 1 算法

修正矩阵  $(\Delta K^i)^{-1}$  表示为

$$(\Delta K^i)^{-1} = AB^T \quad (2-16)$$

其中  $A$  和  $B$  均为  $N \times 1$  阶向量。将 (2-16) 式代入 (2-14) 后，再将 (2-14) 式代入 (2-15) 式可得

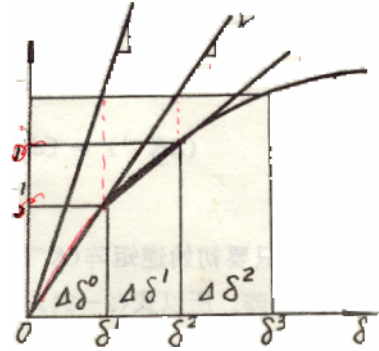


图 2-6 拟 Newton 法

$$AB^T \Delta \psi^i = \Delta \delta^i - (K^i)^{-1} \Delta \psi^i$$

若  $B^T \Delta \psi^i \neq 0$ ，则

$$A = [\Delta \delta^i - (K^i)^{-1} \Delta \psi^i] / B^T \Delta \psi^i \quad (2-17)$$

将 (2-17) 式代入 (2-16) 得

$$(\Delta K^i)^{-1} = \xi [\Delta \delta^i - (K^i)^{-1} \Delta \psi^i] B^T \quad (2-18)$$

式中

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{B^T \Delta \psi^i} & \text{当 } \Delta \psi^i \neq 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \Delta \psi^i = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (2-19)$$

若取  $B^T = (\Delta \psi^i)^T (K^i)^{-1}$ ，由 (2-18) 和 (2-19) 式得

$$(\Delta K^i)^{-1} = [\Delta \delta^i - (K^i)^{-1} \Delta \psi^i] \frac{(\Delta \psi^i)^T (K^i)^{-1}}{(\Delta \psi^i)^T (K^i)^{-1} \Delta \psi^i} \quad (\text{当 } \Delta \psi^i \neq 0 \text{ 时}) \quad (2-20)$$

根据上式和式 (2-14) 求出的  $(K^{i+1})^{-1}$  是不对称的，因而式 (2-20) 是非对称秩 1 算法。

若取  $B = \Delta \delta^i - (K^i)^{-1} \Delta \psi^i$ ，由 (2-18) 和 (2-19) 式可得

$$(\Delta K^i)^{-1} = [\Delta \delta^i - (K^i)^{-1} \Delta \psi^i] \frac{[\Delta \delta^i - (K^i)^{-1} \Delta \psi^i]^T}{[\Delta \delta^i - (K^i)^{-1} \Delta \psi^i]^T \Delta \psi^i} \quad (\text{当 } \Delta \delta^i \neq (K^i)^{-1} \Delta \psi^i \text{ 时}) \quad (2-21)$$

可以看出，只要初始逆矩阵  $(K^0)^{-1}$  是对称的，那么按式 (2-21) 和 (2-14) 求出的  $(K^{i+1})^{-1}$  总是对称矩阵。所以式 (2-21) 是对称秩 1 算法。

## (2) 秩 2 算法

一个  $N \times N$  阶的秩 2 矩阵，总可以表示为

$$(\Delta K^i)^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^T \\ B_2^T \end{bmatrix} = A_1 B_1^T + A_2 B_2^T \quad (2-22)$$

式中  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $B_1$  和  $B_2$  均为  $N \times 1$  维向量。将上式代入 (2-14)，再代入 (2-15) 得

$$A_1 B_1^T \Delta \psi^i + A_2 B_2^T \Delta \psi^i = \Delta \delta^i - (K^i)^{-1} \Delta \psi^i \quad (2-23)$$

为满足 (2-23) 式，可取

$$A_1 = \frac{\Delta \delta^i}{B_1^T \Delta \psi^i} \quad A_2 = \frac{(K^i)^{-1} \Delta \psi^i}{B_2^T \Delta \psi^i}$$

代回 (2-22) 式得

$$(\Delta K^i)^{-1} = \xi_1 \Delta \delta^i B_1^T - \xi_2 (K^i)^{-1} \Delta \psi^i B_2^T \quad (2-24)$$

其中

$$\xi_1 = \begin{cases} \frac{1}{B_1^T \Delta \psi^i} & \text{当 } \Delta \psi^i \neq 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \Delta \psi^i = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (2-25)$$

$$\xi_2 = \begin{cases} \frac{1}{\mathbf{B}_2^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i} & \text{当 } \Delta \boldsymbol{\psi}^i \neq \mathbf{0} \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \Delta \boldsymbol{\psi}^i = \mathbf{0} \text{ 时} \end{cases} \quad (2-26)$$

为了使它具有更普遍的意义，考虑作以下的变换

$$\overline{\mathbf{B}}_1^T = \frac{\mathbf{B}_1^T}{\mathbf{B}_1^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i} \quad \overline{\mathbf{B}}_2^T = \frac{\mathbf{B}_2^T}{\mathbf{B}_2^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i}$$

$$\text{则显然有 } \overline{\mathbf{B}}_1^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i = \overline{\mathbf{B}}_2^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i = 1 \quad (2-27)$$

于是式 (2-24) 成为

$$(\Delta \mathbf{K}^i)^{-1} = \Delta \boldsymbol{\delta}^i \overline{\mathbf{B}}_1^T - (\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i \overline{\mathbf{B}}_2^T \quad (2-28)$$

引入参数  $\beta$ ，将  $\overline{\mathbf{B}}_1^T$  和  $\overline{\mathbf{B}}_2^T$  取为如下的组合形式

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}}_1^T = & [1 + \beta(\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i] \frac{(\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T}{(\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i} - \beta(\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1} \\ & ( (\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i \neq 0 ) \end{aligned} \quad (2-29)$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{B}}_2^T = & [1 - \beta(\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i] \frac{(\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1}}{(\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i} + \beta(\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T \\ & ( (\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i \neq 0 ) \end{aligned} \quad (2-30)$$

显然，这样选择的  $\overline{\mathbf{B}}_1^T$  和  $\overline{\mathbf{B}}_2^T$  满足 (2-27) 式。现将 (2-29) 和 (2-30) 代入 (2-28) 式得

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{K}^i)^{-1} = & \frac{\Delta \boldsymbol{\delta}^i (\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T}{(\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i} - \frac{(\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i (\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1}}{(\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i} + \\ & + \beta [(\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i \frac{\Delta \boldsymbol{\delta}^i (\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T}{(\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i} + (\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i \frac{(\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i (\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1}}{(\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i} \\ & - \Delta \boldsymbol{\delta}^i (\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1} - (\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i (\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T] \end{aligned} \quad (2-31)$$

可以看出，只要初始逆矩阵  $(\mathbf{K}^0)^{-1}$  是对称的，那么按 (2-14) 和 (2-31) 式得到的  $(\mathbf{K}^{i+1})^{-1}$  总是对称矩阵，因而 (2-31) 式是对称的秩 2 算法。

如令式 (2-31) 中的  $\beta=0$ ，便得到 DFP (Davidon-Fletcher-Powell) 公式

$$(\Delta \mathbf{K}^i)^{-1} = \frac{\Delta \boldsymbol{\delta}^i (\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T}{(\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i} - \frac{(\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i (\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1}}{(\Delta \boldsymbol{\psi}^i)^T (\mathbf{K}^i)^{-1} \Delta \boldsymbol{\psi}^i} \quad (2-32)$$

如令  $\beta = ((\Delta \boldsymbol{\delta}^i)^T \Delta \boldsymbol{\psi}^i)^{-1}$ ，可得 BFS (Broyden-Fletcher-shanno) 公式

$$\begin{aligned}
(\Delta K^i)^{-1} = & (1 + \frac{(\Delta \psi^i)^T (K^i)^{-1} \Delta \psi^i}{(\Delta \delta^i)^T \Delta \psi^i}) \frac{\Delta \delta^i (\Delta \delta^i)^T}{(\Delta \delta^i)^T \Delta \psi^i} + \\
& + \frac{\Delta \delta^i (\Delta \psi^i)^T (K^i)^{-1} + (K^i)^{-1} \Delta \psi^i (\Delta \delta^i)^T}{(\Delta \delta^i)^T \Delta \psi^i}
\end{aligned} \quad (2-33)$$

式 (2-20)、(2-21)、(2-32) 和 (2-33) 中的任一个与式 (2-14)、(2-15) 联立, 便构成解非线性方程组的拟 Newton 法。实践表明, BFS 的秩 2 算法是目前最成功的算法之一, 它具有较好的数值稳定性。

从以上迭代法的计算过程可以看出, 随着迭代次数的增加, 失衡力  $\psi^i = K^i \delta^i - R$  逐渐减小, 并趋于平衡。可见迭代法就是用总荷载作用下不平衡的线性解去逼近平衡的非线性解, 迭代的过程就是消除失衡力的过程。对于不同的迭代方法, 这一过程的快慢也就是收敛速度是不同的。一般来说, Newton 法最快, 拟 Newton 法次之, 修正的 Newton 法最慢。理论上可证明, Newton 法的收敛速度为二次, 修正的 Newton 法收敛速度只有一次, BFS 秩 2 拟 Newton 法的收敛速度介于一次和二次之间。不过, 各种方法的效率不仅与收敛速度有关, 还与每一步迭代所需的计算量有关。Newton 法每一步的计算量最大, 拟 Newton 法次之, 修正 Newton 法最小。因而对于某个具体问题, 往往需要进行数值实验, 才能判断哪个方法较高。一般来说, 不同问题可选用不同方法, 究竟用哪一种? 与所研究问题的性质、计算规模及容许误差等因素有关。

## 2.2 增量法

在用线性方法求解非线性方程组时, 若对荷载增量进行线性化处理, 则称增量法。它的基本思想是将荷载分成许多小的荷载部分 (增量), 每次施加一个荷载增量。此时, 假定方程是线性的, 劲度矩阵  $K$  为常矩阵。对不同级别的荷载增量,  $K$  变化的。这样, 对每级增量求出位移增量  $\Delta \delta$ , 对它累加, 就可得到总位移。实际上就是以一系列的线性问题代替了非线性问题。

### 2.2.1 Euler 法

设  $\bar{R}$  为总荷载, 引入参数  $\lambda$  ——荷载因子, 令  $R = \lambda \bar{R}$ , 则非线性方程组成为

$$\psi(\delta, \lambda) = F(\delta) - R = F(\delta) - \lambda \bar{R} = 0 \quad (2-34)$$

问题成为对一个任意给定的  $\lambda$  ( $\lambda \geq 0$ ), 求  $\delta = \delta(\lambda)$ 。现设  $\delta$  是对应于  $\lambda$  的解, 而  $\delta + \Delta \delta$  是对应于  $\lambda + \Delta \lambda$  的解, 则有

$$\psi(\delta, \lambda) = \psi(\delta + \Delta \delta, \lambda + \Delta \lambda) = 0 \quad (2-35)$$

对上式按 Taylor 级数展开,

$$\psi(\delta + \Delta \delta, \lambda + \Delta \lambda) = \psi(\delta, \lambda) + \frac{\partial \psi}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \Delta \lambda + \dots$$

略去高次项, 令  $K_T(\delta, \lambda) = \frac{\partial \psi}{\partial \delta}$ , 并注意  $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\bar{R}$  和式 (2-34), 可得

$$\Delta \delta = K_T^{-1} \bar{R} \Delta \lambda \quad (2-36)$$

这就是增量法的基本公式, 现设

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_M = 1$$

将  $\lambda$  分成  $M$  个增量

$$\Delta\lambda_m = \lambda_m - \lambda_{m-1} \quad \sum_{m=1}^M \Delta\lambda_m = 1 \quad (2-37)$$

此时，第  $m$  级荷载增量为

$$\Delta R_m = R_m - R_{m-1} = \Delta\lambda_m \bar{R} \quad (2-38)$$

迭代公式成为

$$\begin{aligned} \Delta\delta_m &= K_T^{-1}(\delta_{m-1} \quad \lambda_{m-1}) \bar{R} \Delta\lambda_m = K_{T,m-1}^{-1} \Delta R_m \\ \delta_m &= \delta_{m-1} + \Delta\delta_m \end{aligned} \quad (2-39)$$

初始值可取  $\lambda_0 = 0$ ， $R_0 = 0$ ， $\delta_0 = 0$ 。 $\Delta\lambda_m$  一般可取等分值。根据位移增量  $\Delta\delta_m$ ，可求出应变增量  $\Delta\varepsilon_m$  和应力增量  $\Delta\sigma_m$ ，则

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{m-1} + \Delta\varepsilon_m \quad (2-40)$$

$$\sigma_m = \sigma_{m-1} + \Delta\sigma_m \quad (2-41)$$

$K_{T,0}$  为初始切线劲度矩阵， $K_{T,m}$  是对应于第  $m$  级荷载开始时应力状态  $\sigma_m$  的切线劲度矩阵，式 (2-39) 是基本的增量法，又称 Euler 法，对一维问题，其求解过程如图 2-7 所示。

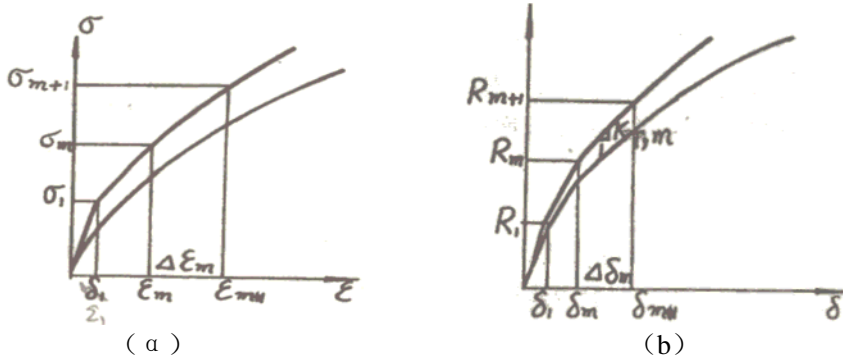


图 2-7

从图 2-7 可以看出，每步计算都会引起偏差，使折线偏离曲线，解答产生漂移，随着求解步数的增加，由于偏差的积累使最后的解答离开真解较远，从而降低了计算精度，为此须对这一方法做些改进。

### 2.2.2 修正的 Euler 法

将由 Euler 法第  $m$  级荷载增量求得的  $\delta_m$  作为中间结果，记为  $\delta_m'$ ，它与前一级结果  $\delta_{m-1}$  加权平均为

$$\delta_{m-\theta} = \theta\delta_{m-1} + (1-\theta)\delta_m' \quad (2-42)$$

式中  $\theta$  为加权系数，由  $\delta_{m-\theta}$  确定  $K_{T,m-\theta}$ ，并代替式 (2-39) 中的  $K_{T,m-1}$  则得

$$\begin{aligned} \Delta\delta_m &= K_{T,m-\theta}^{-1} \Delta R_m \\ \delta_m &= \delta_{m-1} + \Delta\delta_m \end{aligned} \quad (2-43)$$

上式就是修正 Euler 法的基本公式，实际计算步骤为

(1) 由荷载增量

$$\Delta R_{m-\theta} = (1-\theta)(R_m - R_{m-1}) \quad (2-44)$$

按下式计算中间位移  $\delta_{m-\theta}$

$$\begin{aligned}\Delta\delta_{m-\theta} &= K_{T,m-1}^{-1} \Delta R_{m-\theta} \\ \delta_{m-\theta} &= \delta_{m-1} + \Delta\delta_{m-\theta}\end{aligned}\quad (2-45)$$

- (2) 计算相应于  $\delta_{m-\theta}$  的劲度矩阵  $K_{T,m-\theta}$
  - (3) 施加全部荷载增量  $\Delta R_m$ ，按式 (2-43) 计算  $\delta_m$
- 单变量的修正的 Euler 求解过程见图 2-8。
- 当  $\theta=0.5$  时，修正的 Euler 法就是 Runge-Kutta 法。

## 2.3 混合法

如对同一非线性方程组混合使用增量法和迭代法，则称为混合法或逐步迭代法。一般在总体上采用 Euler 增量法，而在同一级荷载增量内，采用迭代法。

### 2.3.1 Euier--Newton 法

在增量步内采用 Newton 迭代法。现以  $\delta_m^0$  和  $\delta_m$  分别表示第  $m$  级荷载增量时  $\delta$  的初值和终值，以  $R_m$  表示第  $m$  级增量时  $R$  的终值，则由式 (2-7) 得第  $m$  增量步的迭代公式

$$\begin{aligned}\delta_m^0 &= \delta_{m-1} \\ R_m &= \lambda_m \bar{R} \\ \Delta\delta_m^i &= (K_{T,m-1}^i)^{-1} (\lambda_m \bar{R} - F_m^i) = (K_{T,m-1}^i)^{-1} (\Delta\lambda_m \bar{R} - \psi_m^i) \\ \delta_m^{i+1} &= \delta_m^i + \Delta\delta_m^i\end{aligned}\quad (2-46)$$

逐步迭代过程可由图 2-9 所示的一维问题清楚地看出。

如果每一增量步内只迭代一次，此时

$$\begin{aligned}\delta_m^1 &= \delta_m \\ \Delta\delta_m^0 &= \Delta\delta_m\end{aligned}$$

则对第  $m$  增量步有

$$\begin{aligned}\Delta\delta_m &= (K_{T,m-1}^0)^{-1} (\Delta\lambda_m \bar{R} - \psi_m^0) \\ \delta_m &= \delta_{m-1} + \Delta\delta_m\end{aligned}\quad (2-47)$$

这实际上是对 Euler 法所产生的，与真解偏差的修正，因而称为自修正方法。



当前一增量步的计算结果精确时，式（2-34）成立，则自修正方法回到 Euler 法。

### 2.3.2 Euler-修正 Newton 法

在每一增量步内，采用修正的 Newton 法，取其初始的切线劲度矩阵作为这一增量步内不变的劲度矩阵，则由于

$$\mathbf{K}_{T,m-1}^i = \mathbf{K}_{T,m-1}^0$$

所以，在第 m 增量步内

$$\begin{aligned} \delta_m^0 &= \delta_{m-1} & \mathbf{R}_m &= \lambda_m \bar{\mathbf{R}} \\ \Delta \delta_m^i &= (\mathbf{K}_{T,m-1}^0)^{-1} (\lambda_m \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{F}_m^i) = (\mathbf{K}_{T,m-1}^0)^{-1} (\Delta \lambda_m \bar{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\psi}_m^i) \\ \delta_m^{i+1} &= \delta_m^i + \Delta \delta_m^i \end{aligned} \quad (2-48)$$

按同样的思路，还可给出 Euler-拟 Newton 法。

## 2.4 迭代收敛准则及增量法的步长选择

在采用迭代法或混合法求解非线性方程组时，必须给出迭代的收敛准则，否则就无法终止迭代计算。收敛准则取得不合适，会使计算结果不精确或多费机时。目前，在非线性有限元计算中常用的迭代收敛准则有以下三种

### 1. 位移准则

$$\|\Delta \delta^i\| \leq \alpha_d \|\delta^i\| \quad (2-49)$$

式中符号  $\|\cdot\|$  表示范数，它的定义是

$$\|\Delta \delta\| = (\Delta \delta^T \Delta \delta)^{1/2} \quad (2-50)$$

$$\|\delta\| = (\delta^T \delta)^{1/2} \quad (2-51)$$

$\alpha_d$  为位移收敛容差，是事先指定的一个很小的正数，通常取

$$0.1\% \leq \alpha_d \leq 5\%$$

当材料硬化明显时，位移增量的微小变化将引起失衡力的很大偏差。还有，当相邻两次迭代得到的位移增量范数之比跳动较大时，会使一个应当能收敛的问题判定为不收敛。对于这两种情况，不能使用位移收敛准则。

### 2. 失衡力准则

$$\|\boldsymbol{\psi}(\delta^i)\| \leq \alpha_q \|\mathbf{R}\| \quad (2-52)$$

$\alpha_q$  是失衡力收敛容差。当失衡力很小时，可认为式（2-1）满足，逼近了真解。

当材料表现出明显软化时，或材料接近理想塑性时，失衡力的微小变化将引起位移增量的很大偏差，此时不能采用失衡力准则。

### 3. 能量准则

这是一种比较好的收敛准则，因为它同时考虑了位移增量和失衡力。能量准则是把每次迭代后的内能增量与初始内能增量相比较。内能增量指失衡力在位移槽量上所做的功。这一准则可表示为

$$(\Delta \delta^i)^T \boldsymbol{\psi}^i \leq \alpha_e ((\Delta \delta^0)^T \boldsymbol{\psi}^0) \quad (2-53)$$

$\alpha_e$  是能量收敛容差。

在用增量法或混合法求解非线性方程组时，需要合理选择荷载增量的步长。步长太大使计算不收敛，步长太短则增加了计算时间。

由于增量法是一种线性化方法，应当根据问题的非线性程度来选择合理的步长。一般来说，随着非线性程度的增大，步长要减小。

P. G. Bergan 等提出根据不同荷载阶段的结构劲度，计算增量步长的方法。初始（线弹性）劲度可用下式度量

$$S_1^* = \frac{\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1}{\boldsymbol{\delta}_1^T \mathbf{R}_1} \quad (2-54)$$

第  $m$  增量步的劲度用式（2-55）度量

$$S_m^* = \frac{\Delta \mathbf{R}_m^T \Delta \mathbf{R}_m}{\Delta \boldsymbol{\delta}_m^T \Delta \mathbf{R}_m} \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2-55)$$

第  $m$  增量步的劲度参数则表示为

$$S_m = S_m^* / S_1^* \quad (2-56)$$

由于

$$\mathbf{R}_1 = \lambda_1 \bar{\mathbf{R}} \quad \Delta \mathbf{R}_m = \Delta \lambda_m \bar{\mathbf{R}}$$

由式（2-54）～（2-56）可得

$$S_m = \frac{\Delta \lambda_m}{\lambda_1} \frac{\boldsymbol{\delta}_1^T \bar{\mathbf{R}}}{\Delta \boldsymbol{\delta}_m^T \bar{\mathbf{R}}} \quad (2-57)$$

这样就可按下面的递推公式选择荷载增量的步长

$$\Delta \lambda_m = \Delta \lambda_{m-1} \frac{\Delta \bar{S}}{|S_{m-2} - S_{m-1}|} \quad (m \geq 3) \quad (2-58)$$

式中  $\Delta \bar{S}$  是劲度参数的变化值，事先给出，可在 0.05~0.2 范围内选取。如果给定进入非线性状态后的第一个荷载增量因子  $\Delta \lambda_2$ ，就可按上式确定  $\Delta \lambda_3$ ， $\Delta \lambda_4$ ，……。

### 第三章 小变形问题的基本方法

#### 3.1 小变形问题的几何方程、平衡微分方程

##### 3.1.1 应变和几何方程

变形体内任一点的位移为

$$\mathbf{f} = [u \quad v \quad w]^T$$

该点的应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$$

这是工程应变的表达式，它也可以用一个对称的二阶应变张量表示

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{yz} \quad 2\varepsilon_{zx}]^T$$

工程应变和应变张量之间的关系是

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{xx} & \varepsilon_y &= \varepsilon_{yy} & \varepsilon_z &= \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} & \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} & \gamma_{zx} &= 2\varepsilon_{zx} \end{aligned} \quad (3-1)$$

根据弹性力学理论，在小变形情况下，位移分量和工程应变分量之间的关系可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{f} \quad (3-2)$$

式中， $\mathbf{L}$  是微分算子

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (3-3)$$

式 (3-2) 是变形体内各点的几何关系。在它的边界上也要满足几何条件，这就是在位移边界  $S_u$  上，应当满足位移边界条件

$$\mathbf{f}|_{S=S_u} = \bar{\mathbf{f}} = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}]^T \quad (3-4)$$

##### 3.1.2 应力和平衡方程

变形体内任一点的应力为

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

这是工程上常用的表示， $\boldsymbol{\sigma}$  也可以用一个对称的二阶应力张量表示

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}]^T$$

两者的关系是

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{xx} & \sigma_y &= \sigma_{yy} & \sigma_z &= \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} &= \sigma_{xy} & \tau_{yz} &= \sigma_{yz} & \tau_{zx} &= \sigma_{zx} \end{aligned} \quad (3-5)$$

变形体内部的应力受平衡条件的制约，设作用在变形体上的体力为

$$\mathbf{p} = [X \quad Y \quad Z]^T \quad (3-6)$$

作用在变形体面力边界  $S_\sigma$  上的面力为

$$\bar{\mathbf{p}} = [\bar{X} \quad \bar{Y} \quad \bar{Z}]^T \quad (3-7)$$

那么物体内部任一点的平衡方程为

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3-8)$$

在面力边界  $S_\sigma$  上, 应满足应力边界条件

$$\mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})_{s_\sigma} = \bar{\mathbf{p}} \quad (3-9)$$

其中  $\mathbf{n}$  是方向余弦矩阵

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix}^T \quad (3-10)$$

根据虚功原理, 可以得出与式 (3-8) 和 (3-9) 等价的虚功方程

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{f}^T \mathbf{p} dV + \int_{s_\sigma} \delta \mathbf{f}^T \bar{\mathbf{p}} dS \quad (3-11)$$

式中  $\delta \mathbf{f}$  是虚位移矢量, 在位移边界  $S_u$  上应满足  $\delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$ ,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  是与虚位移相应的虚应变矢量

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \delta \mathbf{f} \quad (3-12)$$

虚功方程是一个以积分形式表示的平衡方程, 不仅对连续可导的函数成立, 对广义函数也是成立的, 因而由虚功方程导出有限元的支配方程, 可降低对位移函数 (或其它场函数) 的光滑性要求。例如, 在求解以位移为基本未知量的微分方程时, 要求位移函数是二阶连续可导的。如果从虚功方程出发只要求位移连续和分片可导 (即分片光滑)。这是有限元方法的优点。

### 3.1.3 弹性材料的本构关系

前面讨论的几何方程和平衡方程对小变形问题都是正确的, 而不管材料是弹性的还是非弹性的。现在开始研究材料的力学性质, 也就是应力与应变之间的关系, 即材料的本构关系或本构方程。本构关系一般是从实验和经验中观察到的特性出发, 在某些理论的假设下得出的, 它只是反映了材料在某些方面的性态, 因而是描述真实材料的一种理想化的模型。

物体在外力作用下产生变形和应力。在应力水平不高的情况下, 当移去外力后, 变形和应力也随之消失, 物体的这种性质称为弹性。对理想的弹性材料, 其内部各点的应变和应力存在一一对应的关系。变形与加载过程无关, 只决定于当前的应力, 这就假设了变形和应力都是瞬时产生的, 没有时间上的先后。

最简单的弹性模型是线弹性模型, 此时应力和应变之间的关系是线性关系

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-13)$$

弹性矩阵  $\mathbf{D}$  是  $6 \times 6$  的对称矩阵。对于一般的线弹性材料,  $\mathbf{D}$  中有 21 个独立的弹性常数。对正交各向异性材料, 有 9 个独立常数。横观各向同性材料有 5 个。对各向同性材料,  $\mathbf{D}$  有 2 个独立常数, 杨氏模量  $E$  和泊松比  $\mu$ 。 $\mathbf{D}$  的表达式为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & & & & & \\ \lambda & \lambda + 2G & & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & & & \\ 0 & 0 & 0 & G & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad \text{对称} \quad (3-14)$$

式中  $\lambda$ 、 $G$  称为拉密系数， $G$  又称剪切模量

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (3-15)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3-16)$$

$\mathbf{D}$  矩阵还可以表示为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & & & & & \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & & & & \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & & & \\ 0 & 0 & 0 & G & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad \text{对称} \quad (3-17)$$

其中  $K$  称为弹性的体积模量

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (3-18)$$

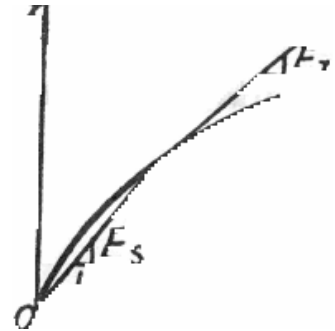
更一般的弹性模型是非线性弹性模型，此时应力和应变之间存在非线性关系

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_s(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-19)$$

其中  $\mathbf{D}_s(\boldsymbol{\varepsilon})$  是  $6 \times 6$  的材料系数矩阵，其中的元素是  $\boldsymbol{\varepsilon}$  或  $\boldsymbol{\sigma}$  的函数。对于各向同性的非线性弹性体， $\mathbf{D}_s$  与 (3-14) 或 (3-17) 中  $\mathbf{D}$  的形式相同，但其中的  $E$  和  $\mu$  是应变或应力的函数，现分别记为  $E_s$  和  $\mu_s$ 。对于单向应力状态（图 3.1）， $E_s$  和  $\mu_s$  分别是割线杨氏模量和割线泊松比，因而  $\mathbf{D}_s$  称为非线性弹性的割线弹性矩阵。如果采用增量形式的本构关系，式 (3-19) 成为

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_T d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-20)$$

$\mathbf{D}_T$  为切线弹性矩阵，其中的元素  $E$  和  $\mu$  分别用切线杨氏模量  $E_T$  和切线泊松比  $\mu_T$  表示，它们也是应变状态  $\boldsymbol{\varepsilon}$  或应力状态  $\boldsymbol{\sigma}$  的函数，与历史无关。



以上直接按定义建立应力和应变之间的函数关系，这一方法称 **Cauchy** 方法。还有一种 **Green** 方法是根据应变能来导出本构关系。设变形物体具有势能  $W$ （弹性应变能），此时的应变为  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ，应力为  $\boldsymbol{\sigma}$ 。对于应变的微小变化  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ，相应的应变能改变是

$$\delta W = \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (3-21)$$

此外，从数学上，还可将  $\delta W$  表示为

$$\delta W = \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3-22)$$

由以上两式得出用应变能  $W$  表示的本构关系：

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3-23)$$

如果取  $W$  为应变分量的正定二次齐次函数

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-24)$$

式中矩阵  $\mathbf{D}$  为正定的弹性矩阵，将（3-24）式代入（3-23）式，就得到线弹性模型的本构关系（3-13）。可见，正定的二次齐次应变能函数对应于线弹性体，对一般的非线性弹性材料，当介质是各向同性时， $W$  为应变张量不变量的函数，其具体形式可由实验确定。

以下我们将说明如何给出非线性弹性材料的割线弹性矩阵  $\mathbf{D}_s$ 。对于一维问题，由式（3-23）可给出非线性弹性本构关系为

$$\sigma = \frac{dW}{d\varepsilon} = E_0 g(\varepsilon) \quad (3-25)$$

式中  $E_0$  为初始弹模（图 3-2）， $g(\varepsilon)$  为  $\varepsilon$  的函数，可理解为割线弹模  $E$  与  $E_0$  之比

$$g(\varepsilon) = E\varepsilon/E_0$$

这儿  $E$  就是式（3-19）中的  $\mathbf{D}_s$ 。 $g(\varepsilon)$  可由实验确定。

对于二维和三维情况，可以根据塑性力学形变理论的成果来确定  $\mathbf{D}_s$  或  $\mathbf{D}_T$ 。当材料为线弹性各向同性时，广义虎克定律可表示为

$$\varepsilon_m = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_m = \frac{1}{3K} \sigma_m \quad (3-26)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2G} \mathbf{s} \quad (3-27)$$

式中  $\sigma_m$ ， $\varepsilon_m$  分别是应力球张量和应变球张量

$$\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$$

$$\varepsilon_m = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$$

$\mathbf{s}$  和  $\mathbf{e}$  分别是应力偏量和应变偏量

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ s_{xy} \\ s_{yz} \\ s_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_m \\ \sigma_y - \sigma_m \\ \sigma_z - \sigma_m \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m \\ \varepsilon_y - \varepsilon_m \\ \varepsilon_z - \varepsilon_m \\ \gamma_{xy}/2 \\ \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 \end{Bmatrix}$$

引入应力强度 $\bar{\sigma}$ 和应变强度 $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (3-28)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \quad (3-29)$$

由式 (3-27) 得

$$\bar{\sigma} = 3G\bar{\varepsilon} \quad (3-30)$$

将式 (3-30) 代入 (3-27) 得

$$\mathbf{s} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\varepsilon}} \mathbf{e} \quad (3-31)$$

式 (3-31) 是在线弹性情况 (即  $\mathbf{e}$  和  $\mathbf{s}$  满足式 (3-27)) 下推出的。对于各向同性的非线性情况, 式 (3-27) 和 (3-30) 不满足, 但式 (3-26) 和式 (3-31) 仍然成立, 而且  $\bar{\sigma}$  和  $\bar{\varepsilon}$  之间存在单值函数关系

$$\bar{\sigma} = \Phi(\bar{\varepsilon}) \quad (3-32)$$

$\Phi(\bar{\varepsilon})$  为  $\bar{\varepsilon}$  的单值函数, 对于各种应力状态, 式 (3-32) 总是成立的。但对不同材料,  $\Phi(\bar{\varepsilon})$  的具体形式不同。 $\Phi(\bar{\varepsilon})$  可由试验确定, 对于简单拉伸,  $\bar{\sigma}$  和  $\bar{\varepsilon}$  之间的关系就是单轴  $\sigma$  和  $\varepsilon$  的关系。

现今

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \end{bmatrix}^T \quad (3-33)$$

$$\mathbf{I}' = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3-34)$$

现有

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I}' \quad (3-35)$$

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}' - \varepsilon_m \mathbf{I}' \quad (3-36)$$

将式 (3-35) 和 (3-36) 代入 (3-31), 得

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-37)$$

$\mathbf{D}$  为弹性矩阵,

$$\mathbf{D}_p = \left( \frac{E}{3(1+\mu)} - \frac{2\Phi(\bar{\varepsilon})}{9\bar{\varepsilon}} \right) \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ -1 & 2 & & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

式 (3-37) 为全量形式的非线性弹性本构方程, 增量形式的非线性弹性本构方程可表示为式 (3-20), 其中

$$\mathbf{D}_T = \mathbf{D} - \mathbf{D}_p(\bar{\varepsilon}) \quad (3-39)$$

$$\mathbf{D}_p(\bar{\varepsilon}) = \left( \frac{E}{3(1+\mu)} - \frac{2d\Phi(\bar{\varepsilon})}{9d\bar{\varepsilon}} \right) \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ -1 & 2 & & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

对称

式中

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)} \quad (3-41)$$

## 3.2 弹塑性小变形本构关系

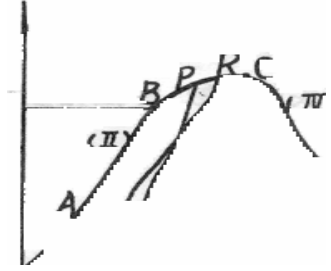
### 3.2.1 概述

大部分材料属于弹塑性材料, 特别是当应力水平较高时。通过岩石的单轴压缩试验, 可以了解弹塑性小变形分析的一些特点。图 3-3 所示为一般岩石在普通室温和大气压下进行单轴压缩试验的典型曲线。根据曲线的形状, 可将它分为四个区。

第 (I) 区为  $OA$  段, 压应力  $\sigma$  从零开始增大, 随着变形的增加, 产生同样大小的应变所需的应力增量越来越大, 显示出“锁紧”效应, 这是由于岩石中存在的孔隙和裂缝被逐步压紧闭合的缘故。

第 (II) 区为  $AB$  段, 应力  $\sigma$  和应变  $\varepsilon$  之间接近直线关系, 直线的斜率就是岩石的弹模  $E$ 。在 (I)、(II) 区发生卸荷时, 变形可以完全恢复, 不产生塑性变形。因而  $OB$  段为弹性变形阶段,  $\sigma_B$  为弹性极限 (或屈服应力  $\sigma_s$ )。

第 (III) 区为  $BC$  段, 此时岩石进入塑性状态。在该段内任一点 (例如  $P$  点) 卸荷时, 应力应变关系曲线将沿  $PQ$  下降, 产生塑性应变  $OQ$ 。如此时再加载, 曲线沿  $QR$  上升。 $PQ$  和  $QR$  基本上与  $AB$  平行。在达到  $R$  点之前, 岩石只产生弹性应变, 而无塑性应变, 这相当于弹性极限从  $\sigma_B$  提高到  $\sigma_R$ , 此种现象称为应变强化 (硬化)。 $C$  为最高点,  $\sigma_C$  称压缩强度。对一般岩石,  $\sigma_C = (1.5 \sim 2.0) \sigma_B$ 。





第(IV)区为  $CD$  段。从  $B$  点开始, 岩石内开始出现微裂缝, 到  $C$  点时, 岩石表面可看见裂缝。此时如果加在试件上的压力不变, 或压力减少不及时, 试件会突然破裂。如能及时减小荷载, 就可观测到  $CD$  段。 $CD$  段内岩石强度降低, 这一现象称应变软化。

以上(I)、(II)和(III)区内,  $d\sigma \cdot d\varepsilon > 0$ , 应力应变关系属稳定阶段。第(IV)区内,  $d\sigma \cdot d\varepsilon \leq 0$ , 属非稳定阶段。

为了突出弹塑性材料的主要性质, 使计算简单, 现将图 3-3 所示的实验曲线作如下的简化(图 3-4):

OA 段不出现,  $\sigma_B$  以下的应力应变关系曲线为直线, 其斜率为弹模  $E$ 。 $BC$  和  $CD$  段可以是曲线(图 3-4(a))也可以是折线(图 3-4(b))。此外, 还假定卸荷和再加载为同一条直线, 直线的斜率为  $E$ 。重新加载后, 变形将沿原来的曲线继续发展。

由于存在塑性变形, 应力  $\sigma$  与应变  $\varepsilon$  之间不是一一对应的单值关系,  $\sigma$  的确定必须依赖于变形状态, 与加载历史有关。因而, 本构关系的建立应当用增量理论。

根据以上弹塑性变形的特点, 在分析计算时, 必须要解决以下几个问题:

- (1) 确定增量理论的材料本构关系;
- (2) 需要确定材料的塑性变形何时开始或停止的准则, 即屈服准则;
- (3) 需要确定判断材料所处状态(弹性或塑性)的准则, 即加载准则。

以下分别从应力空间和应变空间描述弹塑性本构关系。

### 3.2.2 应力空间描述的弹塑性本构关系

#### 1. 屈服条件与强化规律

材料由初始弹性状态进入塑性状态的条件称屈服条件, 又称屈服准则。对于单向受力状态, 屈服条件可简单写为

$$\sigma = \sigma_s$$

$\sigma_s$  为屈服应力。对于复杂受力状态, 若以  $f$  表示屈服函数, 它是应力  $\sigma$  的函数, 当材料从初始弹性状态进入塑性状态时屈服条件可表示为

$$f = f^*(\sigma) = 0$$

在应力空间内, 这是一个超曲面, 称为屈服面。

屈服面是可以变化的。屈服面的大小、形状和位置的变化规律称为材料的强化规律。对于理想塑性材料, 屈服面大小、形状和位置都不变。对于强化材料, 在加载过程中, 屈服面将随以前发生过的塑性变形而改变。改变后的屈服函数和屈服面分别称加载函数和加载面。在不考虑时间效应及接近常温的情况下, 加载函数  $f$  与应力状态  $\sigma$ 、塑性应力  $\sigma^p$  和反映加载历史的参数  $\kappa$  有关:

$$f(\sigma, \sigma^p, \kappa) = 0 \quad (3-44)$$

$\kappa$  是与材料有关的参数, 称强化参数, 或称内变量。它可以是塑性功  $w^p$ , 塑性体应变  $\theta^p$  或等效塑性应变  $\bar{\varepsilon}^p$

$$\sigma^p = D\varepsilon^p \quad (3-45)$$

$$w^p = \int \sigma^T d\varepsilon^p \quad (3-46)$$

$$\theta^p = \int I'^T d\varepsilon^p \quad (3-47)$$

$$\bar{\varepsilon}^p = \int ((d\varepsilon^p)^T d\varepsilon^p)^{1/2} \quad (3-48)$$

$\varepsilon^p$  为塑性应变矢量，式 (3-43) 和 (3-44) 又可分别称为初始屈服面和后继屈服面。

由于强化规律比较复杂，一般可用简化的模型来近似表示。目前常用的简化模型有等向强化和随动强化。等向强化模型假定在塑性变化过程中，加载面均匀扩大（图 3-5(a)），此时后继屈服面  $f$  只与应力状态  $\sigma$  和强化参数  $\kappa$  有关，式 (3-44) 成为

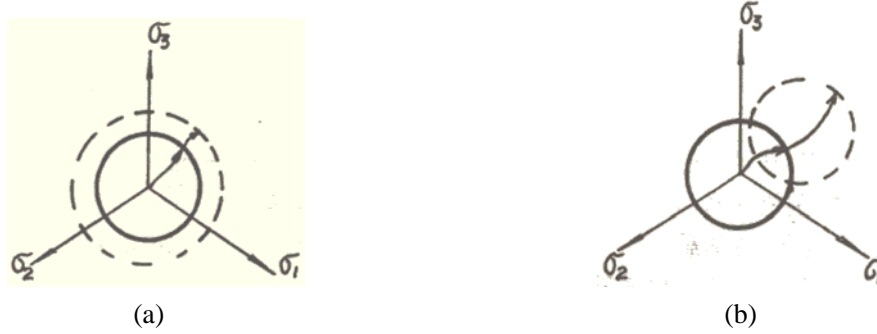


图 3-5 强化模型

$$f(\sigma, \kappa) = 0 \quad (3-49)$$

随动强化模型假定在塑性变形过程中，加载面的大小和形状不变，只在应力空间中平动（图 3-5(b)）。此时后继屈服面与  $\kappa$  无关

$$f(\sigma, \sigma^p) = 0 \quad (3-50)$$

等向强化模型便于数学处理，应用比较广泛，特别当材料在加载过程中，如果应力空间中各应力分量的比值变化不大，使用等向强化模型与实际情况比较符合。随动强化模型由于加载面不对称，数学处理比较困难，但可以考虑材料的 Bauschinger 效应，对于循环加载或可能出现反向屈服的问题，可使用这种强化模型。

## 2. 流动法则

弹塑性材料的本构关系是根据流动理论得出的。所谓流动法则是指塑性应变增量  $d\varepsilon^p$  随应力增量变化的规律。

对于弹性材料，应力  $\sigma$  和应变  $\varepsilon$  之间有关系 (3-23)。对于弹塑性材料，Mises 采用类比的方法，提出塑性势理论

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3-51)$$

式中  $g = g(\sigma)$  是塑性势函数， $d\lambda$  是非负的比例系数。如果取塑性势为屈服函数或加载函数，即  $g=f$ ，则式 (3-51) 成为

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3-52)$$

这是与屈服（或加载）条件相关连的流动法则，简称关连的流动法则。它是 Mises 应用类比方法得到的，缺乏严格的论证。后来，Drucker 作了“稳定性材料塑性功不可逆”的公设，进一步证明了关于稳定性材料的两个结论：

- (1) 屈服（或加载）面外凸；
- (2) 塑性应变增量  $d\varepsilon^p$  遵守关连流动法则 (3-52)。

理想塑性材料和一般的强化材料属于稳定材料，遵循关连流动法则。对于岩石、土和混凝土一类材料，虽然采用非关连流动法则更符合实际情况，但这样一来，意味着材料是不稳定的，而且导出的弹塑性矩阵  $\mathbf{D}_{ep}$  是不对称的，增加了解题的难度。因而一般情况下，对岩土材料仍采用关连流动法则。

对由  $n$  个光滑曲面组成的非正则屈服面（或加载面），关连流动法则可写为

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sum_{i=1}^n d\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3-53)$$

从几何上看，关连流动法则表示塑性应变增量  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  的方向与屈服面的外法线方向一致，即  $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$  与  $f$  正交，所以关连流动法则又称正交性法则。

### 3. 加卸载准则

处于不同状态的材料具有不同形式的本构方程，加卸载准则就是用来判断材料状态的一种准则。

对于理想塑性材料，要用屈服条件或屈服面来判断材料的状态。当材料从弹性状态变化到塑性状态，且塑性变形可任意增长，这一过程叫做加载。由于理想塑性材料的屈服面保持不变，从一种塑性状态到达另一种塑性状态时，应力点保持在屈服面上，即应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}$  不可能指向屈服面外侧，只能与屈服面  $f=0$  相切。如果材料从塑性状态变化到某一弹性状态的过程中不产生新的塑性变形，那末这一过程叫做卸载。此时应力点离开屈服面， $d\boldsymbol{\sigma}$  指向屈服面内侧（图 3-6）。如以数学式子表示，则有

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) &< 0 && \text{卸载} \\ f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) &= 0 && \text{加载} \end{aligned}$$

注意到

$$df = f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}) - f(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T d\boldsymbol{\sigma}$$

得理想塑性材料的加载准则，为

$$f(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \quad \text{弹性状态} \quad (3-54)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \text{且} \quad l_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} \begin{cases} < 0 & \text{卸载} \\ = 0 & \text{加载} \end{cases} \quad (3-55)$$

对于强化材料，要用加载条件或后继屈服面来判断材料的状态。当材料从一个塑性状态变到另一个塑性状态时有新的塑性变形产生，这一过程称为加载。如果塑性状态改变，但应力增量没有使塑性应变发生变化，则此过程称为中性变载。如果材料从塑性状态变化至某一弹性状态的过程中不产生新的塑性变形，那么该过程叫做卸载（图 3-7）。因此，强化材料的加卸载准则是

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^p, \boldsymbol{\kappa}) < 0 \quad \text{弹性状态} \quad (3-56)$$

$$f = 0 \quad \text{且} \quad l_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^T d\boldsymbol{\sigma} \begin{cases} > 0 & \text{加载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (3-57)$$

对于软化材料（图 3-8），加载时屈服面收缩，应力增量指向当时屈服面的内侧，因而无法给出区别加载和卸载的表达式。

若屈服面不是一个光滑曲面，而是由  $n$  个光滑曲面组成的曲面，即所谓的非正则屈服面，其加卸载准则可改写为：

对理想塑性材料

$$\text{若 } f_i(\sigma) < 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \text{弹性状态} \quad (3-58)$$

$$\text{若 } f_i(\sigma) < 0, \quad f_j(\sigma) = 0 \quad (i \neq j; i, j=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{且 } \left( \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma \begin{cases} < 0 & \text{卸载} \\ = 0 & \text{加载} \end{cases} \quad (3-59)$$

$$\text{若 } f_i(\sigma) < 0, \quad f_j(\sigma) = f_k(\sigma) = 0 \quad (i \neq j; i \neq k; i, j, k=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{且 } \begin{cases} \max\left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma, \left(\frac{\partial f_k}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma\right) = 0 & \text{加载} \\ \left(\frac{\partial f_j}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma < 0, \left(\frac{\partial f_k}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (3-60)$$

对于强化材料

$$\text{若 } f_i(\sigma, \sigma^p, \kappa) < 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \text{弹性状态} \quad (3-61)$$

$$\text{若 } f_i < 0, \quad f_j = 0 \quad (i \neq j; i, j=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{且 } \left( \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma \begin{cases} > 0 & \text{加载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (3-62)$$

$$\text{若 } f_i < 0, \quad f_j = f_k = 0 \quad (i \neq j; i \neq k; i, j, k=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{且 } \max\left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma, \left(\frac{\partial f_k}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma\right) = \begin{cases} > 0 & \text{加载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (3-63)$$

#### 4. 本构关系

由应力增量  $d\sigma$  引起的应变增量  $d\epsilon$  可分为弹性应变增量  $d\epsilon^e$  和塑性应变增量  $d\epsilon^p$  两部分（图 3-9）

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (3-64)$$

$$d\epsilon^e = D^{-1} d\sigma \quad (3-65)$$

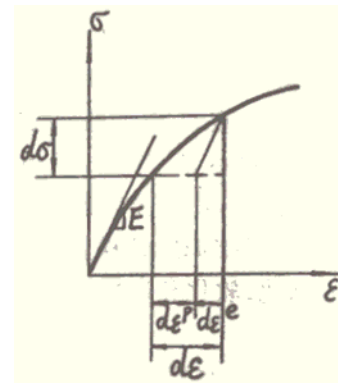
引入（3-52）式得

$$d\epsilon = D^{-1} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\lambda \quad (3-66)$$

对于卸载和中性变载情况，由于无新的塑性应变产生，所以  $d\lambda = 0$ 。加载时， $d\lambda > 0$ 。 $d\lambda$  可根据一致性条件求出。

如前所述，对于理想塑性材料  $df = 0$  为加载。对于强化材料，加载和中性变载过程均是从某一状态的  $f = 0$  变到另一状态的  $f = 0$ 。所以

$$df = 0 \quad (3-67)$$



这就是强化材料的一致性条件。由 (3-44) 式，一致性条件可改写为

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma^p}\right)^T d\sigma^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (3-68)$$

代入式 (3-45) 及 (3-52) 并考虑 (3-46) ~ (3-48) 式，由一 图 3-9  $d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p$  致性条件得

$$d\lambda = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma \quad (3-69)$$

其中

$$A = -(B + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma^p}\right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma}) \quad (3-70)$$

$$B = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial w^p} \sigma^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} & \text{当 } \kappa = w^p \text{ 时} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta^p} \mathbf{I}'^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} & \text{当 } \kappa = \theta^p \text{ 时} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}^p} \left( \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right) \right)^{1/2} & \text{当 } \kappa = \bar{\epsilon}^p \text{ 时} \end{cases} \quad (3-71)$$

将 (3-69) 代入 (3-66) 得加载时的本构方程：

$$d\epsilon = (\mathbf{D}^{-1} + \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T) d\sigma \quad (3-72)$$

考虑加卸载准则，并引入阶梯函数  $H(l_1)$

$$H(l_1) = \begin{cases} 0 & \text{当 } l_1 \leq 0 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } l_1 > 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (3-73)$$

$$l_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T d\sigma \quad (3-74)$$

式 (3-72) 可改写为对加载、中性变载和卸载均适用的本构方程

$$d\epsilon = (\mathbf{D}^{-1} + \frac{H(l_1)}{A} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^T) d\sigma \quad (3-75)$$

根据这一关系，只要给出应力增量  $d\sigma$ ，就可确定应变增量  $d\epsilon$ 。

### 3.2.3 应变空间描述的弹塑性本构关系

应力空间中描述的弹塑性本构关系有着很大的局限性，它仅运用于强化材料。由图 3-10 可看出，当  $\epsilon > \epsilon_s$  后，就有塑性变形产生，应力和应变之间呈非线性关系。B 点处于材料的强化阶段，C 点处于材料的软化阶段，如在应力空间内考虑本构关系，对强化点 B， $d\sigma > 0$  表示加载， $d\sigma < 0$  表示卸载。但对软化点 C，无论是加载还是卸载，均为  $d\sigma < 0$ ，因而难以由  $d\sigma$  判别加载还是卸

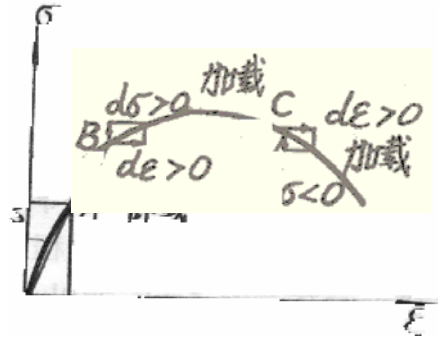


图 3-10

载。但如果在应变空间内，不管是强化还是软化， $d\epsilon > 0$  表示加载， $d\epsilon < 0$  表示卸载，这样就有可能在应变空间内给出对强化、软化和理想塑性普遍适用的本构关系。

### 1. 应变屈服条件

以  $F$  表示应变屈服函数，当材料从初始弹性状态进入塑性状态，其初始屈服条件为

$$F(\epsilon) = 0 \quad (3-76)$$

后继屈服面可表示为

$$F(\epsilon, \epsilon^p, \kappa) = 0 \quad (3-77)$$

如果有

$$F(\epsilon, \epsilon^p, \kappa) < 0$$

则材料处于弹性状态，如果有

$$F(\epsilon, \epsilon^p, \kappa) = 0$$

那末它处于塑性状态，不存在使  $F > 0$  的状态。

### 2. 流动法则

与应力空间中的流动法则类似，在应变空间内，对于弹性性质不随塑性变形的产生和发展而变化的材料，加载时的塑性应力增量  $d\sigma^p = D d\epsilon^p$  指向应变屈服面的外法向，即

$$d\sigma^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \quad (3-78)$$

这就是应变空间中的流动法则，或称正交法则，式中  $d\lambda$  是非负的比例系数。加载时  $d\lambda > 0$ ，其它情况  $d\lambda = 0$ 。

### 3. 加卸载准则

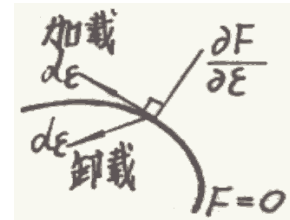
对于理想塑性材料，加载情况下，从一种塑性状态到达另一种塑性状态时，其屈服面不变，应变点保留在屈服面上，所以  $d\epsilon$  与  $F=0$  相切。卸载时，从塑性状态变化到某种弹性状态的过程中无新的塑性变形产生。 $d\epsilon$  指向  $F=0$  的内侧（图 3-11），所以其加卸载准则为

$$F(\epsilon) < 0$$

(3-79)

$$F(\epsilon) = 0 \quad \text{且} \quad l_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \right)^T d\epsilon \begin{cases} < 0 & \text{卸载} \\ = 0 & \text{加载} \end{cases}$$

(3-80)



对于强化材料和软化材料，在某种塑性状态下，有  $F(\epsilon, \epsilon^p, \kappa) = 0$ 。

当它受外力作用时，应变点仍保持在屈服面上，并伴有新的塑性变形发生，此过程为塑性加载。如此时无新的塑性变形产生，则为中性变载。如果应变点离开屈服面，回到弹性状态，称为塑性卸载。因而其加卸载准则为

$$F(\epsilon, \epsilon^p, \kappa) < 0 \quad \text{弹性状态} \quad (3-81)$$

$$f = 0 \quad \text{且} \quad l_1 = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma \begin{cases} > 0 & \text{加载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ < 0 & \text{卸载} \end{cases} \quad (3-82)$$

这个准则的几何解释见图 3-12。

具有非正则屈服面材料的流动法则和加卸载准则与应力空间类似，可参照式 (3-73) 和 (3-79) ~ (3-82) 写出。

#### 4. 本构关系

在应变空间内，式 (3-64) 和 (3-65) 仍然成立。考虑到流动法则 (3-78)，由式 (3-64) 和 (3-65) 得

$$d\sigma = \mathbf{D}d\epsilon - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \quad (3-83)$$

对于中性变载和卸载， $d\lambda = 0$ ，上式成为虎克定律。对于加载情况， $d\lambda > 0$ ，其大小可由一致性条件得出

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon}\right)^T d\sigma + \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon^p}\right)^T d\epsilon^p + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0$$

代入 (3-78) 并考虑式 (3-46) ~ (3-48) 可得

$$d\lambda = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon}\right)^T d\epsilon \quad (3-84)$$

式中

$$A = -\left(B + \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon^p}\right)^T \mathbf{D}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \epsilon}\right) \quad (3-85)$$

$$B = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial w^p} \sigma^T \mathbf{D}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} & \text{当 } \kappa = w^p \text{ 时} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta^p} \mathbf{I}'^T \mathbf{D}^{-1} \frac{\partial F}{\partial \sigma} & \text{当 } \kappa = \theta^p \text{ 时} \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon}\right)^T (\mathbf{D}^{-1})^T \mathbf{D}^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon}\right)\right)^{1/2} & \text{当 } \kappa = \bar{\epsilon}^p \text{ 时} \end{cases} \quad (3-86)$$

将 (3-84) 代入 (3-83) 得加载时的本构方程

$$d\sigma = (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p) d\epsilon \quad (3-87)$$

其中

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{A} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon}\right)^T \quad (3-88)$$

引入阶跃函数

$$H(l_2) = \begin{cases} 0 & \text{当 } l_2 \leq 0 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } l_2 > 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (3-89)$$

$$l_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon}\right)^T d\epsilon \quad (3-90)$$

可得对加载、卸载和中性变载均适用的本构关系

$$d\sigma = (\mathbf{D} - H(l_2) \mathbf{D}_p) d\epsilon \quad (3-91)$$

由于通过试验确定的屈服条件多用应力表示, 为此设法将 (3-88) 用应力屈服函数表示, 由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^p &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)\end{aligned}$$

所以

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^p, \kappa) = f(\mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^p, \kappa) \equiv F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \kappa) \quad (3-92)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} &= \mathbf{D} \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^p} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \\ \frac{\partial F}{\partial \kappa} &= \frac{\partial f}{\partial \kappa}\end{aligned} \quad (3-93)$$

利用以上两, 将应变空间内的本构关系 (3-88) 改用在应力空间内描述

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{A} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T = \frac{1}{A} \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \quad (3-94)$$

式中

$$A = \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^p} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - B \quad (3-95)$$

$$B = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial w^p} \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \text{当 } \kappa = w^p \text{ 时} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta^p} \mathbf{I}^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \text{当 } \kappa = \theta^p \text{ 时} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}^p} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \right)^{1/2} & \text{当 } \kappa = \bar{\varepsilon}^p \text{ 时} \end{cases} \quad (3-96)$$

此时, 加载准则函数式 (3-90) 成为

$$l_2 = \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon} = \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T d\boldsymbol{\sigma}^e \quad (3-97)$$

这与应力空间内的式 (3-74) 不同, 它将按弹性规律由  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  计算弹性应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}^e$ 。这样应用起来更为方便, 因为在位移有限元法中, 式 (3-74) 中的  $d\boldsymbol{\sigma}$  事先并不知道, 而式 (3-97) 中的  $d\boldsymbol{\sigma}^e$  容易计算。

对于非正则屈服面的本构关系, 可按类似方法建立, 例如对其中的第  $j$  个光滑曲面, 弹塑性本构方程为

$$d\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p^j) d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-98)$$

式中

$$\mathbf{D}_p^j = \frac{1}{A_j} \mathbf{D} \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\partial f_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \quad (3-99)$$



$$A_j = \left( \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} - \left( \frac{\partial f_j}{\partial \sigma^p} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} - B_j \quad (3-100)$$

$$B_j = \begin{cases} \frac{\partial f_j}{\partial w^p} \sigma^T \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} & \text{当 } \kappa = w^p \text{ 时} \\ \frac{\partial f_j}{\partial \theta^p} \mathbf{I}'^T \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} & \text{当 } \kappa = \theta^p \text{ 时} \\ \frac{\partial f_j}{\partial \varepsilon^p} \left( \left( \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} \right)^T \left( \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} \right) \right)^{1/2} & \text{当 } \kappa = \varepsilon^p \text{ 时} \end{cases} \quad (3-101)$$

对于  $f_j$  与  $f_k$  两个曲面的交线，根据一致性条件及非正则屈服面的流动法则，可得出弹塑性本构方程如下

$$d\sigma = (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p^{jk}) d\varepsilon \quad (3-102)$$

$$\mathbf{D}_p^{jk} = \frac{1}{A} \mathbf{D} \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \quad (3-103)$$

式中

$$\frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_k}{\partial \sigma} \end{bmatrix} \quad (3-104)$$

$$A = \left( \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} - \left( \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma^p} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} - B \quad (3-105)$$

$$B = \begin{cases} \frac{\partial f_{jk}}{\partial w^p} \sum^T \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} & \text{当 } \kappa = w^p \text{ 时} \\ \frac{\partial f_{jk}}{\partial \theta^p} \mathbf{A}^T \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} & \text{当 } \kappa = \theta^p \text{ 时} \\ \frac{\partial f_{jk}}{\partial \varepsilon^p} \left( \left( \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} \right)^T \left( \frac{\partial f_{jk}}{\partial \sigma} \right) \right)^{1/2} & \text{当 } \kappa = \varepsilon^p \text{ 时} \end{cases} \quad (3-106)$$

$$\frac{\partial f_{jk}}{\partial \kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial \kappa} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_k}{\partial \kappa} \end{bmatrix} \quad (\kappa = w^p, \theta^p, \varepsilon^p) \quad (3-107)$$

$$\Sigma = [\sigma \quad \sigma] \quad (3-108)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{I}' \quad \mathbf{I}'] \quad (3-109)$$

实际上，这些光滑屈服面的交线成了屈服面的奇异点。有时为了简单起见，可用光滑曲线代替奇异点，使各屈服面的法线方向可连续改变。

以上是根据流动理论得出的弹塑性本构类系，是对各种弹塑性材料模型普遍适用的一般形式。为便于在弹塑性有限元法中实际应用，以下将针对几种常见的材料模型，根据其屈服函数，导出本构关系中弹塑性矩阵的具体表达式。

### 3.3 常见材料模型的弹塑性矩阵

#### 3.3.1 Mises 模型（等向强化材料）

Mises 模型的屈服条件为

$$f = \sqrt{3J_2} - \sigma_s = 0 \quad (3-110)$$

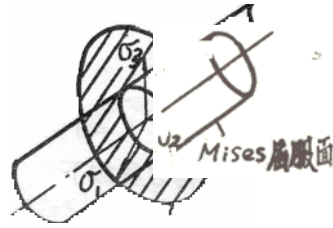
式中  $J_2$  是应力偏量的第二不变量

$$J_2 = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2 \quad (3-111)$$

在主应力空间内，屈服面（3-110）是一个其轴垂直于  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$  平面的圆柱面。

Mises 屈服面是一个正则屈服面，可按式（3-95）和（3-96）

计算  $A$ 、 $B$ ，再按式（3-94）确定  $D_p$ 。



对于等向强化材料，式（3-110）中的  $\sigma_s$  是内变量  $\kappa$  的函数。

假定  $\kappa$  为塑性功  $w^p$ ， $B$  中的

$$\frac{\partial f}{\partial w^p} = -\frac{d\sigma_s(w^p)}{dw^p} = -\frac{d\sigma_s(w^p)}{d\varepsilon^p} \frac{d\varepsilon^p}{dw^p} = -\frac{H'}{\sigma_s(w^p)} \quad (3-112) \quad \text{图 3-13 Mises 屈服面}$$

式中的  $H'$  是材料单向拉伸实验曲线  $\sigma_s \sim \varepsilon^p$  的切线斜率（图 3-14）。当材料进入初始塑性

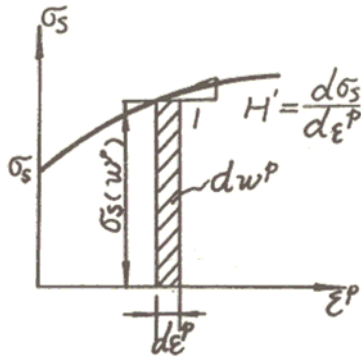


图 3-14  $\sigma_s \sim \varepsilon^p$

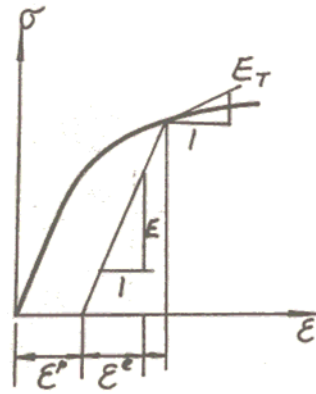


图 3-15

状态后， $\sigma_s \sim \varepsilon^p$  曲线就是  $\sigma \sim \varepsilon^p$  曲线。可见  $H'$  也是  $\sigma \sim \varepsilon^p$  曲线的切线斜率，所以

$$\frac{d\varepsilon^p}{d\sigma} = \frac{d\varepsilon^p}{d\sigma_s} = \frac{1}{H'} \quad (3-113)$$

由式（3-64）有

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{d\varepsilon^e}{d\sigma} + \frac{d\varepsilon^p}{d\sigma}$$

设  $E$  为初始弹模， $E_T$  为切线弹模（图 3-15），则上式成为

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H'}$$

由此求出

$$H' = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (3-114)$$

令

$$\mathbf{S}' = [S_x \quad S_y \quad S_z \quad 2S_{xy} \quad 2S_{yz} \quad 2S_{zx}]^T \quad (3-115)$$

不难得出

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2\sqrt{3J_2}} \mathbf{S}' \quad (3-116)$$

根据上式及 (3-35), 有

$$\boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2\sqrt{3J_2}} (\mathbf{S}^T \mathbf{S}' + \boldsymbol{\sigma}_m \mathbf{I}'^T \mathbf{S}') \quad (3-117)$$

由于

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S}' = 2J_2 \quad (3-118)$$

$$\mathbf{I}'^T \mathbf{S}' = 0 \quad (3-119)$$

则 (3-116) 式成为

$$\boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{3J_2} \quad (3-120)$$

将 (3-112) 及 (3-120) 式代入 (3-96), 并考虑到  $\sqrt{3J_2} = \sigma_s$  (即  $f=0$ ), 可得

$$B = -H' = \frac{-EE_T}{E - E_T} \quad (3-121)$$

有了  $B$ , 就可根据式 (3-95) 求  $A$ 。

对于等向强化模型, 式 (3-49) 成立, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma^p} = 0 \quad (3-122)$$

由  $\mathbf{D}$  的表达式 (3-14) 和式 (3-116) 得

$$\mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3G}{\sqrt{3J_2}} \mathbf{S} \quad (3-123)$$

将 (3-116)、(3-123) 和 (3-122) 代入式 (3-95), 求出

$$A = \frac{3G}{2J_2} \mathbf{S}^T \mathbf{S}' + H' = 3G + \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (3-124)$$

把 (3-123) 和 (3-124) 代入 (3-94), 就可以确定  $\mathbf{D}_p$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_p &= \frac{3G^2}{(3G + \frac{EE_T}{E - E_T})J_2} \mathbf{S}\mathbf{S}^T = \\
&= \frac{3G^2}{(3G + \frac{EE_T}{E - E_T})J_2} \begin{bmatrix} S_x^2 & S_y S_x & S_z S_x & S_{xy} S_x & S_{yz} S_x & S_{zx} S_x \\ S_y S_x & S_y^2 & S_z S_y & S_{xy} S_y & S_{yz} S_y & S_{zx} S_y \\ S_z S_x & S_z S_y & S_z^2 & S_{xy} S_z & S_{yz} S_z & S_{zx} S_z \\ S_{xy} S_x & S_{xy} S_y & S_{xy} S_z & S_{xy}^2 & S_{yz} S_{xy} & S_{zx} S_{xy} \\ S_{yz} S_x & S_{yz} S_y & S_{yz} S_z & S_{yz} S_{xy} & S_{yz}^2 & S_{zx} S_{yz} \\ S_{zx} S_x & S_{zx} S_y & S_{zx} S_z & S_{zx} S_{xy} & S_{zx} S_{yz} & S_{zx}^2 \end{bmatrix} \quad \text{对称} \quad (3-125)
\end{aligned}$$

将  $\mathbf{D}_p$  代入式 (3-87)，就可以  $d\epsilon$  由确定  $d\sigma$ 。

### 3.3.2 Drucker-Prager 模型（等向强化材料）

Drucker-Prager 屈服条件是在 Mises 屈服条件的基础上再考虑静水压力的影响，即

$$f = aI_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (3-126)$$

$I_1$  应力张量的第一不变量

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (3-127)$$

$a$  和  $k$  是材料常数，它与材料的摩擦角  $\phi$  和粘结力  $c$  有关，式(3-126)表明，随着应力的增大，Mises 屈服圆的半径将扩大，所以它在三维应力空间内是一个圆锥面（图 3-16），除锥顶点是奇异点外，它是光滑的正则曲面，它在  $\pi$  平面上的截线是一个圆，称 Drucker-Prager 圆。

为确定参数  $a$  和  $k$ ，可采用比较 Drucker-Prager 屈服条件 (3-126) 和 Mohr-Coulomb 屈服条件的方法。后者在主应力空间内是一个六棱锥，它在  $\pi$  平面内的截线是一个不规则的六边形（图 3-17），称 Coulomb 六边形。现使 Drucker-prager 圆锥面的锥顶与 Coulomb 六棱锥的锥顶重合，若 Drucker-Prager 圆与 Coulomb 六边形的外顶点重合时，可得

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \\
k &= \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}
\end{aligned} \quad (3-128)$$

若与 Coulomb 六边形的内顶点重合，可得

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \\
k &= \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}
\end{aligned} \quad (3-129)$$

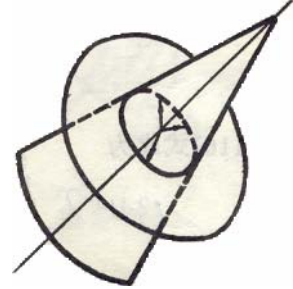
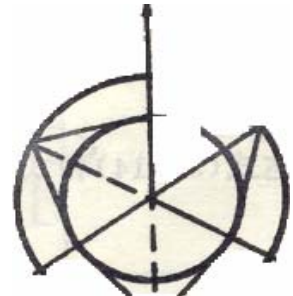


图 3-16 D-P 屈服面



对于平面应变问题，有

$$\begin{aligned} a &= \frac{\operatorname{tg} \phi}{(9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi)^{1/2}} \\ k &= \frac{3c}{(9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3-130)$$

$B$  的确定：到  $\kappa = \theta^p$ ，则  $a = a(\theta^p)$ ， $k = k(\theta^p)$ ，令  $a' = \partial a / \partial \theta^p$ ， $k' = \partial k / \partial \theta^p$  则

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = a \mathbf{I}' + \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \mathbf{S}' \quad (3-131)$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial \theta^p} \mathbf{I}'^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 3a(a'I_1 - k') \quad (3-132)$$

$A$  的确定：

$$\mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 3Ka \mathbf{I}' + \frac{G}{\sqrt{J_2}} \mathbf{S} \quad (3-133)$$

由于是等向强化材料， $\frac{\partial f}{\partial \sigma^p} = 0$ ，由式（3-96）得

$$A = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - B = 9Ka^2 + G + 3a(k' - a'I_1) \quad (3-134)$$

若  $k' - a'I = 0$ ，即  $\frac{\partial f}{\partial \theta^p} = 0$ ，表示理想塑性。令

$$\mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 3Ka \mathbf{I}' + \frac{G}{\sqrt{J_2}} \mathbf{S} = \Phi = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5 \Phi_6]^T$$

则

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{A} \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} = \frac{1}{A} \Phi \Phi^T \quad (3-135)$$

### 3.4 粘性介质的本构关系

前面所谈的弹性变形和塑性变形都与时间无关，认为是瞬时发生的。但实际上变形的发生与时间有关。只是一般情况下，时间的影响可忽略不计，然而对某些情况，例如高温下的金属变形，外力作用下的岩体变形，可以随时间累积至比较大的量值。因而对它们进行变形和应力分析，必须考虑时间因素。介质这种变形和应力随时间变化的特性称为粘性。

对于一维应力状态，服从牛顿粘性流动的介质，其应力与应变速率成正比

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3-136)$$

式中  $\eta$  是粘性系数，具有粘性的材料可以用一个在盛满粘性流体的圆筒内运动的活塞组成的粘性元件表示（图 3-18（a））。此外，弹性材料可用一弹性元件（图 3-18（b））表

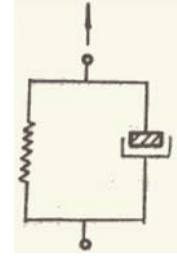
示。理想塑性或强化塑性可用一对摩擦滑块的塑性元件（图 3-18 (c)）表示。当应力小于屈服极限  $\sigma_s$  时，不产生变形，当应力满足屈服条件（即  $\sigma = \sigma_s$ ）时，发生流动。将这些元件按一定的方式组合就可以得到不同性质的材料。以下将介绍粘弹性和粘塑性模型。

### 3.4.1 粘弹性模型

常见的粘弹性模型有两种，一种是 Kelvin 模型，它将弹性元件和粘性元件并联（图 3-19）。令弹性元件的应变和应力分别为  $\varepsilon^e$  和  $\sigma^e$ ，粘性元件的应变和应力分别为  $\varepsilon^v$  和  $\sigma^v$ ，则 Kelvin 粘弹性介质中的总应变  $\varepsilon$  和总应力  $\sigma$  分别为

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v \quad (3-137)$$

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3-138) \quad \text{图 3-19}$$



可见，随着应变速率的增加，介质内的应力也增加。如果介质内应变保持不变，即  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ，此时  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ ，则应力也保持不变， $\sigma = E\varepsilon_0$ 。

反之，如介质承受的是常应力  $\sigma_0$ ，则由 (3-137) 式解出

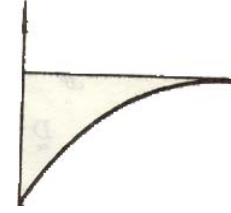


图 3-20

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}) \quad (3-139)$$

可见，应变随时间逐渐增加，并趋向  $\frac{\sigma_0}{E}$ ，这就是所谓蠕变现象（图 3-20）。

另一种粘弹性模型为 Maxwell 模型，它将弹性元件和粘性元件串联（图 3-21），此时有

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v \quad (3-140)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \quad (3-141)$$

由式 (3-140) 及 (3-135) 可得

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3-142)$$

可见，当介质在常应力  $\sigma = \sigma_0$  作用下，将具有常速率的变形，应变随时间线性增加。反之，当介质在常应变作用下，例如在时刻  $t = 0$ ，介质内有应力  $\sigma_0$ ，对应的初始应变为  $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ ，设法固定这个应变，使  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ ，

则由式 (3-142) 解出

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad (3-143)$$

这时，应力将按指数规律随时间衰减（图 3-22），并趋于零。这种在常应变情况下，应力随时间变小的现象叫做应力松弛。

### 3.4.2 粘塑性模型

粘塑性模型是将粘性元件和塑性元件组合的模型。当它们并联时（图 3-23），变成了 Bingham 模型，此时，总应变  $\varepsilon$  等于粘性应变  $\varepsilon^v$  或塑性应变  $\varepsilon^p$ ，总应力等于粘性应力  $\sigma^v$  和塑性应力  $\sigma^p$  之和，即

$$\varepsilon = \varepsilon^v = \varepsilon^p \quad (3-144)$$

$$\sigma = \sigma^v + \sigma^p = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} + \sigma_s (\sigma > \sigma_s \text{ 时}) \quad (3-145)$$

当  $\sigma < \sigma_s$  时，介质不发生变形（图 3-24）。由（3-145）式可得

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{\eta}(\sigma - \sigma_s) & \text{当 } \sigma \geq \sigma_s \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \sigma < \sigma_s \text{ 时} \end{cases} \quad (3-146)$$

可见，对于这种模型，只有当应力超过屈服应力  $\sigma_s$  时，才会产生明显的流动，流动的速度与介质的粘性有关。

如果将粘性元件和塑性元件串联（图 3-25），当  $\sigma < \sigma_s$  时，不产生塑性变形，仅产生粘性流动。当  $\sigma > \sigma_s$  时，总应变由塑性应变和粘性应变两部分组成，即

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon^v}{dt} + \frac{d\varepsilon^p}{dt} \quad (3-147)$$

对单向应力状态  $f = \sigma - \sigma_s = 0$ ，由式（3-52）、（3-84）和（3-93）可得

$$\frac{d\varepsilon^p}{dt} = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T E \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{E}{A} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3-148)$$

将（3-147）代入（3-146）并引入（3-135）式得

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{\eta(1 - \frac{E}{A})} \sigma & \text{当 } \sigma \geq \sigma_s \text{ 时} \\ \frac{1}{\eta} \sigma & \text{当 } \sigma < \sigma_s \text{ 时} \end{cases} \quad (3-149)$$

与并联模型不同的是只要有应力存在，就产生粘性流动。

以上是几种最基本的粘性模型，将它们按一定的规律进行组合可得到更复杂的粘性模型以更好地描述介质的特性。

### 3.4.3 弹粘塑性

将弹性元件与 Bingham 模型串联（图 3-26），此时由于总应变为弹性应变  $\varepsilon^e$  和粘塑性应变  $\varepsilon^v$  之和，所以有

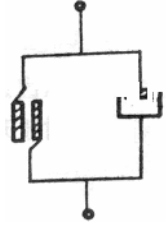


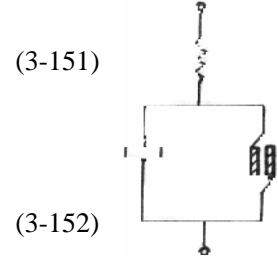
图 3-23

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon^e}{dt} + \frac{d\varepsilon^{vp}}{dt} \quad (3-150)$$

式中:

$$\frac{d\varepsilon^e}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (3-151)$$

$$\frac{d\varepsilon^{vp}}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{\eta}(\sigma - \sigma_s) & \sigma \geq \sigma_s \\ 0 & \sigma < \sigma_s \end{cases}$$



当这一系统受常应力  $\sigma$  作用，并假定粘塑性具有线性强化特性（图 3-27） 图 3-27

$$\sigma_s = \sigma_s^0 + E_{vp} \varepsilon^{vp} \quad (3-153)$$

则  $\sigma < \sigma_s$  时，只有弹性变形发生

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \quad (3-154)$$

当  $\sigma > \sigma_s$  时，由式 (3-149)，(3-151) 和 (3-152) 得到

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\eta}(\sigma - \sigma_s^0 - E_{vp} \varepsilon^{vp})$$

代入  $\varepsilon^{vp} = \varepsilon - \varepsilon^e = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$ ，得

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_{vp}}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{\eta}(\sigma - \sigma_s^0) + \frac{E_{vp} \sigma}{\eta E} \quad (3-155)$$

求解上述微分方程，并代入初始条件

$$t = 0, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

得到微分方程的解为

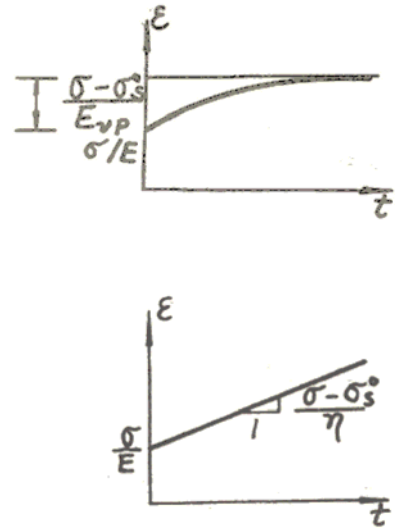
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - \sigma_s^0}{E_{vp}} \left(1 - e^{-\frac{E_{vp}}{\eta} t}\right) \quad (3-156)$$

图 3-28 示出这一应变规律。

对于理想粘塑性材料， $E_{vp} = 0$ ，式 (3-154) 成为

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\eta}(\sigma - \sigma_s) \quad (3-157)$$

其解为





$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{\eta}(\sigma - \sigma_s^0)t \quad (3-158)$$

此时的应变规律见图 3-29，与式 (3-155) 不同的是它不能达到稳定值。 图 3-29

#### 3.4.4 粘弹性三维本构方程

弹性介质的应力和应变服从广义虎克定律，如式 (3-26) 和 (3-27) 所示，令

$$\mathbf{e}' = [e_x e_y e_z 2e_{xy} 2e_{yz} 2e_{zx}]^T \quad (3-159)$$

式 (3-27) 可改写为

$$\mathbf{s} = G\mathbf{D}_2\mathbf{e}' \quad (3-160)$$

式中

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (3-161)$$

式 (3-26) 可改写为

$$\mathbf{I}'\sigma_m = K\mathbf{D}_1\varepsilon \quad (3-162)$$

其中，

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \end{bmatrix} \quad (3-163)$$

与式 (3-136) 类似，牛顿粘性介质的应力和应变应服从下式

$$\mathbf{s} = \eta\mathbf{D}_2\dot{\mathbf{e}}' \quad (3-164)$$

对于 Kelvin 模型的粘弹性介质，由于介质应力是弹性应力与粘性应力之和，由 (3-157) 和 (3-161) 得

$$\mathbf{s} = G\mathbf{D}_2\mathbf{e}' + \eta\mathbf{D}_2\dot{\mathbf{e}}' \quad (3-165)$$

假定粘性变形不可压缩，体积应变完全弹性，因而式 (3-159) 成立，由式 (3-35) 可知

$$\sigma = s + \mathbf{I}'\sigma_m$$

将式 (3-162) 和 (3-159) 代入得

$$\sigma = G\mathbf{D}_2\mathbf{e}' + \eta\mathbf{D}_2\dot{\mathbf{e}}' + K\mathbf{D}_1\varepsilon \quad (3-166)$$

由于

$$\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{I}'\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{\varepsilon}$$

将其代入 (3-163) 得

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} + \eta(\boldsymbol{D}_2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{D}_1)\dot{\boldsymbol{e}}' \quad (3-167)$$

这就是 Kelvin 模型的三维本构方程。

对于 Maxwell 模型的粘弹性介质，介质的应变是弹性应变和粘性应变之和因而由式 (3-157) 和 (3-161) 可得

$$\dot{\boldsymbol{e}}' = \frac{1}{G}\boldsymbol{D}_2^{-1}\dot{\boldsymbol{s}} + \frac{1}{\eta}\boldsymbol{D}_2^{-1}\boldsymbol{s} \quad (3-168)$$

仍然假定粘性变形不可压缩，由 (3-26) 给出

$$\boldsymbol{I}'\boldsymbol{\varepsilon}_m = \frac{1}{9K}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\sigma}$$

因而

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{e}}' + \boldsymbol{I}'\boldsymbol{\varepsilon}_m = \frac{1}{G}\boldsymbol{D}_2^{-1}\dot{\boldsymbol{s}} + \frac{1}{\eta}\boldsymbol{D}_2^{-1}\boldsymbol{s} + \frac{1}{9K}\boldsymbol{D}_1\dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3-169)$$

又因为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{I}'\boldsymbol{\sigma}_m = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{\sigma}$$

将其代入 (3-166) 得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{D}^{-1}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{\eta}(\boldsymbol{D}_2^{-1} - \frac{1}{6}\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{\sigma} \quad (3-170)$$

这就是 Maxwell 模型的三维本构关系。

## 第四章 材料非线性有限元法

本章所研究的非线性有限元方法是材料非线性有限元。它的非线性是由本构关系的非线性引起的。但它和线弹性有限元一样，都属于小变形问题，因而关于形函数的选取、应变矩阵、应力矩阵及劲度矩阵的形式都是相同的，不同的仅在劲度矩阵是按非线性弹性或弹塑性矩阵计算的，这是材料非线性有限元的基本内容。

### 4.1 非线性弹性有限元法

#### 4.1.1 非线性弹性有限元法的基本公式

对于小变形的非线性弹性问题，其基本方程为：

$$\text{平衡微分方程} \quad \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} = 0 \quad (3-8)$$

$$\text{几何方程} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{f} \quad (3-2)$$

$$\text{物理方程} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-19)$$

$$\text{或} \quad d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_T d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-20)$$

式中， $\mathbf{D}_s$  和  $\mathbf{D}_T$  的表达式见 (3-37) ~ (3-40)，它们是应变强度  $\bar{\varepsilon}$  的函数。边界条件为

$$\text{位移边界条件: } \mathbf{f}|_{s=s_u} = \bar{\mathbf{f}} \quad (3-4)$$

$$\text{应力边界条件: } \mathbf{n}(\boldsymbol{\sigma})_{s=s_\sigma} = \bar{\mathbf{p}} \quad (3-9)$$

虚功方程是

$$\int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv = \int_v \delta \mathbf{f}^T \bar{\mathbf{p}} dv + \int_{s_\sigma} \delta \mathbf{f}^T \bar{\mathbf{p}} ds \quad (3-11)$$

可见，除表示为物理方程的本构关系外，其它基本方程与边界条件均与线弹性问题相同，而且虚功方程 (3-11) 不涉及材料性质，因而线弹性有限元的几何关系和由虚功方程得到的单元和整体平衡方程完全适用于非线性弹性和弹塑性问题，它们是

$$\mathbf{f} = \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4-1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e \quad (4-2)$$

$$\int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{R}^e \quad (4-3)$$

$$\sum_e (\mathbf{c}^e)^T \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{R} \quad (4-4)$$

将式 (4-1) 代入 (3-2)，式 (3-2) 代入 (3-19)，再将 (3-19) 代入 (4-3)，得

$$\mathbf{k}_s(\bar{\varepsilon}) \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{R}^e \quad (4-5)$$

其中单元割线劲度矩阵  $\mathbf{k}_s$  为

$$\mathbf{k}_s(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B} dV \quad (4-6)$$

同样可由 (4-4) 得整体平衡方程

$$\mathbf{K}_s(\boldsymbol{\delta}) \boldsymbol{\delta} = \mathbf{R} \quad (4-7)$$

整体割线劲度矩阵

$$\mathbf{K}_s(\boldsymbol{\delta}) = \sum_e (\mathbf{c}^e)^T \mathbf{k}_s(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{c}^e \quad (4-8)$$

由于  $\mathbf{K}_s$  与位移  $\boldsymbol{\delta}$  有关, 式 (4-7) 是一个非线性方程组。但实际求解时不用 (4-7) 式, 因为求解 (4-7) 要用直接迭代法, 这一方法不但计算量大, 且常常不收敛。

在求解非线性方程组时, 除直接迭代法要用割线劲度矩阵外, 其它方法都要计算切线劲度矩阵。为此, 须对非线性弹性有限元的切线劲度矩阵进行研究。

由式 (4-4) 得

$$\psi = \sum_e (\mathbf{c}^e)^T \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{R} \quad (4-9)$$

由上式及 Newton 法迭代公式 (2-7) 可得切线劲度矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T(\boldsymbol{\delta}) &= \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\delta}} = \sum_e (\mathbf{c}^e)^T \int_v \mathbf{B}^T \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\boldsymbol{\delta}} dV \\ &= \sum_e (\mathbf{c}^e)^T \left( \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B} dV \right) \mathbf{c}^e \end{aligned} \quad (4-10)$$

#### 4.1.2 求解的迭代过程

不同的非线性方程组求解方法, 迭代过程中的一些具体处理方法也不相同, 但对荷载的处理一般都分级按增量方法计算。

##### 1. 荷载分级

对于实际的工程问题来说, 将荷载分级施加是相当重要的, 首先, 这样做可以模拟实际施工加载过程, 进行所谓“仿真”的数值分析, 这时弹塑性问题显得更为重要, 因为不同的加载过程将得到不同的位移和应力计算成果。其次, 对荷载分级, 容易使求解过程收敛。

荷载的分级首先要考虑荷载的性质, 不同类型的荷载要根据实际施工加载情况分级施加。为了更精细地模拟施工过程并使迭代过程收敛, 每级荷载还可按 § 2.2 介绍的荷载系数法分成更小的增量。图 4-1 为三峡永久船闸的闸室横剖面, 为了分析闸室结构的应力状态和两侧边坡的稳定性, 所施加的荷载按加载顺序有开挖荷载、衬砌自重、边坡内的渗压和闸室内的水压力。由于开挖荷载的计算需要事先了解地应力, 在没有地应力测量值的情况下, 还要首先计算自重应力。很明显, 对于这个问题, 开挖是主要荷载, 根据设计的开挖施工程序再将它分为若干级增量, 其它荷载也可根据需要再分级, 目的就是为了更精确地模拟加载过程和使求解过程收敛。

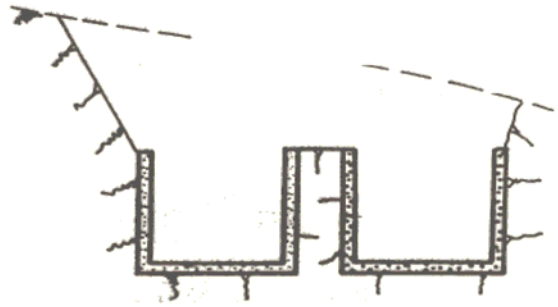


图 4-1

## 2. 增量迭代法

增量迭代法实际上就是非线性方程组求解的 Euler-Newton 法，即将荷载分成若干级增量，对每一级荷载增量，进行迭代运算。对第  $m$  级荷载，迭代的基本公式是

$$\begin{cases} \Delta \delta_m^i = (\mathbf{K}_{T,m}^i)^{-1} (\mathbf{R}_m - \mathbf{F}_m^i) = (\mathbf{K}_{T,m}^i)^{-1} (\Delta \mathbf{R}_m - \boldsymbol{\psi}_m^i) \\ \delta_m^{i+1} = \delta_m^i + \Delta \delta_m^i \end{cases} \quad (2-46)$$

式中  $\mathbf{R}_m$  ——第  $m$  级荷载增量施加后的总荷载，

$\Delta \mathbf{R}_m$  ——第  $m$  级荷载增量，

$\mathbf{F}_m^i$  ——第  $m$  级荷载第  $i$  次迭代结束时的结点力，根据当时的单元应力  $\boldsymbol{\sigma}_m^i$  按下式计算

$$\mathbf{F}_m^i = \sum (\mathbf{c}^e)^T \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_m^i dV \quad (4-11)$$

$\boldsymbol{\psi}_m^i$  ——第  $m$  级荷载第  $i$  次迭代的不平衡力

$$\boldsymbol{\psi}_m^i = \mathbf{F}_m^i - \mathbf{R}_{m-1}$$

切线劲度矩阵  $\mathbf{K}_{T,m}^i$  根据式 (4-9) 由下式求出

$$\mathbf{K}_{T,m}^i = \sum_e (\mathbf{c}^e)^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T(\boldsymbol{\varepsilon}_m^i) \mathbf{B} dV \right) \mathbf{c}^e \quad (4-12)$$

如果已知第  $m$  级荷载增量时第  $i$  次迭代的近似解  $\delta_m^i$ ，相应的应变  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^i$  为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^i = \mathbf{B} \mathbf{c}^e \delta_m^i \quad (4-13)$$

于是切线弹性矩阵  $\mathbf{D}_T(\boldsymbol{\varepsilon}_m^i)$  可以确定，由 (4-12) 和 (4-11) 分别计算  $(\mathbf{K}_T)_m^i$  和  $\mathbf{F}_m^i$ ，最后利用式 (2-46) 求出  $\Delta \delta_m^i$ ，这个迭代过程由  $i=0$  开始直至  $\Delta \delta_m^i$  足够小，达到一定计算精度内为零时终止。假定最后一次迭代  $i=I$ ，则该级荷载增量的最终位移为

$$\delta_m = \delta_{m-1} + \sum_{i=0}^I \Delta \delta_m^i \quad (4-14)$$

按 (2-46) 求出位移增量  $\Delta \delta_m^i$  后，应力增量为

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_m^i = \mathbf{D}_T(\boldsymbol{\varepsilon}_m^i) \mathbf{B} \mathbf{c}^e \Delta \delta_m^i \quad (4-15)$$

第  $m$  级荷载增量的最终应力为

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \boldsymbol{\sigma}_{m-1} + \sum_{i=0}^I \Delta \boldsymbol{\sigma}_m^i \quad (4-16)$$

一维问题的迭代过程见图 4-2。

可以看出，上一级荷载增量作用下，迭代收敛后仍然存在的不平衡力将转至下一级。

### 2. 3 初应力法

如果在弹性材料内确实存在初应力  $\boldsymbol{\sigma}_0$ ，则材料的应力应变关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4-17)$$

由上式及虚功原理可导出单元的结点力为

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}\delta^e + \int_v \mathbf{B}^T \sigma_0 dV \quad (4-18)$$

集合单元得出以下的有限元支配方程

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{R} + \mathbf{R}_{\sigma_0} \quad (4-19)$$

式中， $\mathbf{R}_{\sigma_0}$  为由初应力  $\sigma_0$  引起的等效结点荷载

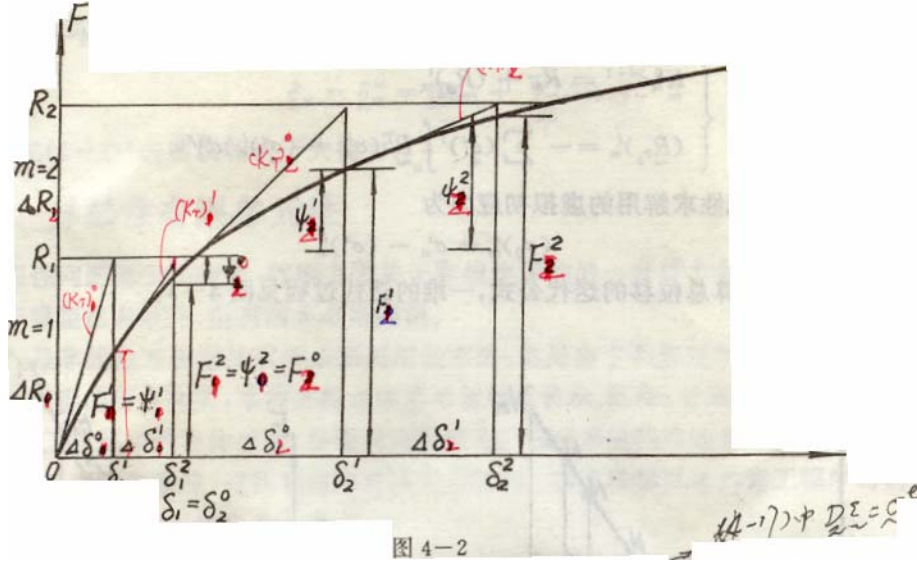
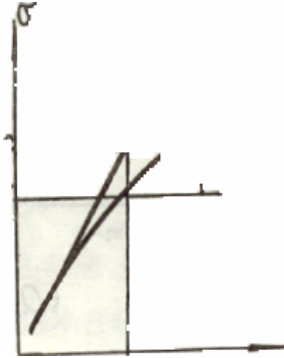


图 4-2

$$\mathbf{R}_{\sigma_0} = - \sum_e (\mathbf{c}^e)^T \int_v \mathbf{B}^T \sigma_0 dV \quad (4-20)$$

对于非线性问题，在求解非线性方程组时，可利用式 (4-19)。此时，非线性的应力应变关系仍由式 (4-17) 表示，但  $\sigma_0$  并非真正的初应力，它是实际应力  $\sigma$  和弹性应力  $\sigma^e$  的差，是一种虚拟的初应力。从图 4-3 可以看出， $\sigma^e = D\varepsilon$  为弹性应力， $\sigma_0$  是由于应力应变非线性而降低的应力 ( $\sigma_0$  为负值)。初应力法就是将初应力  $\sigma_0$  看作是变化的，以此来反映应力和应变之间的非线性关系。通过不断地调整初应力，使线弹性解逼近非线性解。



前面所谈的增量迭代法，在迭代的每一步都要重新形成整体的切线劲度矩阵  $\mathbf{K}_{T,m}^i$  并完整地求解一次线性方程组。如果将式

(2-46) 中的  $\mathbf{K}_{T,m}^i$  改用初始的切线劲度矩阵  $\mathbf{K}_{T,m}^0$  或  $\mathbf{K}_{T,1}^0$ ，就得到常劲度的迭代公式。这相当于求解非线性方程的 Euler 修正 Newton 法， $(\mathbf{K}_T)_1^0$  是加载一开始时的切线劲度矩阵，也就是弹性劲度矩阵。 $\mathbf{K}_{T,m}^0$  可以认为是第  $m$  级荷载增量开始施加时的“弹性”劲度矩阵

$$\mathbf{K}_{T,m}^0 = \mathbf{K}_m^0 = \sum_e (\mathbf{c}^e)^T \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \mathbf{c}^e \quad (4-21)$$

式中的“弹性”矩阵  $\mathbf{D}$  实际上是  $\mathbf{D}_T(\varepsilon_m^0)$ 。式 (2-46) 可写成

$$\begin{cases} \mathbf{K}_m^0 \Delta \delta_m^i = \mathbf{R}_m - \mathbf{F}_m^i \\ \delta_m^{i+1} = \delta_m^i + \Delta \delta_m^i \end{cases}$$

(4-22)

根据式 (4-21) 可得出下面的恒等式

$$\mathbf{K}_m^0 \delta_m^i = \sum (\mathbf{c}^e)^T \int_V \mathbf{B}^T (\sigma^e)_m^i dV \quad (4-23)$$

其中

$$(\sigma^e)_m^i = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{c}^e \delta_m^i \quad (4-24)$$

简称弹性应力。将式 (4-22) 的第二式代入第一式, 并利用等式 (4-23) 及 (4-11) 可得

$$\begin{cases} \mathbf{K}_m^0 \delta_m^{i+1} = \mathbf{R}_m + (\mathbf{R}_0)_m^i \\ (\mathbf{R}_{\sigma_0})_m^i = -\sum (\mathbf{c}^e)^T \int_V \mathbf{B}^T (\sigma_m^i - (\sigma^e)_m^i) dV \end{cases} \quad (4-24)$$

与 (4-20) 相比, 非线性求解用的虚拟初应力为

$$(\sigma_0)_m^i = \sigma_m^i - (\sigma^e)_m^i \quad (4-26)$$

式 (4-25) 是直接计算总位移的迭代公式, 一维的迭代过程见图 4-3。

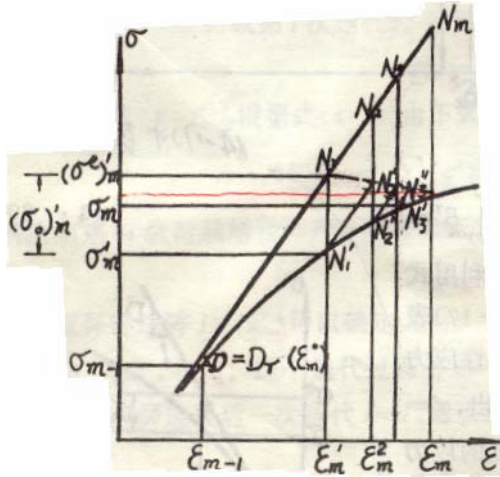


图 4-3

设经过  $M$  次迭代后在容许的精度范围内达到  $\delta_m^{M-1} = \delta_m^M$ , 则迭代结束, 并由  $\delta_m^M = \delta_m$ , 按真实的本构关系求出最后的应力结果。在迭代过程中,  $\sigma_m^i$  和  $(\sigma^e)_m^i$  分别是由  $\delta_m^i$  按真实本构关系和“线弹性”计算出来的应力。 $(\mathbf{R}_{\sigma_0})_m^i$  在迭代过程中并不趋于零, 而是趋于一常数矢量 (图 4-3 (b) 中的  $M$ ), 它是与收敛解的真实应力  $\sigma_m^M = \sigma_m$  和弹性应力  $(\sigma^e)_m^M$  之差相应的等效结点力。 $(\sigma_0)_m^M = \sigma_m - (\sigma^e)_m^M$  是迭代结束时的虚拟初应力。因而, 迭代过程也相当于寻求一个合适的“初应力”场。

由式 (4-25) 可得第  $(i-1)$  次迭代的公式

$$\mathbf{K}_m^0 \delta_m^i = \mathbf{R}_m + (\mathbf{R}_{\sigma_0})_m^{i-1}$$

将它与 (4-25) 相减得

$$\mathbf{K}_m^0 \Delta \delta_m^i = (\mathbf{R}_{\sigma_0})_m^i - (\mathbf{R}_{\sigma_0})_m^{i-1} \quad (4-27)$$

这是求解位移增量的迭代公式。

从图 4-3 (b) 可见, 在进行第二次迭代 (即  $i=1$ ) 时, 若按式 (4-25) 求总位移, 方程右端等于  $M_2'' A_2$ , 若按式 (4-27) 求位移增量, 方程右端为  $M_1' M_1'' = M_2 M_2''$ , 对应于图 4-3 (a) 中的  $(\sigma_0)_m^1$  (线段  $N_1 N_1'$ )。第三次迭代 ( $i=2$ ) 时, 式 (4-25) 右端为  $M_3'' A_3$ , 而式 (4-27) 右端为  $(R_{\sigma_0})_m^2 - (R_{\sigma_0})_m^1 = M_2' M_2'' - M_1' M_1'' = M_2 M_2'$ , 与 (a) 中的  $N_2' N_2''$  所示的应力对应, 经  $M$  次迭代后, 式 (4-27) 右端接近于零, 此时,  $\Delta\delta_m^M$  也趋于零。本级的最后位移为

$$\delta_m = \delta_m^M = \delta_{m-1} + \sum_{i=0}^M \Delta\delta_m^i \quad (4-28)$$

实际上, 式 (4-27) 右端就相当于失衡力。

## 4.2 弹塑性有限单元法

弹塑性问题属于小变形, 因而上节关于非线性弹性的一套基本公式及迭代运算方法仍然适用于弹塑性有限元, 但有两点必须强调。

第一是应力和变形呈非线性关系, 劲度矩阵与应变有关, 是变化的, 本构方程必须用增量形式表示, 非线性方程组的求解必须用增量方法, 这与非线性弹性问题是类似的。

第二是弹塑性问题中的材料本构关系与应力、变形的历史有关, 需要利用加卸载准则判断单元的材料究竟处于弹性状态还是塑性状态, 以决定由应变计算应力时采用何种本构关系。

在按照上节介绍的增量迭代法或初应力法求出位移增量  $\Delta\delta$  后, 应变增量由下式计算

$$\Delta\epsilon = B\Delta\delta^e = Bc^e\Delta\delta \quad (4-29)$$

由应变增量  $\Delta\epsilon$  确定应力增量  $\Delta\sigma$  时, 需要知道  $\Delta\epsilon$  和  $\Delta\sigma$  之间的关系。弹塑性材料的本构方程为

$$d\sigma = D_{ep}d\epsilon = (D - D_p)d\epsilon \quad (4-30)$$

这是以无限小增量  $d\sigma$  和  $d\epsilon$  的形式给出的。而在有限元数值计算中, 由于荷载增量是以有限

大小的形式  $\Delta R$  给出, 所以, 应力增量和应变增量都以有限大小的形式给出, 设分别是  $\Delta\sigma$  和  $\Delta\epsilon$ , 可以利用数值积分的方法从式 (4-30) 得到  $\Delta\epsilon$  和  $\Delta\sigma$  之间的关系

$$\Delta\sigma = \int_{\epsilon_{m-1}}^{\epsilon_{m-1} + \Delta\epsilon} D_{ep} d\epsilon \quad (4-31)$$

在荷载增量  $\Delta R$  作用前后, 所考虑单元的高斯积分点上的介质究竟处于什么状态, 可以用第三章介绍的应变空间内的加卸载准则来判断。



$$l_2 = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon} = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T d\boldsymbol{\sigma}^e \begin{cases} < 0 & \text{卸载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ > 0 & \text{加载} \end{cases} \quad (4-32)$$

几何上就是当弹性应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}^e$  指向屈服面外侧，使

$$f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}^e, \boldsymbol{\kappa}) > 0 \quad (4-33)$$

时为加载，材料处于塑性状态。当弹性应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}^e$  指向屈服面内侧或与屈服面相切，使

$$f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}^e, \boldsymbol{\kappa}) \leq 0 \quad (4-34)$$

时为卸载和中性变载，介质处于弹性状态。值得注意的是，这儿用于判断的应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}^e$  是弹性应力增量，真正的应力增量  $d\boldsymbol{\sigma}$  还未求出，当  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  已知时，很容易由弹性本构关系求出  $d\boldsymbol{\sigma}^e$ ，因而实际上是以应变增量  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  来判断的。在有限元方法中，根据式（4-33）和（4-34），可由应变增量  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  来判断材料所处的状态。

设某个单元的某个积分点在荷载  $\mathbf{R}_{m-1}$  作用下的应力为  $\boldsymbol{\sigma}_{m-1}$ ，内变量为  $\boldsymbol{\kappa}_{m-1}$ ，施加荷载增量  $\Delta\mathbf{R}_m$  后，产生的应变增量为  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ，弹性应力增量  $\Delta\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 。

如果

$$f_m = f(\boldsymbol{\sigma}_{m-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^e, \boldsymbol{\kappa}_{m-1}) \leq 0$$

表示应力  $\boldsymbol{\sigma}_{m-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^e$  在屈服面内（弹性或卸载）或在屈服面上（中性变载），没有新的塑性应变产生，因而该点处于弹性状态，可采用弹性本构关系由  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  求  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ ，即

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4-35)$$

如果

$$f_{m-1} = f(\boldsymbol{\sigma}_{m-1}, \boldsymbol{\kappa}_{m-1}) = 0$$

$$f_m = f(\boldsymbol{\sigma}_{m-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^e, \boldsymbol{\kappa}_{m-1}) > 0$$

说明该点始终处于塑性状态，产生了新的塑性应变。当应变增量  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  较小时，有

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4-36)$$

当  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  较大时，须按（4-31）式计算应力增量  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ 。如果

$$f_{m-1} = f(\boldsymbol{\sigma}_{m-1}, \boldsymbol{\kappa}_{m-1}) < 0$$

$$f_m = f(\boldsymbol{\sigma}_{m-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^e, \boldsymbol{\kappa}_{m-1}) > 0$$

即从荷载增量施加前的弹性状态进入施加后的塑性状态，此时，可由条件

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{m-1} + r\Delta\boldsymbol{\sigma}^e, \boldsymbol{\kappa}_{m-1}) = 0 \quad (4-37)$$

确定应力增量中的弹性部分与总应力增量  $\Delta\sigma$  之比  $r$  ( $0 < r < 1$ , 见图 4-4 (a))。也可以通过对屈服函数  $f$  采用线性内插得到

$$r = \frac{-f_{m-1}}{f_m - f_{m-1}} \quad (4-38)$$

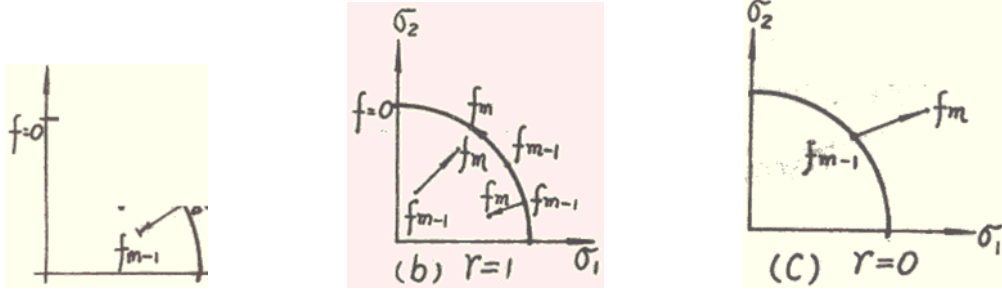


图 4-4

在求出  $r$  之后, 根据式 (4-31) 可求出应力增量

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \int_{\varepsilon_{m-1}}^{\varepsilon_{m-1}+r\Delta\varepsilon} D d\varepsilon + \int_{\varepsilon_{m-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon_{m-1}+\Delta\varepsilon} D_{ep} d\varepsilon \\ &= rD\Delta\varepsilon + \int_{\varepsilon_{m-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon_{m-1}+\Delta\varepsilon} D_{ep} d\varepsilon = D\Delta\varepsilon - \int_{\varepsilon_{m-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon_{m-1}+\Delta\varepsilon} D_p d\varepsilon \end{aligned} \quad (4-39)$$

当  $\Delta\varepsilon$  很小时 (要求  $\Delta R$  足够小), 上式可改写为下面的近似公式

$$\begin{cases} \sigma'_m = \sigma_{m-1} + rD\Delta\varepsilon \\ \Delta\sigma = \left[ rD + (1-r)D_{ep}(\sigma'_m) \right] \Delta\varepsilon \\ \quad = D\Delta\varepsilon - (1-r)D_p(\sigma'_m)\Delta\varepsilon \end{cases} \quad (4-40)$$

从式 (4-38) 可知, 只要取  $r=1$ , 式 (4-39) 和 (4-40) 都成为 (4-35) 式, 表明增量  $\Delta R$  施加前后, 材料状态的变化是弹性到弹性, 或塑性卸载或中性变载 (图 4-4 (b)), 该点介质的反应是纯弹性的。如果取  $r=0$ , 式 (4-39) 和 (4-40) 成为式 (4-36), 表明材料处于塑性加载状态 (图 4-4 (c))。

当  $\Delta\varepsilon$  较大, 须采用式 (4-31) 或 (4-39) 计算  $\Delta\sigma$  时, 由于被积分的  $D_{ep}$  或  $D_p$  很难写成显式, 因而可以把与积分对应的塑性变形部分再分为若干子增量, 用分段线性的计算结果去逼近积分值, 例如将塑性变形部分  $(1-r)\Delta\varepsilon$  分为  $N$  个相等的子增量  $\Delta\Delta\varepsilon$  即

$$\Delta\Delta\varepsilon = \frac{(1-r)\Delta\varepsilon}{N}$$

则式 (4-39) 成为

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= rD\Delta\varepsilon + \sum_{j=1}^N [D_{ep}(\sigma^j)]_T \Delta\Delta\varepsilon \\ &= (rD + \frac{1-r}{N} \sum_{j=1}^N [D_{ep}(\sigma^j)]_T) \Delta\varepsilon \end{aligned} \quad (4-41)$$

整个计算过程见图 4-5。

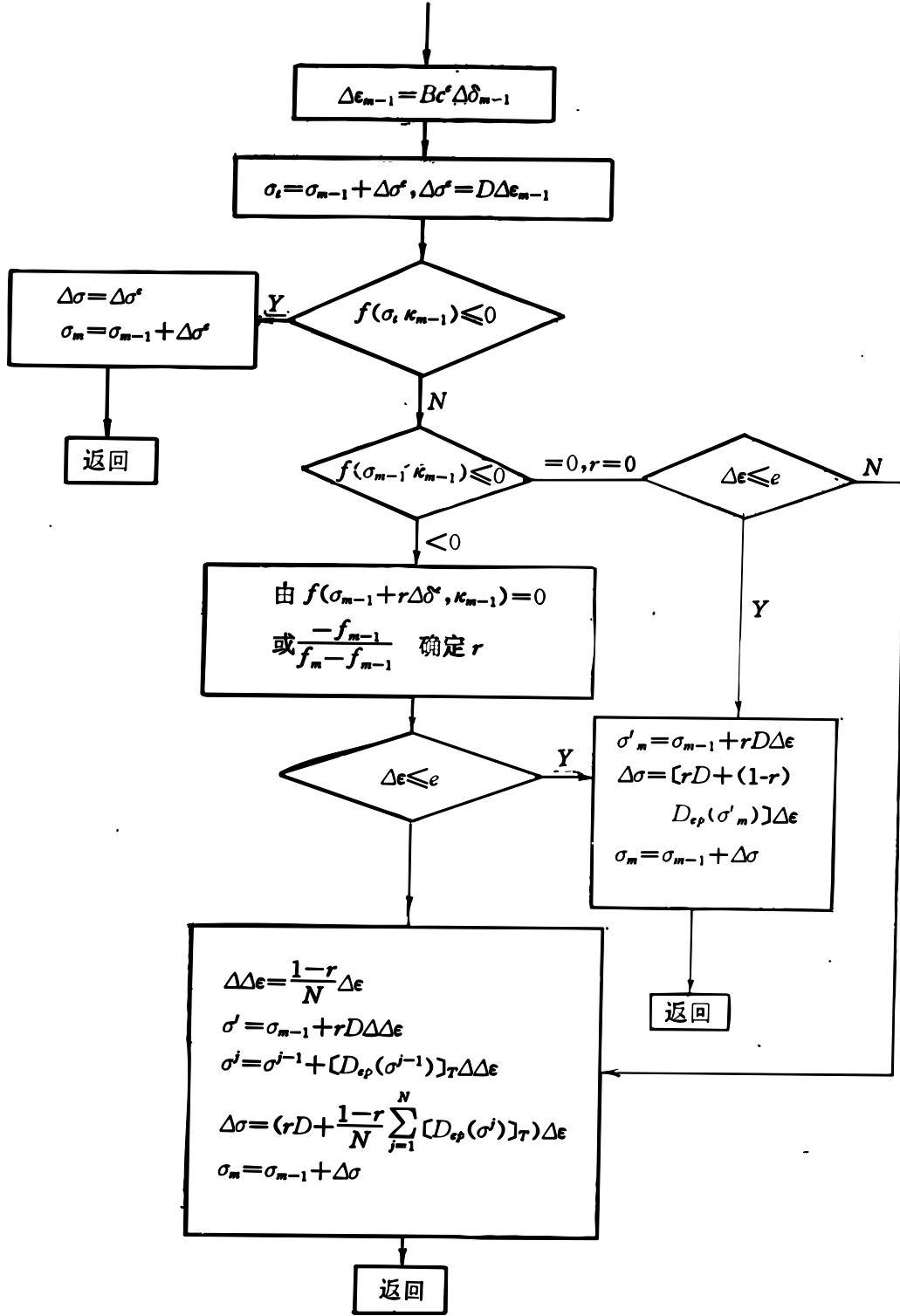


图 4-5

### 4.3 特殊单元在非线性有限元中的应用

在非线性有限元分析中,为了模拟材料的某些特殊性质或结构上的一些特征,经常要使用一些特殊单元。

#### 4.3.1 不抗拉单元

对于由不抗拉材料,如破碎岩体、土体,可采用不抗拉单元。此时要求出单元的应力,与材料内的初应力迭加,再计算主应力。并检验是否出现拉应力,对出现的主拉应力需要进行"应力转移"。例如当 $\sigma_1 > 0$ 时,认为 $\sigma_1$ 不可能大于零,超过部分应转移至周围其它单元,并按应力与主应力的关系,确定实际存在的应力 $\sigma$ ,再按

$$\mathbf{F} = \sum_e (\mathbf{c}^e)^T \int_v \mathbf{B}^T \sigma dV$$

求出结点力,进行迭代计算。

类似地,可以定义低抗拉单元。

#### 4.3.2 层状单元

若岩体中有一组没有胶结的平行层面,那么这组层面就决定了岩体不能承受拉力的方向,因而方向明确。设层面的产状为倾向 $\alpha$ ,倾角 $\beta$ ,现以北方向 $N$ 为整体坐标系的 $x$ 正向, $E$ 为 $y$ 正向,按右手系, $z$ 向下为正。并令局部坐标系的 $z'$ 正向与层面的向上法线一致, $x'$ , $y'$ 位于层面内。则 $z'$ 的方向余弦为

$$\begin{cases} l = \cos \alpha \sin \beta \\ m = \sin \alpha \sin \beta \\ n = -\cos \beta \end{cases} \quad (4-42)$$

由于这类介质有强烈的各向异性,破坏的形式只可能是沿层面的剪切滑移或垂直层面的拉开。由有限元方法求出 $\sigma$ 后,根据弹性力学公式可求出层面的法向应力 $\sigma_{z'}$ ,当 $\sigma_{z'} > 0$ 时,取 $\sigma_{z'} = 0$ 。按前面一样的方法计算 $\mathbf{F}$ ,进行迭代计算。

如果 $\sigma_{z'} < 0$ 由,需要检查是否沿层面发生剪切破坏,常规的做法是,如果

$$\tau = \sqrt{\tau_{x'z'}^2 + \tau_{y'z'}^2} \leq c' - f'\sigma_{z'}$$

不发生应力转移。如果 $\tau_{x'z'}$ 和 $\tau_{y'z'}$ 中有一个或合力大于 $c' - f'\sigma_{z'}$ ,那么层面单元"实际"存在的应力只能是 $f'\sigma_{z'}$ ,据此计算相应的结点力 $\mathbf{F}$ ,进行迭代计算。

殷有泉建议对这种由层面形成的层状材料,采用修正的M-C屈服准则进行弹塑性分析。材料的M-C屈服条件为

$$f(\sigma, \kappa) = (\tau_{z'x'}^2 + \tau_{z'y'}^2 + a^2 c'^2)^{1/2} + f'\sigma_{z'} - c' \quad (4-43)$$

式中, $a^2$ 是一个小参数,引入它的目的是用双曲线屈服面代替顶点为奇点的摩尔库仑屈服面。 $c'$ 和 $f'$ 是层面材料的凝聚力和摩擦系数,它们均是内变量 $\kappa$ 的函数,现取 $\kappa = \theta^p$ ,则

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f' & 0 & \frac{\tau_{y'z'}}{\beta} & \frac{\tau_{x'z'}}{\beta} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} (K - \frac{2}{3}G)f' & (K - \frac{2}{3}G)f' & (K + \frac{4}{3}G)f' & 0 & G \frac{\tau_{z'y'}}{\beta} & G \frac{\tau_{z'x'}}{\beta} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{aligned}
A &= \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \theta_p} \mathbf{I}'^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\
&= \left( K + \frac{4}{3} G \right) f'^2 + G \frac{\beta^2 - a^2 c'^2}{\beta^2} + f' \left( \frac{\partial c'}{\partial \theta^p} - \frac{\partial f'}{\partial \theta^p} \sigma_{z'} \right) - \frac{a^2 c' f'}{\beta} \frac{\partial c'}{\partial \theta^p}
\end{aligned}$$

式中

$$\beta = (\tau_{y'z'}^2 + \tau_{x'z'}^2 + a^2 c'^2)^{1/2}$$

#### 4.3.3 节理单元

在岩体中存在软弱夹层，如断层、节理、裂隙等，宽度很小，且夹层两侧的位移不同。为了模拟这种间断的不连续性质，可以采用节理单元。它是由 Goodman 首先提出的，有时也称 Goodman 单元，为了简单明了起见，这儿仅讨论平面问题的节理单元。

节理单元的几何性质可用它两端点的坐标和它的厚度来描述。对于四结点的节理单元（图 4-6），每个端点有一对结点，可以采用相同的坐标。令

$$\xi = \frac{2x}{l}$$

按线性位移模式，则底面任一点的位移为

$$\delta_B = \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4-44)$$

式中，

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$$

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

顶面任一点的位移为

$$\delta_T = \begin{Bmatrix} u_T \\ v_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4-45)$$

因而，节理的相对位移

$$\Delta \delta = \delta_T - \delta_B = \mathbf{N} \delta^e \quad (4-46)$$

式中

$$\Delta \delta = \begin{Bmatrix} u_T - u_B \\ v_T - v_B \end{Bmatrix}$$

$$\delta^e = [u_1 v_1 u_2 v_2 u_3 v_3 u_4 v_4]^T$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix}$$

关于劲度矩阵的推导有两种做法：

(1) 设节理单元的应力和相对位移之间有如下关系：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k}' \Delta \boldsymbol{\delta}$$

式中

$$\boldsymbol{\sigma} = [\tau_{x'y'} \quad \sigma_{z'}]^T$$

$$\mathbf{k}' = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix}$$

其中， $k_s$  和  $k_n$  分别为节理的切向和法向劲度系数。由虚功原理可得节理单元的劲度矩阵为。

$$\mathbf{k} = \int_{-l/2}^{l/2} \mathbf{N}^T \mathbf{k}' \mathbf{N} dx$$

$$= \begin{bmatrix} 2k_s & & & & & & & \\ 0 & 2k_n & & & & & & \\ k_s & 0 & 2k_s & & & & & \\ 0 & k_n & 0 & 2k_n & & & & \\ -k_s & 0 & -2k_s & 0 & 2k_s & & & \\ 0 & -k_n & 0 & -2k_n & 0 & 2k_n & & \\ -2k_s & 0 & -k_s & 0 & k_s & 0 & 2k_s & \\ 0 & -2k_n & 0 & -k_n & 0 & k_n & 0 & 2k_n \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

$\mathbf{k}$  是按局部坐标建立的，在整体坐标系中（图 4-7）需要进行转换，整体坐标系下的节理单元劲度矩阵为

$$\mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T}$$

其中，转换矩阵为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \theta & & 0 \\ & \theta & \\ & & \theta \\ 0 & & & \theta \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

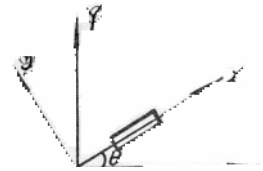


图 4-7

关于  $k_n$  和  $k_s$  的取值，可以通过试验确定它们的取值。一般来说，当

$\sigma_{z'} < 0$  取  $k_n = 10^7 \text{ T/m}^3$ ，以模拟接触面不相互嵌入；

$\sigma_{z'} > 0$  取  $k_n = 1 \text{ T/m}^3$ ，以模拟不抗拉。

关于  $k_s$  的取值：试验表明， $k_s$  与  $\delta_s = u_T - u_B$  之间呈非线性关系，可近似用双曲线表示（图 4-8），由此推出

$$k_s = (1 - \frac{R_f \tau_{x'z'}}{\sigma_z \text{tg} \delta})^2 \left[ k_1 \gamma_w (\frac{\sigma_{z'}}{p_a})^n \right]$$

其中系数  $R_f$ ,  $k_1$ ,  $n$  由三轴试验得出。 $\delta$  为节理单元材料与接触材料之间的外摩擦角, 可取  $\delta = 0.8\varphi$  ( $\varphi$  为节理材料的内摩擦角),  $\gamma_w$  为水容重,  $p_a$  为大气。

(2) 根据修正的 M-C 准则导出  $\mathbf{D}_p$  矩阵

此时, 可以认为是平面应变情况, 按修正的 M-C 准则得节理单元的本构关系,



图 4-8

$$d\sigma = \bar{\mathbf{D}}_{ep} d\delta = (\bar{\mathbf{D}} - H(l)\bar{\mathbf{D}}_p) d(\Delta\delta)$$

式中

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix}$$

$$k_s = \frac{G}{b} \quad k_n = (K + \frac{4}{3}G)/b$$

$$\bar{\mathbf{D}}_p = \begin{bmatrix} k_s^2 \frac{\tau_{x'z'}^2}{\beta^2} & f k_s k_n \frac{\tau_{x'z'}}{\beta} \\ f k_s k_n \frac{\tau_{x'z'}}{\beta} & f'^2 k_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = f'^2 k_n + k_s \frac{f'^2 - a^2 c'^2}{\beta^2} - \frac{f'}{b} \left( \frac{a^2 c'}{\beta} \frac{\partial c'}{\partial \theta^p} + \sigma_{z'} \frac{\partial f'}{\partial \theta^p} - \frac{\partial c'}{\partial \theta^p} \right)$$

$$l = f'(du_T - du_B) + \frac{\tau_{x'z'}}{\beta} (dv_T - dv_B)$$

节理单元劲度矩阵为  $\mathbf{k} = \int_v \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{D}}_{ep} \mathbf{N} dx$

再转化为整体坐标下的单元劲度矩阵

$$\mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T}$$

在应用屈服准则和特殊单元时, 应注意:

对主要结构面, 如断层, 或者结构面数量很少时, 应单独模拟, 一般剖分为普通单元压扁后的薄层单元, 此时常采用 D-P 屈服准则。若结构面厚度与单元尺寸相比很小, 可以节理单元模拟, 此时, 普通单元采用 D-P 准则, 节理单元则同时用 M-C 准则和不抗拉或低抗拉准则。

如果结构面众多, 且厚度很小, 有两种选择: 当结构面间距大于单元尺寸时, 结构面仍以节理单元模拟; 反之, 若结构面间距远小于单元尺寸时, 可采用层状单元, 此时应同时用 M-C 准则和不抗拉或低抗拉准则, 弹塑性矩阵是各向异性矩阵。

## 第五章 接触问题的非线性有限元分析

### 5.1 引言

在工程结构中，经常会遇到大量的接触问题。火车车轮与钢轨之间，齿轮的啮合是典型的接触问题。在水利和土木工程中，建筑物基础与地基，混凝土坝分缝两侧，地下洞室衬砌与围岩之间，岩体结构面两侧都存在接触问题。对于具有接触面的结构，在承受荷载的过程中，接触面的状态通常是变化的，这将影响接触体的应力场。而应力场的改变反过来又影响接触状态，这是一个非线性的过程。由于接触问题对工程实践的重要性，本章将作为专门问题进行研究。

最早对接触问题进行系统研究的是 H. Hertz，他在 1882 年发表了《弹性接触问题》一书中，提出经典的 Hertz 弹性接触理论。后来 Boussinesq 等其他学者又进一步发展了这个理论。但他们都是采用一些简单的数学公式来研究接触问题，因而只能解决形状简单（如半无限大体）、接触状态不复杂的接触问题。

二十世纪六十年代以后，随着计算机和计算技术的发展，使应用数值方法解决复杂接触问题成为可能。目前，分析接触问题的数值方法大致可分为三类：有限元法、边界元法和数学规划法。

数学规划法是一种优化方法，求解接触问题时，根据接触准则或变分不等式建立数学模型，然后采用二次规划或罚函数方法给出解答。

边界元方法也被用来求解接触问题，1980 年和 1981 年，Anderson 先后发表两篇文章，用于求解无摩擦弹性接触和有摩擦弹性接触问题。近年来虽有所发展，但仍主要用于解决弹性接触问题。

就目前的发展水平来看，数学规划法和边界元法只适合于解决比较简单的弹性接触问题。对于相对复杂的接触非线性问题，如大变形、弹塑性接触问题，还是有限元方法比较成熟、比较有效。

早在 1970 年，Wilson 和 Parsons 提出一种位移有限元方法求解接触问题。Chan 和 Tuba, Ohte 等进一步发展了这类方法。它的基本思想是假定接触状态，求出接触力，检验接触条件，若与假定的接触状态不符，则重新假定接触状态，直至迭代计算得到的接触状态与假定状态一致为止。具体做法是：

对于弹性接触的两个物体，通过有限元离散，建立支配方程

$$\mathbf{K}_1 \boldsymbol{\delta}_1 = \mathbf{R}_1 \quad (5.1)$$

式中， $\mathbf{K}_1$  为初始的整体劲度矩阵，它与接触状态有关，通常根据经验和实际情况假定。 $\boldsymbol{\delta}_1$

是结点位移列阵， $\mathbf{R}_1$  为结点荷载列阵。

求解式 (5.1)，得到结点位移  $\boldsymbol{\delta}_1$ ，再计算接触点的接触力  $\mathbf{P}_1$ ，将  $\boldsymbol{\delta}_1$  和  $\mathbf{P}_1$  代入与假定接触状态相应的接触条件，如果不满足接触条件，就要修改接触状态。根据修改后新的接触状态，建立新的劲度矩阵  $\mathbf{K}_2$  和支配方程

$$\mathbf{K}_2 \boldsymbol{\delta}_2 = \mathbf{R}_2 \quad (5.2)$$

再由式 (5.2) 解得  $\boldsymbol{\delta}_2$ ，进一步计算接触力  $\mathbf{P}_2$ ，将  $\boldsymbol{\delta}_2$  和  $\mathbf{P}_2$  代入接触条件，验算接触条件是



否满足。这样不断的迭代循环，直至 $\delta_n$ 和 $P_n$ 满足接触条件为止，此时得到的解答就是真实接触状态下的解答。

在以上的研究中，没有考虑接触面的摩擦力。不考虑摩擦力的接触过程是一种可逆的过程，即最终结果与加载途径无关。此时，只需要进行一次加载，就能得到最终稳定的解。如果考虑接触面的摩擦力，接触过程就是不可逆的，必须采用增量加载的方法进行接触分析。1973年，Tusta 和 Yamaji 的文章详细讨论了接触过程的可逆性和不可逆性。

从 Wilson 和 Parsons 的方法可看出，每一次接触状态的改变，都要重新形成整体刚度矩阵，求解全部的支配方程，既占内存，又费机时。实际上，接触状态的改变是局部的，只有与接触区域有关的一小部分需要变动，为此又提出一些改进的方法。

1975年，Francavilla 和 Zienkiewicz 提出相对简单的柔度法。图 5.1 示出两个相互接触的物体 A 和 B，假定 A 上有外力  $R$  作用，B 有固定边界。接触面作用在 A 上的接触力是  $P_j^A$ ，作用在 B 上的接

触力是  $P_j^B$ ，对于二维问题，

$$P_j^A = \begin{Bmatrix} P_j^t \\ P_j^n \end{Bmatrix}^A \quad P_j^B = \begin{Bmatrix} P_j^t \\ P_j^n \end{Bmatrix}^B \quad (5.3)$$

这些接触力是未知的，假定有  $m$  个接触点对，则增加了  $4m$  个未知量，为此需要补充  $4m$  个方程。现列出接触点的柔度方程

$$\begin{aligned} \delta_{i,B} &= \sum_{j=1}^m C_{ij}^B P_j^B \\ \delta_{i,A} &= \sum_{j=1}^m C_{ij}^A P_j^A + \sum_{k=1}^{m_1} C_{ik}^A R_k^A \end{aligned} \quad (5.4)$$

其中， $\delta_{i,A}$  和  $\delta_{i,B}$  分别是物体 A 和 B 在接触点  $i$  处的位移， $C_{ij}^A$  和  $C_{ij}^B$  分别表示物体 A 和 B 因  $j$  点作用单位力时在  $i$  点引起的位移（即柔度系数）所组成的柔度子矩阵， $m_1$  是外荷载作用的点数， $R_k^A$  为第  $k$  个荷载作用点上的荷载向量。

如果物体 A 和 B 之间的接触属于连续接触，则接触条件为

$$\delta_{i,A} = \delta_{i,B} + \delta_{i,0} \quad (5.5)$$

$$P_j^A = -P_j^B \quad (5.6)$$

(5.5) 和 (5.6) 是  $4m$  个补充方程，式中， $\delta_{i,0}$  是第  $i$  个接触点对的初始间隙向量。由于式

(5.6) 的存在，令  $P_j^A = -P_j^B = P_j$ ，未知量数目减少，增加的未知量剩下  $2m$  个。将式 (5.4)

和 (5.6) 代入 (5.5) 得

$$\sum_{j=1}^m (C_{ij}^A + C_{ij}^B) P_j = -\sum_{k=1}^{m_1} C_{ik}^A R_k^A + \delta_{i,0} \quad (5.7)$$

式 (5.7) 共有  $2m$  个补充方程。

对于滑动接触和不接触的自由边界，同样可根据相应的接触条件列出与式 (5.7) 类似的补充方程求解。

引入接触条件后，接触状态变化时，计算对象的整体劲度矩阵不再改变，出现的问题是增加了未知量数，需要建立补充方程。但由于补充方程 (5.7) 中， $\mathbf{C}_{ij}^A$ 、 $\mathbf{C}_{ij}^B$  和  $\mathbf{C}_{ik}^A$  不随接触状态的改变而变化，而且接触点的数目远小于整体的结点数，因而可大大节约计算时间，提高了求解接触问题的效率。

另外一种提高接触问题计算效率的方法是把接触点对作为“单元”考虑。1979 年，Okamoto 和 Nakazawa 提出“接触单元”，它是根据接触点对位移与力之间的接触条件建立的。接触单元和普通单元一样，可以直接组装到整体劲度矩阵中去。然后对支配方程进行“静力凝聚”，保留接触面各点的自由度，得到在接触点凝聚的支配方程。由于接触点数远小于结点数，凝聚后的方程阶数比未凝聚时方程阶数低得多。当接触状态改变时，只需对凝聚的支配方程进行修正和求解，因而可节约计算时间。

1975 年，Schafer 根据虚功原理推导了“连接单元”，也可以象普通单元一样地形成和组装到整体劲度矩阵中。连接单元包含有接触面的接触特性，通过改变形成单元的某些参数，来反映不同的接触状态。

1977 年，J. T. Stadter 和 R. O. Weiss 提出间隙元方法。“间隙元”是一种虚设的具有一定物理性质的特殊接触单元，其内部的应力应变反映了接触状态，并利用塑性力学中的“应力不变”准则来模拟接触过程。

目前的接触研究主要集中在弹性接触问题，关于弹塑性接触问题的研究也有了相当的进展，但有关大变形弹塑性接触的研究成果还很少。

## 5.2 弹性接触问题

### 5.2.1 基本假定

在分析弹性接触问题时，有如下的基本假定：

- (1) 接触物体的材料是线弹性的，位移和变形是微小的；
- (2) 作用在接触面上的摩擦力服从 Mohr-Coulomb 准则；
- (3) 接触面连续平滑。

### 5.2.2 接触条件

所谓接触条件，是指接触面上接触点处的位移和力的条件。利用接触条件，可以判断接触物体之间的接触状态。接触状态可分为三类：连续接触，滑动接触和自由边界。为了方便地表示接触条件，需要在接触面上建立局部坐标系  $o'x'y'z'$ ，如图 5.2 所示。由于一般情况下，A、B 两个物体在接触点处无公共切面和公共法线，因此，局部坐标系的  $z'$  轴只能尽可能地接近公法线方向， $o'x'y'$  平面尽可能地接近公切面。

令  $\delta_{ji}$  和  $P_{ji}$  分别是第  $j$  个接触物体 ( $j=A, B$ ) 沿第  $i$  个局部坐标 ( $i=x', y', z'$ ) 的位移和接触力，则三类接触条件可表示为：

- (1) 连续接触条件

$$P_{Ai} = -P_{Bi} \quad (i=x', y', z') \quad (5.8)$$

$$\delta_{Az'} = \delta_{Bz'} + \delta_{0z'} \quad \delta_{Ai} = \delta_{Bi} \quad (i=x', y') \quad (5.9)$$

同时要满足沿接触面的切平面方向不滑动的条件：

$$P_{Bz'} \leq 0 \text{ 和 } \sqrt{P_{Bx'}^2 + P_{By'}^2} \leq f|P_{Bz'}| \quad (5.10)$$

以上式中， $\delta_{0z'}$  是接触面在  $z'$  方向的初始间隙， $f$  是接触面之间的滑动摩擦系数。

(2) 滑动接触条件

$$\delta_{Az'} = \delta_{Bz'} + \delta_{0z'} \quad (5.11)$$

$$P_{Ai} = -P_{Bi} \quad (i=x', y', z') \text{ 或者表示为 } P_{Az'} = -P_{Bz'} \text{ 和 } \sqrt{P_{Bx'}^2 + P_{By'}^2} > f|P_{Bz'}| \quad (5.12)$$

其中， $P_{Bx'} = f|P_{Bz'}|\cos\theta$ ， $P_{By'} = f|P_{Bz'}|\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{P_{Bx'}}{\sqrt{P_{Bx'}^2 + P_{By'}^2}}, \quad \sin\theta = \frac{P_{By'}}{\sqrt{P_{Bx'}^2 + P_{By'}^2}}$$

(3) 自由边界条件

$$P_{Ai} = -P_{Bi} = 0 \quad (i=x', y', z') \quad (5.13)$$

$$\delta_{Az'} > \delta_{Bz'} + \delta_{0z'} \quad (5.14)$$

以上接触条件中出现的位移和接触力通常都是未知量，因此需要采用迭代算法，即首先假定接触状态，根据假定的接触状态建立有限元求解的支配方程，求解方程得到接触面的位移和接触力，并校核接触条件是否与原来假定的接触状态相符。若不同，就要修正接触状态，这样不断地循环，直到接触状态稳定为止。实际上，这是一个局部的几何非线性问题。

### 5.2.3 接触问题的可逆性

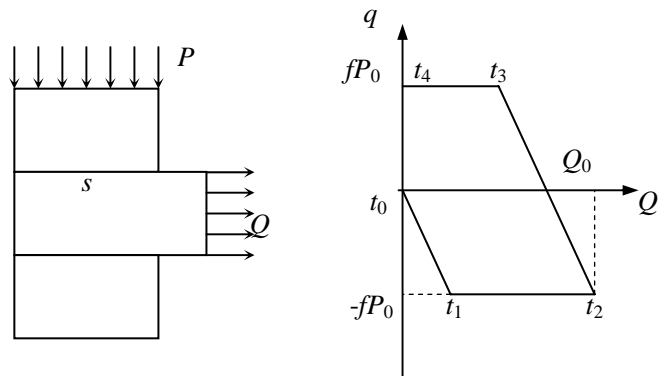
对于接触问题，存在可逆和不可逆两种接触状态。所谓“可逆”，是指沿不同的加载途径，其最终的结果是相同的。“不可逆”则是指对于不同的加载途径，最后的结果不同。发生不可逆过程的原因是由于接触面出现了滑动摩擦，下面的例子可以说明这一点。

图 5.3 示出一个由 A、B、C 三个物体组成的接触问题。物体 A 上面作用有匀布荷载  $R$ ，左边为铰支座。物体 C 左边和下面均有铰支座。物体 B 在匀布荷载  $Q$  的作用下，可以沿着上下两个接触面滑动。加载分三步：

- (1) 施加载荷  $R$ ，并保持  $R_0$  不变；
- (2) 施加载荷  $Q$ ，从 0 增加到  $Q_0$ ；
- (3) 逐渐减小荷载  $R$ ，回到 0。

现考察 A、B 接触面上某一点  $s$  的切向力  $q$  随荷载  $Q$  的变化过程。当  $Q=0$  时，假定  $q=0$ 。随着  $Q$  的增大， $q$  也增大，直到物体 B 发生滑动，此时  $q=-fP_0$ ，见图 5.3 中的  $t_1$  点。 $q$  保持此值，直至  $Q=Q_0$  为止，此时，相应的点为  $t_2$ 。接着， $Q$  开始减小，从平衡的角度， $q$  也减小，逐渐到零。由于这时  $Q$  还未减小到零， $q$  会继续减小，实际上是改变符号，向相反方向增加，直到  $q=fP_0$  ( $t_3$  点)，当  $Q$  减小到零时，回到点  $t_4$ 。

可以看出，由于接触面滑动摩擦的存在，最终状态  $t_4$  与初始状态  $t_0$  是不同的，说明切向



接触力是不可逆的。

因此，凡是考虑接触面切向摩擦力的接触问题，都应当按复杂加载过程来研究，即通过增量的方式求解。对于不考虑摩擦的可逆过程，是一种简单加载过程，可以一步加载完成求解。

### 5.3 弹性接触问题有限元基本方程和柔度法求解

假设A、B是相互接触的两个物体，为了研究的方便，将它们分开，代之以接触力 $\mathbf{P}^A$ 和 $\mathbf{P}^B$ ，如图 5.4 所示。然后建立各自的有限元支配方程：

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_A \boldsymbol{\delta}^A &= \mathbf{R}^A + \mathbf{P}^A \\ \mathbf{K}_B \boldsymbol{\delta}^B &= \mathbf{R}^B + \mathbf{P}^B\end{aligned}\quad (5.15)$$

式中， $\mathbf{K}_A$ 、 $\boldsymbol{\delta}^A$ 和 $\mathbf{R}^A$ 分别是物体A的整体劲度矩阵、结点位移列阵和外荷载， $\mathbf{K}_B$ 、 $\boldsymbol{\delta}^B$ 和 $\mathbf{R}^B$ 分别是物体B的整体劲度矩阵、结点位移列阵和外荷载。

显然，接触力 $\mathbf{P}^A$ 和 $\mathbf{P}^B$ 都是增加的未知量，无法由式（5.15）求出，必须根据接触面上接触点对的相容条件确定。

设A、B上的接触点对为 $i^A$ 和 $i^B$ （ $i=1, 2, \dots, m$ ），假定劲度矩阵 $\mathbf{K}_A$ 和 $\mathbf{K}_B$ 非奇异，可求逆，则由式（5.15）得到接触点的柔度方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_i^A &= \sum_{j=1}^m \mathbf{C}_{ij}^A \mathbf{P}_j^A + \sum_{k=1}^{n_A} \mathbf{C}_{ik}^A \mathbf{R}_k^A \\ \boldsymbol{\delta}_i^B &= \sum_{j=1}^m \mathbf{C}_{ij}^B \mathbf{P}_j^B + \sum_{k=1}^{n_B} \mathbf{C}_{ik}^B \mathbf{R}_k^B\end{aligned}\quad (5.16)$$

式中， $i, j=1, 2, \dots, m$ 表示结点号， $m$ 是接触点对数目， $n_A$ 、 $n_B$ 分别为作用在物体A和B上外荷载的作用点数， $\boldsymbol{\delta}_i^A$ 和 $\boldsymbol{\delta}_i^B$ 表示物体A和B上接触点 $i$ 的位移

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}_i^A &= [\delta_{ix}^A \quad \delta_{iy}^A \quad \delta_{iz}^A]^T \\ \boldsymbol{\delta}_i^B &= [\delta_{ix}^B \quad \delta_{iy}^B \quad \delta_{iz}^B]^T\end{aligned}$$

$\mathbf{P}_j^A$ 、 $\mathbf{P}_j^B$ 是A和B上接触点 $j$ 的接触力

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_j^A &= [P_{jx}^A \quad P_{jy}^A \quad P_{jz}^A]^T \\ \mathbf{P}_j^B &= [P_{jx}^B \quad P_{jy}^B \quad P_{jz}^B]^T\end{aligned}$$

$\mathbf{R}_k^A$ 、 $\mathbf{R}_k^B$ 为A和B上结点 $k$ 的外荷载

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_k^A &= [R_{kx}^A \quad R_{ky}^A \quad R_{kz}^A]^T \\ \mathbf{R}_k^B &= [R_{kx}^B \quad R_{ky}^B \quad R_{kz}^B]^T\end{aligned}$$

$\mathbf{C}_{ij}^A$ 、 $\mathbf{C}_{ij}^B$ 表示物体A和B上，由 $j$ 点的单位力引起的 $i$ 点在 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 三个方向的位移，是一个 $3 \times 3$ 阶的柔度矩阵。

在列出相容条件，求解接触问题之前，有两个问题需要解决。

首先是消除刚体位移的问题。因为得到方程（5.16）的前提是 $\mathbf{K}_A$ 和 $\mathbf{K}_B$ 非奇异可求逆，也

就是说物体A和B要有足够的约束，不会发生刚体位移。但是有些接触物问题中，可能会有某个物体由于约束不够产生刚体位移，此时须对刚体位移进行处理。

以图 5.4 中的物体A为例，假定它的约束不够，则 $\mathbf{K}_A$ 为奇异矩阵，记为 $\mathbf{K}'_A$ 。引入虚拟的约束，消除A的刚体位移，则（5.15）的第一式可改写为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{K}_A^c & \mathbf{K}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^c \\ \boldsymbol{\delta}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R}^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{P}^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}^c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

其中， $\boldsymbol{\delta}^c$ 是与虚拟约束相应的位移向量， $\mathbf{I}$ 是单位矩阵。由上式得到

$$\mathbf{K}_A \boldsymbol{\delta}^A = \mathbf{R}^A + \mathbf{P}^A - \mathbf{K}_A^c \boldsymbol{\delta}^c \quad (5.18)$$

从式（5.18）导出物体 A 上接触点的柔度方程

$$\boldsymbol{\delta}_i^A = \sum_{j=1}^m \mathbf{C}_{ij}^A \mathbf{P}_j^A + \sum_{k=1}^{n_A} \mathbf{C}_{ik}^A \mathbf{R}_k^A + \mathbf{F}_i \boldsymbol{\delta}^c \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (5.19)$$

$\mathbf{F}_i$ 是与刚体位移相应的柔度矩阵。

第二个问题是，要将上述整体坐标系下的量转化到接触面的局部坐标系 $\overline{\overline{\overline{xyz}}}$ 。接触点位移和接触力在不同坐标系下的表达式有以下关系

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i^A &= \mathbf{T}_i^T \overline{\mathbf{P}}_i^A \\ \boldsymbol{\delta}_i^A &= \mathbf{T}_i^T \overline{\boldsymbol{\delta}}_i^A \end{aligned} \quad (\text{A, B}) \quad (5.20)$$

式中， $\mathbf{T}_i$ 是结点  $i$  的坐标转换矩阵， $\overline{\mathbf{P}}_i^A$ 、 $\overline{\boldsymbol{\delta}}_i^A$  分别是接触面局部坐标系下，结点  $i$  的接触力和位移。将式（5.20）代入式（5.19），得

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}_i^A = \sum_{j=1}^m \overline{\mathbf{C}}_{ij}^A \overline{\mathbf{P}}_j^A + \sum_{k=1}^{n_A} \overline{\mathbf{C}}_{ik}^A \mathbf{R}_k^A + \overline{\mathbf{F}}_i \boldsymbol{\delta}^c \quad (5.21)$$

其中， $\overline{\mathbf{C}}_{ij}^A = \mathbf{T}_i \mathbf{C}_{ij}^A \mathbf{T}_j^T$ ， $\overline{\mathbf{C}}_{ik}^A = \mathbf{T}_i \mathbf{C}_{ik}^A$ ， $\overline{\mathbf{F}}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{F}_i$ 。同样，将式（5.20）代入式（5.16）的第二式，得

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}_i^B = \sum_{j=1}^m \overline{\mathbf{C}}_{ij}^B \overline{\mathbf{P}}_j^B + \sum_{k=1}^{n_B} \overline{\mathbf{C}}_{ik}^B \mathbf{R}_k^B \quad (5.22)$$

以下将针对三类接触条件建立相应的相容方程。

#### (1) 连续边界

根据前面的连续边界条件（5.9），可以建立接触点的位移相容方程

$$\overline{\boldsymbol{\delta}}_i^A = \overline{\boldsymbol{\delta}}_i^B + \overline{\boldsymbol{\delta}}_{i0} \quad (5.23)$$

$\overline{\boldsymbol{\delta}}_{i0}$ 是第  $i$  个接触点对在局部坐标系下的初始间隙。将（5.21）和（5.22）代入（5.23），并

注意有 $\overline{\mathbf{P}}_j^A = -\overline{\mathbf{P}}_j^B = \overline{\mathbf{P}}_j$ ，可得

$$\sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{C}}_{ij} \bar{\mathbf{P}}_j + \bar{\mathbf{F}}_i \boldsymbol{\delta}^c = -\Delta \bar{\mathbf{R}}_i - \bar{\boldsymbol{\delta}}_{i0} \quad (5.24)$$

式中,

$$\bar{\mathbf{C}}_{ij} = \bar{\mathbf{C}}_{ij}^A + \bar{\mathbf{C}}_{ij}^B \quad (5.25)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{R}}_i = \sum_{k=1}^{n_B} \bar{\mathbf{C}}_{ik}^B \mathbf{R}_k^B - \sum_{k=1}^{n_A} \bar{\mathbf{C}}_{ik}^A \mathbf{R}_k^A \quad (5.26)$$

### (2) 滑动边界

接触面局部坐标系  $\bar{z}$  方向的位移仍然满足式 (5.23), 但在切平面的  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$  方向, 接触力的合力已经达到摩擦极限, 按照 Mohr-Coulomb 定律, 则有

$$\begin{aligned} \bar{P}_{jx} &= f \left| \bar{P}_{jz} \right| \cos \alpha \\ \bar{P}_{jy} &= f \left| \bar{P}_{jz} \right| \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.27)$$

### (3) 自由边界

$$\bar{\mathbf{P}}_j = \mathbf{0} \quad (5.28)$$

以上建立的相容方程, 为原来的有限元支配方程增加了  $3m$  个补充方程, 以求解  $3m$  个增加的未知接触力  $P_j (j=1, 2, \dots, m)$ 。

在建立相容方程时, 必须知道接触状态, 而接触状态事先也是未知的, 因此这是一个迭代求解的过程。一般先假定为连续接触状态, 按式 (5.24) 建立全部接触点的相容方程, 求出接触力后, 验证接触条件是否满足连续接触, 若是则不作修改; 若为滑动状态, 就用式

(5.27) 来代替这个接触点在  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$  两个方向相应的方程; 若是自由状态, 就用式 (5.28)

替换这个接触点的所有相应方程。这样通过反复迭代, 就可以求得真正的接触力和相应的相容方程。

#### 5.2.4 相容方程的增量形式

对于具有滑动摩擦的接触问题, 由于接触过程的不可逆, 需要采用增量方式加载、假定分级加载的次数为  $n_p$ , 在进行第  $l$  级加载前已经施加的混杂为  $\mathbf{R}_{k,l-1}^A$  和  $\mathbf{R}_{k,l-1}^B$ , 本级荷载增量为  $d\mathbf{R}_{k,l}^A$  和  $d\mathbf{R}_{k,l}^B$ , 这样式 (5.24) 就变成

$$\sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{C}}_{ij} \bar{\mathbf{P}}_{j,l} + \bar{\mathbf{F}}_i \boldsymbol{\delta}_l^c = -\Delta \bar{\mathbf{R}}_{i,l} - \bar{\boldsymbol{\delta}}_{i0} \quad (5.29)$$

注意式中的各项有,

$$\bar{\mathbf{P}}_{j,l} = \bar{\mathbf{P}}_{j,l-1} + \Delta \bar{\mathbf{P}}_{j,l}$$

$$\boldsymbol{\delta}_l^c = \boldsymbol{\delta}_{l-1}^c + \Delta \boldsymbol{\delta}_l^c$$

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\mathbf{R}}_{i,l} &= \sum_{k=1}^{n_B} \bar{\mathbf{C}}_{ik}^B \mathbf{R}_{k,l}^B - \sum_{k=1}^{n_A} \bar{\mathbf{C}}_{ik}^A \mathbf{R}_{k,l}^A = \\
&= \sum_{k=1}^{n_B} \bar{\mathbf{C}}_{ik}^B \mathbf{R}_{k,l-1}^B - \sum_{k=1}^{n_A} \bar{\mathbf{C}}_{ik}^A \mathbf{R}_{k,l-1}^A + \sum_{k=1}^{n_B} \bar{\mathbf{C}}_{ik}^B d\mathbf{R}_{k,l}^B - \sum_{k=1}^{n_A} \bar{\mathbf{C}}_{ik}^A d\mathbf{R}_{k,l}^A \\
&= \Delta \bar{\mathbf{R}}_{i,l-1} + \Delta d\bar{\mathbf{R}}_{i,l}
\end{aligned}$$

将上述各式代回式 (5.29)，得

$$\sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{C}}_{ij} \Delta \bar{\mathbf{P}}_{j,l} + \bar{\mathbf{F}}_i \Delta \delta_l^c = -\Delta d\bar{\mathbf{R}}_{i,l} - \sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{C}}_{ij} \bar{\mathbf{P}}_{j,l-1} - \bar{\mathbf{F}}_i \delta_{l-1}^c - \Delta \bar{\mathbf{R}}_{i,l-1} - \bar{\delta}_{i0} \quad (5.30)$$

令

$$\bar{\delta}_{i,l-1} = \sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{C}}_{ij} \bar{\mathbf{P}}_{j,l-1} - \bar{\mathbf{F}}_i \delta_{l-1}^c - \Delta \bar{\mathbf{R}}_{i,l-1} - \bar{\delta}_{i0} \quad (5.31)$$

则 (5.30) 成为

$$\sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{C}}_{ij} \Delta \bar{\mathbf{P}}_{j,l} + \bar{\mathbf{F}}_i \Delta \delta_l^c = -\Delta d\bar{\mathbf{R}}_{i,l} - \bar{\delta}_{i,l-1} \quad (5.32)$$

式 (5.32) 为连续接触条件相容方程的增量形式。

对于滑动接触条件， $\bar{z}$  方向的相容方程与式 (5.32) 类似， $\bar{x}$  和  $\bar{y}$  方向上相容方程的增量形式可表示为

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{P}_{jx,l} &= f \left| \Delta \bar{P}_{jz,l} \right| \cos \alpha \\
\Delta \bar{P}_{jy,l} &= f \left| \Delta \bar{P}_{jz,l} \right| \sin \alpha
\end{aligned} \quad (5.33)$$

对于自由接触条件，相容方程的增量形式则为

$$\Delta \bar{\mathbf{P}}_{j,l} = 0 \quad (5.34)$$

以上得到的接触点相容方程，由于刚体位移的存在，其未知量数目仍然大于方程数，因此必须补充整体平衡方程。

对于第  $l$  级加载，整体平衡方程为

$$\sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{Q}}_j \bar{\mathbf{P}}_{j,l} = \sum_{k=1}^{n_A} \mathbf{R}_{k,l}^A \quad (5.35)$$

其中，

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{P}}_{j,l} &= \bar{\mathbf{P}}_{j,l-1} + \Delta \bar{\mathbf{P}}_{j,l} \\
\sum \mathbf{R}_{k,l}^A &= \sum \mathbf{R}_{k,l-1}^A + \sum d\mathbf{R}_{k,l}^A
\end{aligned}$$

代入式 (5.35) 得

$$\sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{Q}}_j \bar{\mathbf{P}}_{j,l-1} + \sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{Q}}_j \Delta \bar{\mathbf{P}}_{j,l} = \sum \mathbf{R}_{k,l-1}^A + \sum d\mathbf{R}_{k,l}^A$$

注意

$$\sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{Q}}_j \bar{\mathbf{P}}_{j,l-1} = \sum_{k=1}^{n_A} \mathbf{R}_{k,l-1}^A$$

整体平衡方程为

$$\sum_{j=1}^m \bar{\mathbf{Q}}_j \Delta \bar{\mathbf{P}}_{j,l} = \sum d\mathbf{R}_{k,l}^A \quad (5.36)$$

#### 5.4 间隙元方法

上一节的柔度法对大面积的接触问题不合适，因为接触面积大，就需要布置比较多的接触点对，从而引起柔度矩阵求逆的困难。另外，对于多个物体的接触问题，柔度法还不够成熟。因此，对于大面积接触和多体接触问题，常常采用间隙元方法。

间隙元的基本思想是提高虚设的间隙单元来联接相互接触的物体，并人为构造单元的物理特性以模拟接触过程。